Appendice A

Esercitazioni

A.1 Curve algebriche piane

A.1.1 Riducibilità e irriducibilità

L'idea di base è che una curva C è il luogo degli zeri di un dato polinomio $f \in \mathbb{C}[\underline{x}]$, che si può scomporre come

$$f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_n^{r_n}.$$

Lo studio di C è in un certo senso equivalente allo studio delle $C_i = (Z(f_i), f_i)$. Purtroppo però il problema di fattorizzazione è in generale molto difficile. Noi ci occuperemo di valori di $d = \deg f$ "piccoli", ovvero $d = 1, 2, 3, 4$, per i quali è possibile applicare metodi *ad hoc*. Procediamo nell'analisi per d crescente.

$d = 1$. C è una retta e quindi è irriducibile.

$d = 2$. C è una conica e la questione della sua irriducibilità o meno è già stata trattata nel corso di Geometria I.

$d = 3$. f può essere irriducibile o riducibile. Se è riducibile, potremo sicuramente scriverlo come $f = gl$ con $\deg l = 1$, e anzi vige

$$f \text{ riducibile} \Leftrightarrow \exists l \text{ di primo grado} : l \mid f.$$

In tal caso l dovrà essere del tipo $y = mx + q$ oppure $x = k$.

$$l \mid f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists m, q \ : \ f(x, mx+q) = A_3(m,q)x^3 + \cdots + A_0(m,q) \equiv 0 \\ \text{oppure} \\ \exists k \ : \ f(k,y) = B_3(k)y^3 + \cdots + B_0(k) \equiv 0 \end{cases}$$

$$\text{ovvero} \quad \exists m, q : \begin{cases} A_3(m,q) = 0 \\ \vdots \\ A_0(m,q) = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \quad \exists k : \begin{cases} B_3(k) = 0 \\ \vdots \\ B_0(k) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo più equazioni che incognite, quindi in generale ci aspettiamo incompatibilità. Questo significa che prendendo un polinomio a caso è piuttosto probabile che questo sia irriducibile.

Esempio Sia $f(x,y) = x^3 - x^2y + y^2 - x^2 = 0$. Applichiamo il procedimento appena descritto. Provando con $x = k$ otteniamo

$$f(x,y) = y^2 - x^2y + (x^3 - x^2)$$
$$\begin{cases} B_2(k) = 1 = 0 \\ B_1(k) = -k^2 = 0 \\ B_0(k) = k^3 - k^2 = 0 \end{cases}$$

che è un sistema impossibile. Provando con $y = mx + q$ abbiamo

$$f(x, mx+q) = (1-m)x^3 + (m^2 - q - 1)x^2 + 2mqx + q^2$$
$$\begin{cases} 1 - m = 0 \\ m^2 - q - 1 = 0 \\ 2mq = 0 \\ q^2 = 0 \end{cases}$$

In generale un sistema del genere è troppo difficile.[1] Però qui ad esempio otteniamo subito la soluzione $m = 1$ e $q = 0$, quindi $(y - x) \mid f$. Applicando l'algoritmo euclideo della divisione in $\mathbb{R}[x,y] = \mathbb{R}[x][y]$ avremo infine

$$f(x,y) = (y - x)(y - x^2 + x).$$

Come ultima spiaggia è possibile applicare il cosiddetto *metodo del delta*. Questo metodo è applicabile solo se $f(x,y)$ contiene almeno una delle variabili al più di grado 2. Si considera f come polinomio di II grado in quella variabile, per esempio y.

$$f(x,y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x).$$

Osserviamo che f si può fattorizzare solo i questi due modi

$$f(x,y) = \delta(x)(\alpha(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x))$$
$$f(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x))(\gamma(x)y + \delta(x)).$$

Il primo caso si ha se e solo se esiste un fattore non banale comune ad $a(x), b(x), c(x)$. Il secondo caso si ha se e solo se $\Delta = b^2 - 4ac$ è un quadrato perfetto. Infatti, se $a = \alpha\gamma$, $b = \alpha\delta + \beta\gamma$, $c = \beta\delta$ si verifica che $\Delta = b^2 - 4ac$ è un quadrato perfetto. Viceversa, se $\Delta = b^2 - 4ac$ è un quadrato perfetto, diciamo H^2, allora $(b - H)(b + H) = 4ac$ e, posto $a = \alpha\gamma$ e $c = \beta\delta$, si ha $b - H = 2\alpha\delta$ e $b + H = 2\beta\gamma$ in modo che $b = \alpha\delta + \beta\gamma$. Il criterio va quindi formulato come segue:

$$f \text{ irriducibile} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \Delta \text{ non è un quadrato perfetto;} \\ \text{(ii)} & a(x), b(x), c(x) \text{ non hanno un fattore comune.} \end{cases}$$

Osservazione

(i) Il metodo del delta vale per $\deg f$ qualsiasi (basta che f sia quadratica in una variabile).

[1] Ma siamo ottimisti e confidiamo nel fatto che ci verranno sempre dati esercizi fattibili.

(ii) In particolare <u>non</u> vale in generale se f è biquadratica rispetto ad una variabile.

Esempio Sia $f(x,y) = y^4 + (2x^2-1)y^2 + x^4$. Pongo $y^2 = w$ ottenendo

$$\varphi(x,w) = w^2 + (2x^2-1)w + x^2$$

che, essendo $\Delta = 1 - 4x^2$, soddisfa entrambe le condizioni per l'irriducibilità. Tuttavia, f non è irriducibile! È φ ad essere irriducibile, mentre risulta

$$f(x,y) = (x^2+y^2+y)(x^2+y^2-y).$$

$d = 4$. Questo caso si illustra rapidamente, nel senso che non esiste un metodo generale. Distinguiamo due casi se f è riducibile:

$$f \text{ riducibile} \Leftrightarrow \begin{cases} f = lK & \deg l = 1 \\ \text{oppure} & \\ f = Q_1 Q_2 & \deg Q_1, Q_2 = 2 \end{cases}$$

Se anche riuscissimo ad escludere il primo caso, come visto prima, potremmo non riuscire ad escludere il secondo. Dipende dal polinomio in esame. Un utile strumento strumento è sempre il metodo del Δ, quando si può applicare.

Osservazione Se abbiamo un polinomio della forma $f(x,y) = a(y)x^2 + b(y)$ vale

$$f \text{ irriducibile} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & x^2 = -\frac{b(y)}{a(y)} \text{ non è un quadrato perfetto;} \\ \text{(ii)} & a(y), b(y) \text{ non hanno fattori comuni.} \end{cases}$$

Esercizio A.1.1 Dimostrare in dettaglio la correttezza del metodo del delta.

Esempio Sia $f(x,y) = x(x+1)y^2 + y - x(x-1) = 0$. Applichiamo il metodo del Δ. La prima cosa da vedere è se $a(x), b(x), c(x)$ hanno un fattore comune. Qui non l'hanno. Risulta $\Delta = (2x^2-1)^2$, quadrato perfetto, quindi:

$$\eta_{1,2} = \frac{-1 \pm (2x^2-1)}{2x(x+1)} = \begin{cases} \frac{x-1}{x} \\ \frac{-x}{x+1} \end{cases}$$

$$f(x,y) = x(x+1)\left[y - \frac{x-1}{x}\right]\left[y + \frac{x}{x+1}\right] = (xy-x+1)(xy+y+x).$$

A.1.2 Singolarità e riducibilità

L'idea di base è:

$$C \text{ irriducibile} \Rightarrow C \text{ non ha “molte” singolarità.}$$

Cosa vuol dire?

(a) Se C è liscia $\Rightarrow$ C è irriducibile e ridotta.

(b) C abbia solo k punti singolari con molteplicità m_i per $i = 1, \dots, k$. Sia $\deg C = d$. Se

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(m_i-1) > (d-1)(d-2) \Rightarrow f \text{ riducibile e ridotta, dato che ha un numero finito di punti singolari.}$$

Questo è il significato di quel “molte”.

(c) C ha infiniti punti singolari $\Leftrightarrow$ C non è ridotta.

A.1.3 Punti semplici e singolari

Ci interessa come trovare i punti singolari di una curva. Sia $C = (Z(F), F)$ una curva nel piano proiettivo complesso. Essendo F omogeneo,

$$P \text{ singolare } \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial F}{\partial y}(P) = \frac{\partial F}{\partial u}(P) = 0$$

Per determinare i punti singolari dovremo risolvere:

$$\text{nel proiettivo} \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \text{nell'affine} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

dove f è il polinomio affinizzato di F e inoltre in $\mathbf{A}^2$ si devono studiare i punti di $C \cap l_\infty$. Si noti che nel caso affine si richiede esplicitamente l'appartenenza alla curva, perché in tale ambito non vale la relazione di Eulero.

Esempio Analizziamo la curva che, in cordinate affini, ha equazione: $f(x, y) = x^3 + xy^2 + x^2 + 2y^2 - x - 1$.

Riscriviamo f nella forma

$$f(x, y) = (x + 2)y^2 + (x^3 + x^2 - x - 1).$$

Notiamo dall'incompatibilità del sistema

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

che $a(x), c(x)$ non hanno fattori comuni. Inoltre Δ non è un quadrato, anzi basta notare che

$$y^2 = -\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 2}$$

non è un quadrato e che numeratore e denominatore di questa frazione non hanno fattori comuni. Pertanto C è irriducibile. Andiamo ora a caccia di punti singolari.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \ x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x = -2 \Rightarrow y^2 + 7 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \pm i\sqrt{7}$$

I candidati sono quindi:

$$A \equiv (-1, 0) \qquad B \equiv \left(\frac{1}{3}, 0\right) \qquad C \equiv \left(-2, i\sqrt{7}\right) \qquad D \equiv \left(-2, -i\sqrt{7}\right)$$

Appartengono a C? Sostituendo risulta che solo A appartiene alla curva, ed è quindi il solo punto singolare al finito. Consideriamo ora la chiusura proiettiva della nostra curva e intersechiamola con la retta impropria $u = 0$. Potremmo fare il consueto ambaradan risolvendo il sistema delle due, ma pensandoci bene quello che vogliamo non è altro che i soli monomi di grado massimo di f eguagliati a 0. Otteniamo

$$x^3 + xy^2 = x(x^2 + y^2) = 0$$

da cui snoccioliamo i punti impropri

$$Y_\infty = (0:1:0) \qquad S_\infty = (1:i:0) \qquad T_\infty = (1:-i:0).$$

Tuttavia, calcolando le derivate parziali si vede che nessuno di questi punti è singolare. Anzi, qui non è neanche necessario fare i conti, perché la retta l_∞ interseca la curva in questi punti con molteplicità 1.

Inoltre, siccome C è irriducibile e ridotta,

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(m_i-1) \leq (d-1)(d-2) = 2.$$

Conclusione: questa curva irriducibile può avere al più un punto singolare, e quello è doppio.

Individuiamo ora l'asintoto in Y_∞; facendo i conti con la formula data nel testo applicata alla chiusura proiettiva di C otteniamo la retta $x+2u=0$, ovvero $x=-2$.

Individuiamo quindi le rette tangenti nel punto singolare A. Queste saranno le rette per A caratterizzate da una molteplicità d'intersezione maggiore della molteplicità del punto singolare. Intersechiamo quindi le rette del fascio di rette per A con la curva.

$$\begin{cases} x^3+xy^2+x^2+2y^2-x-1=0 \\ y=m(x+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,m(x+1)) = (x+1)^2\Big[(m^2+1)x+(2m^2-1)\Big]=0$$

La molteplicità d'intersezione in $x=-1$ è sempre ≥ 2 (punto doppio); sarà 3 sse $x=-1$ è radice di $(m^2+1)x+(2m^2-1)$.

$$x = \frac{1-2m^2}{1+m^2} = -1 \;\Leftrightarrow\; m = \pm\sqrt{2}$$

Le tangenti principali in A hanno pertanto equazioni $y=\pm\sqrt{2}(x+1)$. Attenzione: non tutte le rette del fascio si possono porre nella forma $y=m(x+1)$, resta esclusa dalla nostra analisi la retta $x=-1$. Ora, $f(-1,y)=0$ ci dà la molteplicità d'intersezione tra C e tale retta. Ossia, tale molteplicità è la molteplicità della radice $y=0$, cioè 2. Quindi tale retta non è una tangente principale.

Esercizio A.1.2 Controllare che la molteplicità d'intersezione è esattamente 2, e quindi che la retta $x=-1$ non è una tangente principale.

Determiniamo quindi i punti a tangente orizzontale/verticale. I punti a tangente orizzontale sono dati da

$$\begin{cases} f=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}=0 \end{cases}$$

I punti a tangente verticale invece sono dati da

$$\begin{cases} f=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases}$$

In realtà non proprio, perché così otteniamo anche i punti singolari; tuttavia, questi ormai li conosciamo e possiamo buttarli via.

$$\begin{cases} y^2(x+2)+x^3+x^2-x-1=0 \\ 3x^2+y^2+2x-1=0 \end{cases}$$

$$y^2 = -3x^2-2x+1$$

$$(x+1)(-2x^2-5x+1)=0$$

Da $x = -1$ otteniamo il punto singolare A, che scartiamo

$$2x^2 + 5x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} = \xi_{1,2}$$

I valori di y si ottengono in questo caso mediante $\eta_{1,2} = \pm\sqrt{\xi_j}$. Risulta che ξ_1 produce due punti reali $B_{1,i} = (\xi_1, \eta_i)$, mentre ξ_2 dà luogo a due punti complessi coniugati, che ignoriamo.

Per quanto riguarda i punti a tangente verticale, invece, otteniamo:

$$\begin{cases} f = 0 \\ 2y(x+2) = 0 \end{cases}$$

Da qui $x = -2$ conduce all'assurdo $-3 = 0$, mentre $y = 0$ porta a

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2 = 0$$

e quindi al punto singolare A, che scartiamo, per $x = -1$ e ad una vero punto a tangente verticale che è $(1, 0)$.

Si noti che abbiamo intersecato la nostra cubica con una retta e non abbiamo trovato intersezione. Come spiegare questo fenomeno? Semplicemente, i punti d'intersezione sono all'infinito. Infatti $x = -2$ era un asintoto di C.

Un'altra cosa che possiamo dire è che, siccome y compare solo al grado pari nell'espressione della curva, allora questa è simmetrica rispetto all'asse delle x.

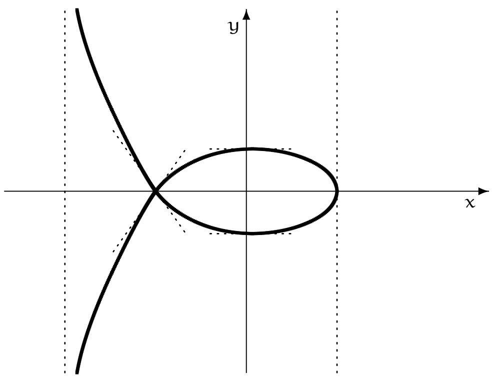
L'ultima cosa che possiamo fare è dare delle *limitazioni reali*, ossia delle limitazioni per le coordinate (x, y) dei punti di C con x ed y entrambi reali .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad\qquad y = \pm\sqrt{-\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x+2}}$$

Risulta

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x+2} \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -2 < x \leq 1,$$

e questo ci permette di limitare la regione di piano occupata dalla nostra curva. In definitiva ci siamo fatti una certa idea della nostra curva, e possiamo provare a rappresentarla in un grafico.



A.1.4 Vertici del triedro fondamentale

Nei tre punti

$$O \equiv (0:0:1) \qquad X_\infty \equiv (1:0:0) \qquad Y_\infty \equiv (0:1:0)$$

è facile stabilire il comportamento di una curva. Sia $C = (Z(f), f)$, $\deg f = d$. Abbiamo

$$f = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \cdots + f_d(x, y)$$

dove m è il minimo grado delle componenti omogenee. m risulta essere la molteplicità di O come punto di C. Abbiamo quindi $m > 0 \Leftrightarrow O \in C$, e in tal caso $f_m = 0$ è il complesso delle rette tangenti principali in O:

$$f_m = \prod_{i=1}^{m} (\alpha_i x + \beta_i y)$$

Si può dimostrare che

$$\nu_{X_\infty}(C) = \deg f - \deg_x f$$

e che inoltre le tangenti in X_∞ sono date da $a(y : u) = 0$, dove $a(y : u)$ è il coefficiente omogeneizzato della massima potenza di x in f. Analogamente per Y_∞.

Esercizio A.1.3 Dimostrarlo.

Esempio Sia $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + 2x^2 - y^2$. Vediamo che O è punto doppio, e che le tangenti, date da $2x^2 - y^2 = 0$, sono $y = \pm\sqrt{2}x$. $X_\infty \notin C$, ma

$$\nu_{Y_\infty}(C) = \deg f - \deg_y f = 4 - 2 = 2,$$

e le tangenti in Y_∞ sono $-u^2 = 0$; si tratta di un punto di natura cuspidale.

A.1.5 Curve osculatrici

Partiamo da $P \in C$ nel piano affine euclideo e supponiamo $\nu_P(C) = m$. Fissata una retta tangente principale t (non verticale) in P, consideriamo il fascio di parabole passanti per P e aventi tangente t in P con asse verticale, $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Analizzando la molteplicità d'intersezione con la curva in P di ogni parabola della famiglia ricaveremo le parabole osculatrici nel punto P. Potremmo poi determinare le cubiche osculatrici e così via.

L'idea è lo sviluppo in serie del polinomio intorno al punto P. Se supponiamo $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \neq 0$, il teorema del Dini ci consente di esplicitare

$$y = \varphi(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$$

Per realizzare lo sviluppo procediamo per gradi: prima usiamo la retta tangente in P come termine di grado 1, poi stabiliamo il coefficiente del termine di grado 2, poi 3 e così via, sempre facendo in modo che la molteplicità d'intersezione tra la nostra curva e quella approssimante sia superiore al caso generale. Come procedere se P è un punto improprio ? In generale il fascio di coniche da usare è del tipo $rt + \lambda s^2 = 0$ dove t è la retta tangente ala curva in P, s è una qualunque retta che passi per P distinta da t, ed r è una qualunque retta che non passi per P. Nel piano affine, se r è la retta impropria, si ritrova il classico fascio di parabole usato prima.

Esempio Sia $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3x^3$ ed $F = x^2u - y^2u + 3x^3$. Notiamo che Y_∞ è un punto semplice, perché

$$\nu_{Y_\infty}(C) = \deg f - \deg_y f = 3 - 2 = 1,$$

e la retta ivi tangente è $u = 0$. Vogliamo determinare una conica osculatrice a C in questo punto $(0 : 1 : 0)$. Consideriamo il fascio di coniche:

$$\Pi_\lambda : \ yu = \lambda x^2$$

passiamo al piano affine (x, u), deomogeneizzando rispetto ad y, ed intersechiamo la generica conica della famiglia con la nostra curva.

$$\begin{cases} x^2u - u + 3x^3 = 0 \\ u = \lambda x^2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\lambda x^4 - \lambda x^2 + 3x^3 = 0$$

La molteplicità d'intersezione in Y_∞ è la molteplicità di $x = 0$ come soluzione di questa equazione, cioè 2. Le curve osculatrici sono quelle che realizzano una molteplicità d'intersezione > 2, il che avviene solo per $\lambda = 0$. Otterremmo dunque una sola "curva" osculatrice di equazione $u = 0$. Dal punto di vista analitico, notiamo che manca il termine di II grado; dal punto di vista geometrico, abbiamo una conica degenere.

Esercizio A.1.4 Proseguire i conti per ottenere la cubica osculatrice, che deve risultare essere $u = 3x^3$.

Osservazione In genere ci si ferma al primo termine non nullo dello sviluppo, ma si potrebbe anche andare avanti.

A.1.6 Flessi

Diciamo che $P \in C$ è punto di flesso se, rispetto ad una retta tangente (usuale o principale) $\mathrm{tg}_P\, C$ in P a C

$$\nu_P(C, \mathrm{tg}_P\, C) > m_P(C) + 1.$$

Se P è semplice, questo equivale a richiedere che la molteplicità d'intersezione in P tra la curva e la retta tangente sia > 2. Più precisamente dovremmo dire non "flesso", bensì *punto di natura inflessionale*. Geometricamente, il punto P è di flesso se $\mathrm{tg}_P\, C$ attraversa la curva C.

Esempio Consideriamo il punto $(0, 0)$. Per $y = x^3$ è un punto di flesso, mentre per $y = x^4$ è solo un punto di natura inflessiva, nonostante $\nu = 4 > 2$.

Come determinare i flessi?

$$P \text{ flesso} \Leftrightarrow P \in H \cap C$$

$$H = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{i,j=1,2,3} \quad \text{(Hessiana di } C \text{ nel piano proiettivo)}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, u)$$

Possiamo vedere che $\deg H = 3(\mathrm{ord}(C) - 2)$. Pertanto per polinomi di grado alto è molto difficile determinare tutti i flessi di una curva.

Esempio Sia

$$C \equiv f(x, y) = y^4 + x^2 - y^2.$$

Notiamo che O è punto doppio e le tangenti sono ivi date da $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Chiamiamo $t_1 \equiv (y = x)$, $t_2 \equiv (y = -x)$. Abbiamo un nodo ordinario, e per ogni ramo possiamo chiederci se è di natura inflessionale o meno. Per quanto riguarda t_1, intersecando con la curva ricaviamo una molteplicità pari a $4 > 3$; P è dunque punto di natura inflessionale per t_1. Per stabilire se è di flesso bisogna determinare la curva osculatrice.

- Iniziamo con il fascio di parabole per O con tangente t_1 e come asse l'asse delle y:
$$\Pi_\lambda \equiv y = \lambda x^2 + x.$$
Intersecando con $f = 0$ otteniamo:
$$x^4(1+\lambda x)^4 - x^2(1+\lambda x^2) = 2\lambda x^3 + o(x^3).$$
La molteplicità d'intersezione è in generale ≥ 3; per averla > 3 è necessario porre $\lambda = 0$, sicché avremmo $y = x$. Possiamo quindi dire che la parabola osculatrice non esiste.
- Passiamo all'opportuno fascio di cubiche,
$$K_\mu \equiv y = \mu x^3 + x.$$
La molteplicità d'intersezione è in generale ≥ 4, e per averla > 4 dobbiamo chiedere $\mu = -\frac{1}{2}$, da cui deduciamo che è cubica osculatrice
$$K_{-\frac{1}{2}} \equiv y = x - \frac{1}{2}x^3.$$

Facendo i conti risulta, in maniera analoga, che per t_2 la cubica osculatrice è invece $y = -x + \frac{1}{2}x^3$. Siamo dunque di fronte ad un biflecnodo.

A.1.7 Classificazione dei punti doppi

Passo 1.

- Determinare le rette tangenti principali.
  - 2 reali distinte. Nodo ordinario (di I specie).
  - 2 complesse coniugate. Nodo isolato.
  - 1 tangente doppia t. Punto di natura cuspidale.

Passo 2.

- $\nu_P(t, C) = 3$. Cuspide di I specie.
- $\nu_P(t, C) = 4$. Determinare le parabole osculatrici.
  - 2 parabole reali distinte. Tacnodo (nodo di II specie).
  - 2 parabole complesse coniugate. Tacnodo isolato.
  - 1 parabola osculatrice Π.

Passo 3.

- $\nu_P(\Pi, C) = 5$. Cuspide di II specie.
- $\nu_P(\Pi, C) > 5$. Determinare le cubiche osculatrici.
  - 2 cubiche reali distinte. Oscnodo (nodo di III specie).
  - 2 cubiche complesse coniugate. Oscnodo isolato.
  - 1 cubica osculatrice K.

Esempio. Sia $P \equiv (0, 0)$ punto doppio, e $y^2 = x^n + o(x^n)$ l'equazione della curva.

- $n = 2k$ pari. $y^2 - x^n + o(x^n) \approx y^2 - x^n = (y - x^k)(y + x^k)$. Nodo.

- n dispari. $y^2 = x^n + o(x^n) \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^n}$. Cuspide.

Questo procedimento non può andare avanti all'infinito, perché n sarà al massimo il grado del polinomio relativo alla curva.

Esempio Sia C di equazione $f = y^4 + (3x^2 + x)y^2 - 2x^2 = 0$. Notiamo che O è un punto doppio, con tangente $x^2 = 0$; trattasi dunque di punto di natura cuspidale. La molteplicità d'intersezione tra C e la tangente risulta essere 4, quindi determiniamo le parabole osculatrici. Intersecando le parabole del fascio $\Pi_\lambda \equiv x = \lambda y^2$ con la curva otteniamo

$$(1 + \lambda - 2\lambda^2)y^4 + o(y^4) = 0,$$

quindi al fine di ottenere molteplicità d'intersezione > 4 risolviamo $1 + \lambda - 2\lambda^2$ sì da ottenere le due soluzioni $\lambda_{1,2} = 1, -\frac{1}{2}$, che corrispondono alle due parabole osculatrici

$$x = y^2, \qquad x = -\frac{1}{2}y^2.$$

O è quindi un tacnodo.

Esempi

- Sia $h(x, y) = y^2 - 2yx^2 + x^4 + x^5$. Tale polinomio è irriducibile (verificarlo con il metodo del delta). Notiamo che O è punto doppio, con tangenti date da $y^2 = 0$, ed è pertanto di natura cuspidale. La molteplicità d'intersezione $\nu_O(y = 0, C)$ è data da
$$\begin{cases} h = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^4 + x^5 = 0,$$
quindi è 4 e il punto non è una cuspide di I specie. Passiamo alle parabole osculatrici. Consideriamo la famiglia di parabole $\Pi_\lambda \equiv y = \lambda x^2$.
$$\begin{cases} h = 0 \\ \Pi_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad h(x, \lambda x^2) = (\lambda - 1)^2 x^4 + x^5 = 0$$
Abbiamo $\nu_O(\Pi_\lambda, C) > 4 \Leftrightarrow \lambda = 1$, quindi c'è una sola parabola osculatrice, $\Pi \equiv y = x^2$. Risulta
$$\begin{cases} h = 0 \\ \Pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad h(x, x^2) = x^5 = 0,$$
pertanto la molteplicità d'intersezione è esattamente 5. Trattasi di cuspide di II specie.
- Sia $\widetilde{h}(x, y) = y^2 - 2yx^2 + x^4 - x^6 + x^7$. L'analisi si esegue in maniera analoga all'esempio precedente.
$$\begin{array}{lcrl} \begin{cases} \widetilde{h} = 0 \\ y = 0 \end{cases} & \Rightarrow & x^4 - x^6 + x^7 = 0 & \qquad \nu = 4 \\ \begin{cases} \widetilde{h} = 0 \\ \Pi_\lambda = 0 \end{cases} & \Rightarrow & (\lambda - 1)^2 x^4 - x^6 + x^7 = 0 & \qquad \nu > 4 \Leftrightarrow \lambda = 1 \\ \begin{cases} \widetilde{h} = 0 \\ \Pi = 0 \end{cases} & \Rightarrow & -x^6 + x^7 = 0 & \qquad \nu = 6 \end{array}$$
Cerchiamo dunque le cubiche osculatrici, considerando la famiglia di cubiche $K_\mu \equiv y = x^2 + \mu x^3$:
$$\begin{cases} \widetilde{h} = 0 \\ K_\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \widetilde{h}(x, x^2 + \mu x^3) = (\mu^2 - 1)x^6 + x^7 = 0.$$
Abbiamo $\nu_O(K_\mu, C) > 6 \Leftrightarrow \mu = \pm 1$, e dunque due cubiche osculatrici reali distinte. O è un oscnodo reale.

Esempio Sia C di equazione $f(x,y) = x^4 + y^4 - y(x^2 + y^2) = 0$, il polinomio che individua la chiusura proiettiva di C risulta: $F = x^4 + y^4 - y(x^2 + y^2)u = 0$. Notiamo che O è punto triplo ordinario, con tangenti date da

$$y(x^2 + y^2) = y(x - iy)(x + iy) = 0.$$

Chiaramente solo una di queste tre tangenti si vede nel piano reale, quindi abbiamo a che fare con un punto multiplo che, nel piano affine euclideo, sembra un punto liscio. È facile verificare che O è l'unico punto singolare della curva, che quindi è ridotta.

Se sapessimo che f è irriducibile potremmo dire che non ci sono altri punti multipli. Purtroppo però il metodo del delta non si può applicare, e non ci resta che trovare qualche metodo *ad hoc*. Siccome abbiamo a che fare con una quartica, gli unici due casi di riducibilità che possono presentarsi sono $f = lK$ (retta e cubica) e $f = f_1 f_2$ con entrambi i fattori irriducibili e di grado 2 (due coniche).

- Se $C = Q_1 \cup Q_2$ (dove ogni Q_i è una conica liscia) i soli punti singolari sarebbero i punti d'intersezione delle due coniche, che sono doppi, mentre noi abbiamo un punto triplo.
- Se $C = l \cup K$ allora necessariamente $l \ni O$, e l'unica possibilità è quella di una cubica con punto doppio più una retta per tale punto.[2] Le rette per O sono della forma $y = mx$ oppure $x = 0$; dire $l \subseteq C$ equivale a dire $F(x, mx) \equiv 0$ per qualche m oppure $F(0, y) \equiv 0$. Entrambi questi casi risultano essere impossibili.

Concludiamo quindi che C è irriducibile.

- Simmetria. x di grado pariin $f \Rightarrow C$ è simmetrica rispetto all'asse delle y.
- Punti del triedro fondamentale. $X_\infty, Y_\infty \notin C$.
- Intersezioni con gli assi.

$$\begin{array}{llrl}
\text{asse } x & \begin{cases} F = 0 \\ y = 0 \end{cases} & x^4 = 0 & \rightsquigarrow O \\
\text{asse } y & \begin{cases} F = 0 \\ x = 0 \end{cases} & y^4 - y^3 = y^3(y-1) = 0 & \rightsquigarrow O, eilpuntoA \equiv (0:1:1) \\
\text{asse } l_\infty & \begin{cases} F = 0 \\ u = 0 \end{cases} & x^4 + y^4 = 0 & \rightsquigarrow \left(\pm i\frac{\sqrt{2}}{2} : \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} : 0\right)
\end{array}$$

  Quest'ultimo dato ci dice che nella sua rappresentazione reale la curva è tutta al finito.

- Punti a tangente orizzontale.

$$\begin{cases} f = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 - y(x^2 + y^2) = 0 \\ 2x(2x^2 - y) = 0 \end{cases}$$

  Per $x = 0$ troviamo $y = 1$ ed il punto singolare O. Per $2x^2 - y = 0$ abbiamo

$$f(x, 2x^2) = x^4(16x^4 - 8x^2 - 1) = 0,$$

  che dà il punto singolare O, 2 soluzioni reali distinte e 2 soluzioni complesse coniugate. I due punti reali, B e B' sono

$$\left(\pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}, \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) \approx (\pm 0.78, 1.21).$$

[2] In realtà il polinomio K potrebbe essere riducibile, ma la cosa non disturba il ragionamento.

- Punti a tangente verticale.

$$\begin{cases} f = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 - y(x^2 + y^2) = 0 \\ x^2 = y^2(4y - 3) = 0 \end{cases}$$
$$2y^3(y-1)(8y^2 - 4y - 1) = 0$$

  Da questo otteniamo il punto O, i punti $C \equiv (1, 1)$ e $C' \equiv (-1, 1)$ e 4 punti complessi a 2 a 2 coniugati.

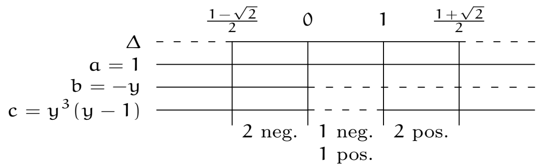
- Limitazioni reali. f è biquadratica in x, poniamo quindi $w = x^2$.

$$w^2 - yw + (y^4 - y^3) = 0$$
$$\Delta_w = \Delta(y) = y^2(1 + 4y - 4y^2)$$

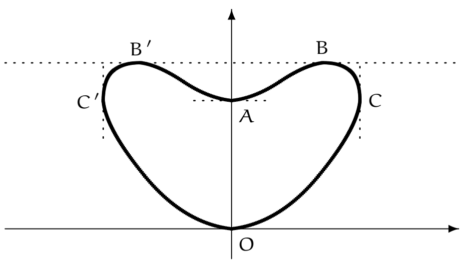
  Richiedendo $\Delta_w > 0$ otteniamo la condizione

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq w \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

  Questo però non basta, perché le radici devono essere non negative. Applichiamo pertanto il metodo di Cartesio:



  Dunque la nostra curva sarà compresa interamente tra $0 \leq y \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Inoltre vediamo che una retta orizzontale individuerà due intersezioni con la curva per $0 \leq y < 1$, quattro intersezioni per $1 \leq y \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Il diagramma qualitativo di C risulta:



Osservazione Questo è un esempio di quartica con un punto triplo, quindi è razionale. Per trovare una parametrizzazione bisogna individuare un sistema di curve di un certo grado tale da intersecare la nostra curva in un certo numero di punti fissi più un solo punto variabile. Si prenda il fascio di rette per O: questo interseca la curva in 4 punti, di cui 3 sono raccolti nel punto triplo e un'altro è variabile . Mettendo a sistema con la curva

$$\begin{cases} y = mx \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x, mx) = 0$$

salterà fuori qualcosa del tipo

$$x^3(a(m)x + b(m)),$$

da cui si otterranno

$$x = -\frac{b(m)}{a(m)}, \qquad y = -m\frac{b(m)}{a(m)}.$$

Esercizio A.1.5 Eseguire il calcolo per determinare a e b.

Esempio Sia $C \equiv x^3 - xy^2 + y^2 - 5x = 0$. Questa è una cubica simmetrica rispetto all'asse delle x. Potremmo dedurne l'irriducibilità con il metodo del delta, ma siccome y compare solo al grado 2 vediamo direttamente che

$$y^2 = \frac{x(5-x^2)}{1-x}$$

non è un quadrato perfetto e che numeratore e denominatore non hanno fattori comuni, quindi C è irriducibile.

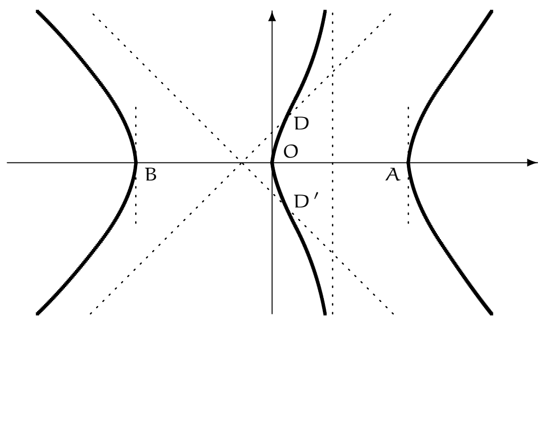
- O è punto semplice, con tangente $x = 0$. Y_∞ è punto semplice, con tangente (asintoto) $x = 1$. Infine $X_\infty \notin C$.
- Intersezioni con gli assi. Intersecando $C \cap (x = 0)$ e facendo i conti si ottiene $y^2 = 0$, cioè l'origine contata due volte. In effetti manca una soluzione, che sarà necessariamente all'infinito (Y_∞). Intersecando $C \cap (y = 0)$ otteniamo $x^3 - 5x = 0$, da cui i punti $A, B \equiv (\pm\sqrt{5}, 0)$; le tangenti rispettive devono necessariamente essere $x \mp \sqrt{5} = 0$ per via della simmetria rispetto all'asse delle x. Infine intersecando $C \cap (u = 0)$ otteniamo $Y_\infty \equiv (0, 1, 0)$ e $P, P' \equiv (1, \pm 1, 0)$, e quindi nessuno di questi punti è singolare.
- Punti singolari. Il sistema

  $$\begin{cases} f = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

  non ammette soluzioni, quindi C, non avendo punti impropri singolari (lo abbiamo visto sopra) è liscia (e quindi non è razionale).
- Asintoti. Mettendo a sistema l'equazione della curva e il fascio di rette parallele per P ($y = x + k$) otteniamo

  $$f(x, x+k) = (1-2k)x^2 + (2k - k^2 - 5)x + k^2 = 0.$$

  Questa risolvente è di II grado perché una intersezione è situata all'infinito. Se voglio due intersezioni all'infinito devo imporre che questa sia in realtà di I grado ponendo $k = \frac{1}{2}$. Pertanto la tangente in P è la retta $y = x + \frac{1}{2}$. Si tratta di un asintoto ordinario o di flesso? Mettendo nuovamente a sistema la retta e la curva deduciamo che il terzo punto d'intersezione è $D \equiv \left(\frac{1}{17}, \frac{19}{37}\right)$, quindi l'asintoto non attraversa la curva ed è ordinario. Per ragioni di simmetria avremo un altro asintoto ordinario passante per P', di equazione $y = -x - \frac{1}{2}$ e con punto d'intersezione con la curva $D' \equiv \left(\frac{1}{17}, -\frac{19}{37}\right)$. Possiamo ora chiederci se l'asintoto per Y_∞ è di flesso. Mettendolo a sistema con la curva otteniamo l'assurdo $-4 = 0$, quindi non ci sono intersezioni al finito ma saranno 3 all'infinito. Abbiamo dunque un asintoto di flesso (in realtà avremmo potuto dirlo subito per la simmetria).
- Calcolando le limitazioni reali risultano inaccessibili alla curva le due fasce $-\sqrt{5} < x < 0$ e $1 \le x < \sqrt{5}$. Ecco il grafico:



A.1.8 Intersezione di curve

L'idea principale è quella di usare la teoria del risultante. In realtà però non è detto che sia l'unica idea possibile. Anzi, quando possibile è sempre preferibile ricavare e sostituire una variabile. Anche perché alla fin fine il risultante non è altro che un modo per far questo.

Esempio Consideriamo le due curve:

$$C : f(x, y) = y^2 - 2y + x^2 = 0$$
$$D : g(x, y) = 3y^2 - 2y - x^2 = 0$$

In questo caso non si può ricavare razionalmente una variabile da nessuna delle due equazioni, quindi usiamo il risultante dei due polinomi F e G, omogeneizzati, rispetto alla variabile y, dato che C e D non passano per $(0 : 1 : 0)$.

$$R_y(F, G) = R(x, u) = \begin{vmatrix} 1 & -2u & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & -2u & x^2 \\ 3 & -2u & -x^2 & 0 \\ 0 & 3 & -2u & -x^2 \end{vmatrix} = 16x^2(x - u)(x + u).$$

Abbiamo ottenuto tutte le soluzioni possibili, $2 \cdot 2 = 4$, e precisamente:

$$(x : u) = \begin{cases} (0 : 1) & \text{molteplicità } 2, \\ (1 : 1) & \text{molteplicità } 1, \\ (-1 : 1) & \text{molteplicità } 1. \end{cases}$$

Poi determiniamo la coordinata y di queste soluzioni sostituendo in entrambi i polinomi e considerando le soluzioni comuni. Otteniamo i punti:

$$\begin{array}{ll} O \equiv (0 : 0 : 1) & \text{molteplicità d'intersezione } 2 \\ P \equiv (1 : 1 : 1) & \text{molteplicità d'intersezione } 1 \\ Q \equiv (-1 : 1 : 1) & \text{molteplicità d'intersezione } 1 \end{array}$$

Osservazione

(i) Vogliamo che il punto di proiezione Y_∞ (corrispondente alla variabile che abbiamo eliminato) sia t.c. $Y_\infty \notin C$.

(ii) O, P, Q non giacciono a 2 a 2 su una stessa retta passante per il punto di proiezione. Qui ci è andata bene, ma avremmo anche potuto scegliere come punto di proiezione X_∞, e in tal caso P e Q sarebbero stati su una stessa retta parallela all'asse delle x. In tal caso avremmo ottenuto due punti con la somma delle molteplicità pari a 2, e quindi ci saremmo ancora salvati, poichè ovviamente i due punti dovevano avere molteplicità di intersezione 1 ciascuno. Ma se la somma delle molteplicità fosse stata 3 o più, non avremo saputo *a priori* come distribuirla tra i punti.

(iii) Non sempre è necessario omogeneizzare. Se non lo avessimo fatto avremmo ricavato il polinomio non omogeneo

$$R_y(f, g) = 16x^2(x + 1)(x - 1),$$

ottenendo lo stesso risultato. In questo caso omogeneizzando non c'è dunque alcuna convenienza. Tuttavia in generale facendo il conto in coordinate non omogenee si possono perdere punti impropri comuni alle due curve. Nonostante questo possiamo comunque fare i conti senza omogeneizzare, vedere poi se mancano delle molteplicità rispetto al prodotto degli ordini delle curve ed andare ad investigare cosa succede sulla retta impropria.

(iv) Non sempre è necessario il risultante. Possiamo affidarci al seguente risultato.

Proposizione A.1 Se $A \in C \cap D$ allora $\nu_A(C, D) \geq \nu_A(C) \cdot \nu_A(D)$. L'uguaglianza vale sse nessuna tangente nel punto A a una delle curve è anche tangente in A all'altra.

Nel nostro caso potevamo giungere ai punti O, P, Q avendo una somma di molteplicità 4 da distribuire, e dedurre che l'unico punto a molteplicità di intersezione 2 è O, determinando ivi le tangenti alle due curve.

(v) Nelle nostre considerazioni usiamo il fatto che le due curve non hanno componenti comuni. In realtà questo viene automaticamente verificato nel calcolo del risultante. Se questo è nullo, bisogna estrarre le componenti irriducibili e considerarle singolarmente.

Esempio Consideriamo le due curve:

$$
\begin{aligned}
C &: f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + 4y^2 = 0 \\
C' &: g(x,y) = x^3 + 4y^2 = 0
\end{aligned}
$$

$Y_\infty \in C \cup D$, quindi non va bene come punto di proiezione. Invece $X_\infty \notin C \cup D$ va bene.

$$
R_x(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 2y & 2y^2 & 4y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2y & 2y^2 & 4y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2y & 2y^2 & 4y^2 \\ 1 & 0 & 0 & 4y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4y^2 \end{vmatrix} = 32y^7(y-4) = 0.
$$

Questo ci dice che abbiamo 8 punti d'intersezione al finito, e dunque $9 - 8 = 1$ all'infinito; in questo caso non sorgono problemi, perché una sola intersezione all'infinito non crea ambiguità: la molteplicità di intersezione deve essere 1 per forza. Consideriamo le radici del risultante. $y = 4$ conduce tranquillamente al punto $P \equiv (-4, 4)$, di molteplicità d'intersezione 1. Riguardo a $y = 0$, invece, possono accadere varie cose. Se abbiamo 1 solo punto oppure 7 punti distinti siamo fortunati, altrimenti dobbiamo ingegnarci; siccome tra l'altro qui non possiamo usare l'altro punto fondamentale all'infinito come punto di proiezione, dovremmo applicare un cambiamento di coordinate. Noi però stiamo facendo un esempio a bella posta, e in effetti qui si ha un solo punto: $O \equiv (0, 0)$ con molteplicità d'intersezione 7. Infine intersechiamo $f \cap g \cap l_\infty$ per ottenere Y_∞, che ha necessariamente molteplicità d'intersezione 1.

Esempio Consideriamo le curve:

$$
\begin{aligned}
C &: f(x,y) = x^3 - y^2 = 0 \\
D_\lambda &: g_\lambda(x,y) = x^4 - y^2 + \lambda y = 0
\end{aligned}
$$

Determinare $\nu_O(C, D_\lambda)$ al variare di λ.

Visto che non ci interessa la molteplicità d'intersezione in tutti i punti, ma solo in O, possiamo senza dubbio permetterci di non omogeneizzare i polinomi. Proviamo ad eliminare la variabile x, otteniamo:

$$
R_x(f, g_\lambda) = R(y) = y^3(\lambda^3 - 3\lambda^2 y + 3\lambda y^2 - y^3 + y^5) = 0.
$$

Ora, la molteplicità d'intersezione in O delle due curve è la molteplicità di 0 come soluzione di $R(y) = 0$, che è ovviamente 3 per $\lambda \neq 0$, 6 per $\lambda = 0$. Questo però è vero solo se lungo $y = 0$ le due curve hanno un solo punto d'intersezione; e qui è vero:

$$
y = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0.
$$

Altrimenti avremmo dovuto cambiare punto di proiezione (che nel nostro caso era X_∞); qui tra l'altro il fatto che $Y_\infty \in C \cap D_\lambda$ non significa che non possiamo usare Y_∞, perché tanto non ci interessa se perdiamo informazioni sui punti all'infinito.

Esercizio A.1.6 Rifare l'esercizio precedente, eliminando la variabile y, ossia proiettando da Y_∞.

A.1.9 Studio di un curva

Si tratta di determinare il massimo possibile delle seguenti informazioni.

(i) Riducibilità e irriducibilità; in caso di curve non ridotte o riducibili determinare le componenti e la loro molteplicità.

(ii) Intersezioni con il triangolo fondamentale (cioè i tre assi); in particolare molteplicità e tangenti in X_∞, Y_∞, O.

(iii) Delimitare le regioni del piano in cui giace la curva (condizioni di realtà).

(iv) Eventuali simmetrie.

(v) Punti singolari e loro tipo.

(vi) Coniche, cubiche, ec. osculatrici in particolari punti (tipicamente per i punti doppi).

(vii) Punti a tangente orizzontale e verticale.

(viii) Flessi e tangenti di flesso.

(ix) Razionalità di una curva e, per curve razionali, determinazione di una parametrizzazione razionale.

Esempio Sia C di equazione $f(x,y) = x^2y^2 - x - 1 = 0$, il polinomio che individua la sua chiusura proiettiva risulta: $F = x^2y^2 - xu^3 - u^4 = 0$. È una quartica simmetrica rispetto all'asse delle x. Tramite il metodo del delta (o più facilmente esplicitando y^2) si può verificare che è irriducibile ridotta. $O \notin C$, mentre $X_\infty, Y_\infty \in C$ sono punti doppi. In X_∞ abbiamo la tangente doppia $y^2 = 0$; intersecando questa con la curva otteniamo il punto $P \equiv (-1 : 0 : 1)$, con molteplicità di intersezione 1 e X_∞, con molteplicità di intersezione 3. Quindi $\nu_{X_\infty}(C, y = 0) = 3$, e X_∞ è una cuspide di I specie. In Y_∞ abbiamo la tangente doppia $x^2 = 0$; intersecandola con la curva otteniamo solo Y_∞, con molteplicità di intersezione $4 > 3$. Consideriamo le coniche osculatrici del tipo $\Pi_\lambda :\ yx = \lambda u^2$. Deomogeneizziamo rispetto alla y ed otteniamo questo sistema:

$$\begin{cases} f(x,u) = x^2 - xu^3 - u^4 = 0 \\ x = \lambda u^2 \end{cases} \Rightarrow (\lambda^2 - 1)u^4 - \lambda u^5 = 0$$

$$\nu_{Y_\infty}(C, \Pi_\lambda) \geq 5 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Abbiamo trovato due coniche osculatrici reali distinte, quindi Y_∞ è un tacnodo. Nel piano affine euclideo le due coniche osculatrici sono: $xy = 1$ ed $xy = -1$

Passando allo studio dei punti singolari, possiamo dire che questi sono solo X_∞ e Y_∞ usando la formula dei punti doppi:

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} \geq \sum_j j \cdot \#\binom{\text{punti doppi}}{\text{di specie } j}.$$

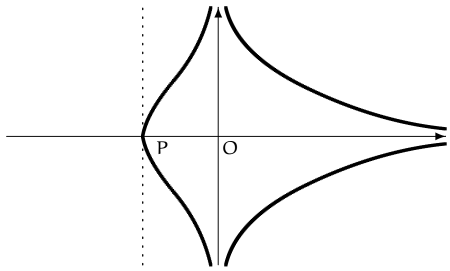
In questo caso $d = 4$, e abbiamo già $3 \geq 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$, quindi non ci possono essere altri punti singolari. Alternativamente si può considerare il solito sistema di annullamento delle derivate nell'ambito affine, che in questo caso risulta incompatibile manifestando l'inesistenza di singolarità al finito.

Possiamo anche dire che P è a tangente verticale, in quanto P è semplice e la curva è simmetrica rispetto all'asse delle x. Per quanto riguarda le intersezioni con gli assi, invece, i conti mostrano facilmente che le conosciamo già tutte.

Possiamo ottenere limitazioni reali sia rispetto a x sia rispetto a y.

$$\Delta_x = 1 + 4y^2 \geq 0 \quad \forall y$$
$$\Delta_y = x^2(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

In particolare questo ci permette di escludere che la cuspide provenga dalla regione di piano $x < 0$. Il grafico qualitativo risulta pertanto:



Parliamo ora di razionalità. Tramite la formula per il calcolo del genere scopriamo che $g(C) = 0$, quindi C è razionale. Vogliamo trovare una parametrizzazione. In situazioni come questa possiamo considerare le coniche passanti per i due punti doppi X_∞, Y_∞, di natura cuspidale, in modo che esse siano tangenti alle due tangenti cuspidali: $y = 0$ e $x = 0$. Prendiamo due coniche che soddisfano a queste condizioni e con queste generiamo il fascio. Da $xy = 0$ e $u^2 = 0$ otteniamo la famiglia $xy + \lambda u^2 = 0$, ovvero, nel piano affine:

$$Q_\lambda : \; xy - \lambda = 0.$$

Intersecando $Q_\lambda \cap C$ abbiamo naturalmente 8 punti, di cui 7 sono fissati: 4 nel tacnodo e 3 nella cuspide. L'unico punto d'intersezione variabile dà la parametrizzazione razionale.

$$\begin{cases} f = 0 \\ xy + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 - x - 1 = 0 \\ y = -\frac{\lambda}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda^2 - 1 \\ y = \frac{1}{1-\lambda^2} \end{cases}$$

A.2 Curve differenziabili

Per gli esercizi relativi a questa parte si consulti la tesi del dott Molteni.

A.3 Superfici differenziabili

A.3.1 Esempi di superfici

Ricordiamo che per definizione unfoglio semplice di superficie è un'applicazione, definita in un aperto U del piano $\mathbb{R}^2$, omeomorfo (cioè in corrispondenza biunivoca e bicontinua) ad un disco aperto del piano,

$$\begin{aligned} \underline{P} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \underline{P}(u, v) \end{aligned}$$

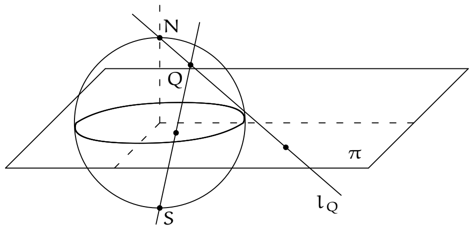
che soddisfa le condizioni:

(i) $\underline{P}$ sufficientemente regolare;

(ii) $\underline{P}$ iniettiva;

(iii) $\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v \neq \underline{0} \quad \forall (u, v) \in U$.

Esempio Vogliamo dare la *proiezione stereografica polare* di una sfera di raggio unitario centrata nell'origine.



Consideriamo

$$\begin{aligned} P_N : S^2 \setminus \{N\} &\to \pi \\ Q &\mapsto l_Q \cap \pi \end{aligned}$$

in un sistema di coordinate t.c. $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $N \equiv (0, 0, 1)$, $\pi \equiv z = 0$. Vediamo qual è l'applicazione in questo sistema in carne ed ossa.

$$\begin{aligned} p_N : S^2 \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^2 \\ Q = (\xi, \eta, \zeta) &\mapsto (?, ?) \end{aligned}$$

Non dobbiamo far altro che risolvere un sistema:

$$l_Q \equiv N + t(Q - N)$$

$$l_Q \cap \pi \equiv \begin{cases} x = t\xi \\ y = t\eta \\ z = 1 + t(\xi - 1) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$p_N(Q) = \left(\frac{\xi}{1 - \zeta}, \frac{\eta}{1 - \zeta} \right)$$

Questa è in pratica la proiezione stereografica polare, ma non è quello che vogliamo per un foglio di superficie differenziabile, bensì la sua inversa:

$$\begin{aligned} f_N = p_N^{-1} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Questa mi dà la sfera come foglio semplice di superficie differenziabile. Perché? Dobbiamo verificare tre cose:

1) è regolare (ovvio, sono funzioni razionali definite su tutto $\mathbb{R}^2$);

2) è iniettiva (lo è per come l'abbiamo costruita, per ragioni geometriche, tant'è vero che abbiamo potuto invertirla);

3) $\frac{\partial f_N}{\partial x} \wedge \frac{\partial f_N}{\partial y} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (verificarlo per esercizio).

Osservazione Non riusciamo a ricoprire tutta la sfera: $f_N(\mathbb{R}^2) = S^2 \setminus \{N\}$. Ma non è colpa nostra: al momento non abbiamo gli strumenti per dimostrarlo, ma in Geometria IV si vedrà che non esiste un'applicazione biunivoca e bicontinua che ricopre la sfera con un aperto omeomorfo ad un disco aperto di $\mathbb{R}^2$. Non essendo in grado di ricoprirla con una sola carta, possiamo però farlo con due carte: i punti che non sono ricoperti da una saranno ricoperti dall'altra.[3]

Si verifica che la proiezione dal polo sud è data da

$$\begin{aligned} p_S : S^2 \setminus \{S\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \end{aligned}$$

la cui inversa è

$$\begin{aligned} f_S = p_S^{-1} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{-x^2-y^2+1}{x^2+y^2+1} \right) \end{aligned}$$

Effettuiamo ora un cosiddetto *cambio di variabili* (o *cambio di carte, che fa passare da un foglio ad un altro equivalente*):

$$\begin{aligned} \varphi = f_S^{-1} \circ f_N = p_S \circ f_N : f_N(S^2 \setminus \{N, S\}) &\to f_S^{-1}(S^2 \setminus \{N, S\}) \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (x, y) &\mapsto (\varphi_1, \varphi_2) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

Come ci aspettavamo, la funzione così ottenuta è di classe C^∞. Risulta

$$J(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} < 0$$

sempre, e questo fatto ha un suo significato geometrico: se questo determinante fosse stato positivo φ avrebbe mantenuto l'orientazione, mentre in questo caso possiamo dire che l'applicazione inverte l'orientazione. In un piano possiamo infatti scegliere un verso positivo dell'orientazione (che non esiste *a priori*), e una volta sceltolo dire se l'applicazione conserva oppure inverte l'orientazione del dominio che stiamo considerando. Nel caso della nostra φ, ciò significa che se prendiamo i punti di una piccola circonferenza con verso fissato sul piano π, li trasferiamo usando f_N e li proiettiamo poi tramite p_S quello che otteniamo su π è una circonferenza con verso invertito rispetto a quello iniziale. Pertanto la superficie che consideriamo non risulta orientabile. Ma la sfera è orientabile: qual è dunque il problema? Dobbiamo scegliere due funzioni diverse, in modo che lo jacobiano sia positivo.

Esercizio A.3.1 Si utilizzi $\widetilde{\varphi} = p_N \circ \widetilde{f}_S$, dove $\widetilde{f}_S = \widetilde{p}_S^{-1}$ e

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_S : S^2 \setminus \{S\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{-y}{1+z} \right). \end{aligned}$$

[3] Questo è un primo esempio di come si procede in Geometria Differenziale per studiare una superficie: in generale non basterà una carta, quindi se ne utilizzerà un certo numero badando che si "incollino" bene.

A.3.2 Superfici rigate

Partiamo da una curva $C \equiv \underline{Q}(u)$, $\underline{Q} : I \to \mathbb{R}^3$, e da un campo vettoriale $\underline{L} : I \to \mathbb{R}^3$; la rigata che passa per $\underline{Q}(u)$ e ha la direzione del vettore $\underline{L}(u)$ (di solito si suppone che $\underline{L}(u)$ sia un versore) non è altro che

$$\underline{P}(u, v) = \underline{Q}(u) + v\underline{L}(u).$$

Le condizioni affinché questo sia un foglio semplice di superficie sono:

1) $\underline{P}$ è di classe almeno C^1 su $I \times \mathbb{R}^2$, dove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$;

2) $\underline{P}$ è iniettiva;

3) $\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v \neq \underline{0} \;\Leftrightarrow\; (\dot{\underline{Q}} + v\dot{\underline{L}}) \wedge \underline{L} \neq \underline{0}$.

Esempio (elicoide) Data un'elica circolare $\underline{E} = \underline{E}(t)$, otteniamo un elicoide da[4]. Sia π un qualunque piano perpendicolare all'asse dell'elica.

$$\bigcup\{\text{retta per } \underline{E} \text{ e per l'asse di } \underline{E} \text{ perpendicolare all'asse di } \underline{E}\}.$$

Troviamo la funzione che esplicitamente descrive un elicoide.

$$\underline{E} \equiv \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad \pi = \{z = w\} \Rightarrow w = bt \Rightarrow t = \frac{w}{b}$$

$$\pi \cap \underline{E} = \left(a\cos\frac{w}{b}, a\sin\frac{w}{b}, w\right)$$

Vogliamo la retta che congiunge questo punto con $(0, 0, w)$.

$$r_w \equiv \begin{cases} x = au\cos\frac{w}{b} \\ y = au\sin\frac{w}{b} \\ z = w \end{cases}$$

Per ottenere un'espressione più semplice ci basta cambiare parametro:

$$v = \frac{w}{b} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x = au\cos v \\ y = au\sin v \\ z = bv \end{cases}$$

Esercizio A.3.2 Mostrare che vale sempre $\|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\| = |a|\sqrt{b^2 + a^2u^2} \neq 0$ ($a > 0$ sempre).

Esercizio A.3.3 Determinare il campo vettoriale $\underline{L}$, che per ogni punto dell'elicoide fornisce il vettore che lo congiunge all'asse z.

A.3.3 Superfici di rotazione

Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Data una curva semplice fortemente regolare nel piano xz

$$C \equiv \begin{cases} x = \varphi(v) \\ z = \psi(v) \end{cases} \qquad v \in I$$

[4] Volendo, un elicoide è la superficie descritta dalla pala di un elicottero che ascende con velocità costante.

il foglio semplice di superficie di rotazione S di C intorno all'asse z avrà equazioni

$$S \equiv \begin{cases} x = \varphi(v)\cos u \\ y = \varphi(v)\sin u \\ z = \psi(v) \end{cases} \qquad (u,v) \in (0,2\pi) \times I$$

Se $\varphi(v) > 0$ e C è fortemente regolare e iniettiva allora questo è un foglio semplice. Naturalmente possiamo sostituire $(0,2\pi)$ con qualsiasi intervallo aperto di ampiezza 2π.

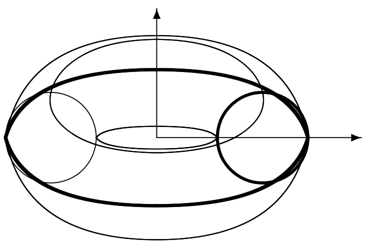
Esempio (toro) Il *toro* è la superficie generata dalla rotazione di una circonferenza intorno a una retta complanare ed esterna. Consideriamo la circonferenza del piano xz con centro sull'asse delle x:

$$C \equiv \begin{cases} x = b + a\cos v & 0 < a < b \\ z = a\sin v & v \in (0,2\pi) \end{cases}$$

In base a quanto detto otteniamo un foglio semplice che avrà equazioni

$$T \equiv \begin{cases} x = (b + a\cos v)\cos u \\ y = (b + a\cos v)\sin u \\ z = a\sin v \end{cases} \qquad I \times J = (0,2\pi) \times (0,2\pi)$$

Copriamo così tutto il toro meno due circonferenze:



Potremmo anche usare l'insieme di definizione $I \times J = \mathbb{R}^2$, ma otterremmo tutto il toro ricoperto infinite volte e il rivestimento non sarebbe più un foglio semplice.

Procediamo a calcolare I e II forma fondamentale. Per far questo dobbiamo calcolare le derivate.

$$\begin{aligned} \underline{P}_u &= \big(-(b + a\cos v)\sin u, \quad (b + a\cos v)\cos u, \quad 0\big) \\ \underline{P}_v &= \big(-a\cos u \sin v, \quad -a\sin u \sin v, \quad a\cos v\big) \\ \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v &= a(b + a\cos v)\big(\cos u\cos v, \quad \sin u \cos v, \quad \sin v\big) \\ \|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\| &= a(b + a\cos v) \neq 0 \quad \forall u, v \end{aligned}$$

in quanto $b > a > 0$. In definitiva,

$$\underline{N} = \frac{\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v}{\|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\|} = \big(\cos u\cos v, \quad \sin u\cos v, \quad \sin v\big)$$

$$G = \begin{bmatrix} \underline{P}_u \cdot \underline{P}_u & \underline{P}_u \cdot \underline{P}_v \\ \underline{P}_v \cdot \underline{P}_u & \underline{P}_v \cdot \underline{P}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (b + a\cos v)^2 \end{bmatrix}.$$

Calcolando poi le derivate seconde e facendo i conti giungiamo a

$$B = \begin{bmatrix} -(b + a\cos v)\cos v & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}.$$

Il carattere dei punti della superficie è dato dal segno del determinante di B:

$$\det B = \underbrace{a(b + a\cos\nu)}_{>0}\cos\nu$$
$$\operatorname{sgn}(\det B) = \operatorname{sgn}(\cos\nu) \gtreqless 0$$

Pertanto la parte esterno del toro $\left(0 < \nu < \frac{\pi}{2},\, 3\frac{\pi}{2} < \nu < 2\pi\right)$ è costituita da punti ellittici, la parte interna $\left(\frac{\pi}{2} < \nu < 3\frac{\pi}{2}\right)$ da punti iperbolici e le due circonferenze sopra e sotto $\left(\nu = \frac{\pi}{2},\, \nu = 3\frac{\pi}{2}\right)$ da punti parabolici. Questo conferma quanto già sapevamo: quando facciamo ruotare una curva, la parte convessa rispetto all'asse di rotazione darà punti ellittici, la parte concava darà punti iperbolici e i punti di flesso, i massimi, i minimi per il grafico di C daranno punti parabolici.

A.3.4 Lossodromiche sulla sfera

Per *lossodromiche* intendiamo le curve L sulla sfera che tagliano i paralleli secondo un angolo costante. In questo modo, seguendo una tale curva, idealmente si va sicuramente a sbattere al polo.[5] Vogliamo l'espressione esplicita delle L. Sia S la nostra sfera di raggio $a > 0$, siano P i paralleli e chiediamo $\cos\widehat{LP} = \cos\alpha$ costante. Vediamo $\underline{S} = \underline{S}(\vartheta, \varphi)$ come superficie di rotazione:

$$S \equiv \begin{cases} x = a\cos\vartheta\cos\varphi \\ y = a\cos\vartheta\sin\varphi \\ z = a\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \varphi \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$

Possiamo però ignorare l'iniettività e considerare tranquillamente $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$G = \begin{bmatrix} \underline{S}_\vartheta \cdot \underline{S}_\vartheta & \underline{S}_\vartheta \cdot \underline{S}_\varphi \\ \underline{S}_\varphi \cdot \underline{S}_\vartheta & \underline{S}_\varphi \cdot \underline{S}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\vartheta \end{bmatrix}$$

Consideriamo le linee coordinate nell'aperto dei parametri

$$\underline{P} = \underline{P}(\vartheta, \varphi) \equiv \begin{cases} \vartheta = \text{costante} \\ \varphi = t \quad \text{parametro} \end{cases}$$

e quindi $\underline{\dot{P}} = (0, 1)$. Teniamo per incognite $\underline{L} = (\eta_1(t), \eta_2(t))$, $\underline{\dot{L}} = (\dot\eta_1, \dot\eta_2)$.

$$\cos\alpha = \frac{\underline{\dot{L}} \cdot \underline{\dot{P}}}{\left\|\underline{\dot{L}}\right\|\left\|\underline{\dot{P}}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}\dot\eta_1 & \dot\eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\vartheta \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}{\sqrt{\underline{\dot{L}}_T G \underline{\dot{L}}}\sqrt{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} G \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}}$$
$$= \frac{a^2\cos^2\vartheta\,\dot\eta_2}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta}\sqrt{a^2\dot\eta_1^2 + a^2\eta_2^2\cos^2\vartheta}}$$

[5] Se non si sbatte prima contro gli scogli!

E, tenendo conto che $\cos\vartheta > 0$, giungiamo a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\vartheta\left(\frac{\dot\eta_2}{\dot\eta_1}\right)^2\left(\cos^2\alpha - 1\right) = 0.$$

$$(\eta_1(t), \eta_2(t)) = \underline{L} = (\vartheta(t), \varphi(t))$$

$$(\dot\eta_1, \dot\eta_2) = \left(\frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}\right) \qquad \frac{\dot\eta_2}{\dot\eta_1} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\vartheta}{dt}} = \varphi'(\vartheta)$$

$$\cos^2\alpha - \cos^2\vartheta(\varphi')^2\sin^2\alpha = 0$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria, che risolviamo rispetto a φ'.

$$(\varphi')^2 = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos^2\vartheta} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\vartheta},$$

da cui:

$$\varphi = \pm\int\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\vartheta}\,d\vartheta = \pm\operatorname{ctg}\alpha\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right)\right| + c.$$

Esercizio A.3.4 E se fossimo interessati al tempo necessario per la navigazione? Calcolare la lunghezza della curva usando la formula per la lunghezza di un grafico, $\int\sqrt{1 + (\dot\varphi)^2}\,d\vartheta$.

Appendice B

Temi d'esame svolti

Tema d'esame (Prova di esonero – novembre 2004)

1) Sia C di equazione $f(x,y) = 2y^4 - 2x^2y^2 - 3xy^2 + x^2 = 0$.

a) Si provi che C è irriducibile e ridotta.

C è irriducibile e ridotta $\Leftrightarrow$ f è irriducibile. Non abbiamo scelta: dobbiamo usare il metodo del delta per la variabile x. Vediamo che

$$\Delta = y^4(1 + 16y^2)$$

non è un quadrato perfetto, e che i coefficienti del polinomio in x

$$1 - 2y^2, \qquad 3y^2, \qquad 2y^4$$

non hanno fattori comuni. Pertanto f è irriducibile.

b) Si determinino e si studino i punti singolari di C.

Prima cerchiamo quelli facili da trovare. Vediamo che O è punto doppio, e che presenta una tangente doppia $x^2 = 0$, quindi è punto di tipo cuspidale.

$$\begin{cases} f = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y^4 = 0$$

quindi $\nu_O(C, \mathrm{tg}_O) = 4 > 3$. Passiamo alle parabole osculatrici $\Pi_\lambda \equiv x = \lambda y^2$.

$$\begin{cases} f = 0 \\ x = \lambda y^2 \end{cases} \Rightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y^4 - 2\lambda^2 y^6 = 0$$

quindi $\nu_O(C, \Pi_\lambda) > 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, 2$. Abbiamo due parabole osculatrici reali distinte $y = x^2$, $y = 2x^2$, quindi O è un tacnodo.

Vediamo anche che X_∞ è punto doppio, perché $m(X_\infty) = \deg f - \deg_x f = 4 - 2 = 2$. Il complesso delle tangenti è qui dato dal coefficiente di x alla potenza massima:

$$1 - 2y^2 = (1 - \sqrt{2}y)(1 + \sqrt{2}y),$$

quindi X_∞ è un nodo reale. Per vedere se si tratta di tangenti di flesso intersechiamone una con la curva:

$$\begin{cases} f = 0 \\ \sqrt{2}y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3},$$

che per la simmetria di C rispetto all'asse delle x ci conduce ai punti $A_1 \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $A_2 \equiv \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La molteplicità di intersezione degli asintoti con C in X_∞ è pertanto 3, dunque non si tratta di tangenti di flesso.

Per la formula dei punti doppi non ce ne possono essere altri.

c) Si determinino i punti impropri di C e i relativi asintoti.

All'infinito abbiamo

$$2y^4 - 2x^2y^2 = 2y^2(y^2 - x^2) = 0,$$

che presenta le tre soluzioni $y = 0$ e $y = \pm x$, corrispondenti ai punti $X_\infty \equiv (1:0:0)$, $P_\infty \equiv (1:1:0)$, $P'_\infty \equiv (1:-1:0)$. Per ottenere le rette tangenti possiamo o usare la consueta formula del calcolo differenziale oppure intersecare con la generica retta per il punto in questione. Per P_∞ abbiamo

$$\begin{cases} y = x + k \\ f = 0 \end{cases} \Rightarrow f(y-k, y) = (4k-3)y^3 + (-2k^2+3k+1)y^2 - 2ky + k^2 = 0,$$

e poiché vogliamo che la molteplicità d'intersezione all'infinito sia almeno 2 chiediamo $4k - 3 = 0$, i.e. $k = \frac{3}{4}$. Quindi la tangente in P_∞ è $y = x + \frac{3}{4}$. È un asintoto ordinario o di flesso? Sostituendo $k = \frac{3}{4}$ nella risolvente, da

$$34y^2 - 24y + 9 = 0$$

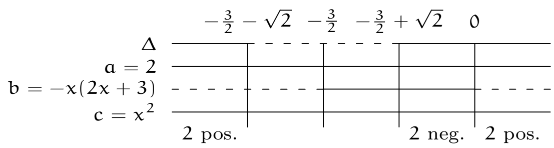
inferiamo due intersezioni al finito, quindi la molteplicità di intersezione tra l'asintoto e la C in P_∞ è 2 e quindi non si tratta di una tangente di flesso. Vediamo inoltre che queste intersezioni sono punti a coordinate complesse coniugate. Per la simmetria avremo poi un asintoto analogo in P'_∞, $y = -x - \frac{3}{4}$.

d) Si completi lo studio di C e se ne tracci un grafico qualitativo.

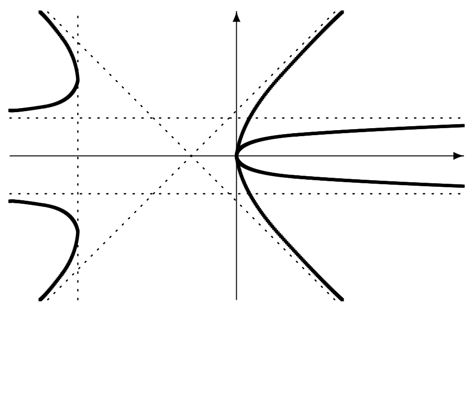
Limitazioni reali. Abbiamo già calcolato Δ, e possiamo ora vedere che è non-negativo per ogni y, quindi rispetto alla y non abbiamo limitazioni. Considerando invece f come biquadratica in y, ponendo $w = y^2$ dobbiamo richiedere

$$\Delta' = x^2(4x^2 + 12x + 1) \geq 0,$$

condizione verificantesi per $-\frac{3}{2} - \sqrt{2} \leq x \leq -\frac{3}{2} + \sqrt{2}$. Utilizziamo poi il metodo di Cartesio.



In conclusione la curva è limitata da $x \leq -\frac{3}{2} - \sqrt{2} \vee x \geq 0$. Facendo i conti per i punti a tangenza verticale si trovano tra l'altro proprio questi valori estremi di x.



e) Si fornisca una rappresentazione parametrica razionale per C.

Calcolando il genere si trova che C è razionale. Per trovare una parametrizzazione è sufficiente costruire il fascio di coniche per i due punti singolari della curva e avente nel tacnodo l'unica tangente e nel nodo una delle due tangenti. Il punto d'intersezione variabile tra la generica conica del fascio e la curva parametrizzerà quest'ultima.

2) Trovare le intersezioni delle curve:

$$\Gamma \equiv x^2y^2 + (x^2-2)^2 - 4y^2 = 0$$
$$\Delta \equiv x^2 + 2y^2 - 2 = 0$$

Si tratta dell'intersezione di una quartica e una quadrica, quindi se queste non hanno componenti comuni vi sono 8 intersezioni. Il modo migliore di procedere è probabilmente usare il risultante. Vediamo che $Y_\infty \in \Gamma$, ma $Y_\infty \notin \Gamma \cap \Delta$, quindi non ci sono problemi.

$$R_y(f,g) = \begin{vmatrix} x^2-4 & 0(x^2-2)^2 & 0 & \\ 0 & x^2-4 & 0(x^2-2)^2 & \\ 2 & 0 & x^2-2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & x^2-2 \end{vmatrix} = x^4(x^2-2)^2.$$

Ci è andata bene col risultante non omogeneo: abbiamo grado 8, quindi non dobbiamo fare ulteriori studi per i punti all'infinito. Le radici del risultante sono $x = 0$ con molteplicità 4 e $x = \pm\sqrt{2}$ con molteplicità 2. Sostituendo nelle equazioni delle due curve $x = 0$ otteniamo $y = \pm 1$, quindi abbiamo i due punti d'intersezione

$$\begin{array}{ll} A_1 \equiv (0,1) & \text{con molteplicità } m_1 \\ A_2 \equiv (0,-1) & \text{con molteplicità } m_2 \end{array}$$

tali che $m_1 + m_2 = 4$. Qui l'uso del risultante fallisce, e dobbiamo usare qualcos'altro: o applicare un cambiamento di coordinate (che è però molto dispendioso) oppure fare altre considerazioni. In questo caso notiamo che le due curve in y presentano solo termini di grado pari, quindi sono simmetriche rispetto all'asse delle x; da tale simmetria deduciamo $m_1 = m_2 \Rightarrow m_1 = m_2 = 2$. Per quanto riguarda invece le radici $x = \pm\sqrt{2}$ otteniamo banalmente $y = 0$, che porta ai due punti $B_1 \equiv (\sqrt{2}, 0)$ e $B_2 \equiv (-\sqrt{2}, 0)$ ciascuno con molteplicità 2.

Esercizio B.1.1 Ripetere lo studio usando R_x invece di R_y.

Tema d'esame (Prova di esonero – novembre 2002)

1) Sia Γ di equazione $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 2xy^3 + y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3 = 0$.

a) Γ è ridotta e $\Gamma = C \cup l$, con l retta. (*Suggerimento:* studiare $O \in \Gamma$.)

$O \in \Gamma$ è un punto triplo, perché i monomi di grado minimo sono di III grado. Le tangenti nell'origine sono dunque date dal complesso dei termini di III grado:

$$y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3 = (y-x)^3 = 0,$$

cioè $y = x$ è tangente tripla. Per il suggerimento, $l \equiv y = x$ è probabilmente retta componente. Verifichiamolo. l è retta componente $\Leftrightarrow l \mid f$, perciò eseguiamo la divisione considerando $l, f \in \mathbb{C}[x][y]$ ottenendo

$$f(x,y) = \underbrace{(y-x)}_{l}\underbrace{x^2y^2 + 2xy(x+y) + (y-x)^2}_{C \equiv g(x,y)}.$$

Alternativamente possiamo vedere se $\exists l \equiv y = kx : O \in l \subseteq \Gamma$:

$$l \subseteq \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \exists k : f(x, kx) \equiv 0$$
$$f(x, kx) = k^2(k-1)x^5 - 2k(k-1)(k+1)x^4 + (k-1)^3x^3 \equiv 0$$
$$\begin{cases} k^2(k-1) = 0 \\ k(k-1)(k+1) = 0 \qquad \Rightarrow \quad k = 1. \\ (k-1)^3 = 0 \end{cases}$$

Notiamo inoltre che $f(y, x) = -f(x, y)$, ovvero Γ è simmetrica rispetto a $y = x$. Dunque se il suggerimento dice che una retta per l'origine appartiene a Γ allora probabilmente si tratterà dell'asse di simmetria.

b) Si determinino e si studino i punti singolari di C.

$O \in C$ è punto doppio con tangente doppia $(y-x)^2 = 0$, quindi è punto di natura cuspidale; posponiamo ulteriori indagini, che risulteranno inutili. Risulta infatti che X_∞ è punto doppio con tangente $(y+1)^2 = 0$, e Y_∞ è punto doppio con tangente $(x+1)^2 = 0$. Possiamo ora usare la formula dei punti doppi, inferendo che l'unica possibilità è che tutti e tre i punti siano cuspidi di I specie. Un momento però, perché questo ragionamento vale se C è irriducibile e ridotta. Provare ciò è una semplice applicazione del metodo del Δ.

c) Si determinino i punti impropri di C e i relativi asintoti.

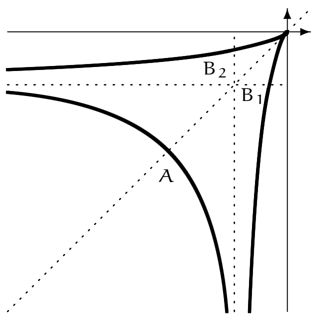
Essendo C di ordine 4, con X_∞ e Y_∞ appartenenti a C e doppi abbiamo già trovato tutti i punti impropri di C. Abbiamo già trovato anche gli asintoti: $x = -1$ e $y = -1$. Per ambientarci meglio possiamo determinare le intersezioni di C con i suoi asintoti al finito. Da

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

otteniamo $B_2 \equiv \left(-1, -\frac{1}{4}\right)$; per simmetria allora anche $B_1 \equiv \left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ deve essere punto di C.

d) Si completi lo studio di C e se ne tracci un grafico qualitativo.

Per ottenere delle limitazioni reali notiamo che $g(x, y)$ è quadratica in x e in y. Affinché $\Delta_x = -4y^3 \geq 0$, deve essere $y \leq 0$, sicché la curva è tutta contenuta nel semipiano $y \leq 0$ e per simmetria in $x \leq 0$. Ci è infine comodo calcolare il punto d'intersezione tra l e C, che risulta essere $A \equiv (-4, -4)$.



e) Si fornisca una rappresentazione parametrica razionale per C.

Avendo C tre punti doppi, possiamo considerare e.g. il fascio delle coniche C_λ passanti per i punti O, X_∞, Y_∞, A. Costruiamolo adoperando due coniche banali del fascio:

$$\langle X_\infty O\rangle\langle Y_\infty A\rangle + \lambda\langle X_\infty Y_\infty\rangle\langle OA\rangle \equiv y(x+4) + \lambda(u)(x-y) = 0.$$

Intersecando questo fascio con C si ottengono 7 punti d'intersezione fissi (di cui 3 al finito) e uno variabile, che ci darà la parametrizzazione cercata. Tuttavia i conti sono complicati. Avremmo potuto fare una scelta migliore per la famiglia di coniche: ad esempio il fascio per O, X_∞, Y_∞ avente in O tangente $y = x$. Anche qui vi saranno 7 intersezioni fisse e una variabile, ma i conti risulteranno più semplici.

2) Trovare le intersezioni con relative molteplicità delle curve:

$$C \equiv y^4 - x^2 - 5y^2 + 4 = 0$$
$$D \equiv x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

Possiamo operare in due modi: o ricavando e sostituendo oppure usando il risultante. In questo caso è particolarmente facile risolvere rispetto a $x^2 = 4 - 4y^2$; sostituendo in C otteniamo dunque

$$y^4 - y^2 = y^2(y-1)(y+1) = 0.$$

Questo ci fornisce le quattro soluzioni $y = 0$ (molteplicità 2) e $y = \pm 1$ (molteplicità 1). Dati però gli ordini delle due curve, ci aspettiamo $4 \cdot 2 = 8$ soluzioni. L'inghippo sta nel fatto che ci sono in realtà due soluzioni per ciascuna di queste, perché nel nostro procedimento abbiamo ricavato e sostituito x alla seconda potenza.

$$y = 0 \rightsquigarrow x^2 = 4 \rightsquigarrow \begin{cases} (2,0) & \text{m}\,2 \\ (-2,0) & \text{m}\,2 \end{cases}$$
$$y = \pm 1 \rightsquigarrow x^2 = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} (0,1) & \text{m}\,2 \\ (0,-1) & \text{m}\,2 \end{cases}$$

Questo è il metodo più rapido, ma avremmo anche potuto calcolare il risultante (necessariamente rispetto a y), ottenendo

$$R(f,g) = x^4(x+2)^2(x-2)^2.$$

Qui otteniamo direttamente tutte le 8 soluzioni: $x = 0$ con molteplicità 4 e $x = \pm 2$ ciascuna con molteplicità 2. Purtroppo però da $x = 0$ discende $y = \pm 1$, e dobbiamo trovare uno stratagemma per ripartire tra i punti $A_1 \equiv (0,1)$ e $A_2 \equiv (0,-1)$ le giuste molteplicità. Notiamo però che le due curve sono entrambe simmetriche rispetto all'asse delle x, quindi $\mathrm{m}(A_1) = \mathrm{m}(A_2) = 2$.

Tema d'esame (febbraio 2000) Sia $\underline{P}$ l'applicazione:

$$\underline{P} : A = (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \mapsto (uv^2, v^3, u^2 v)$$

a) Mostrare che $\underline{P}$ è un foglio semplice di superficie S.

Questo significa mostrare due cose: l'iniettività e la regolarità, dato che l'insieme di definizione è $(\mathbb{R}^+)^2$ e $\underline{P}$ è analitica.

(i) $\underline{P}$ è iniettiva sse $\underline{P}(u,v) = \underline{P}(a,b) \Rightarrow (u,v) = (a,b)$. Quindi il seguente sistema deve avere l'unica soluzione $(u,v) = (a,b)$:

$$\begin{cases} uv^2 = ab^2 \\ v^3 = b^3 \\ u^2 v = a^2 b \end{cases}$$

Dalla seconda equazione deduciamo $v = b$, quindi usando il fatto che $v = b \neq 0$ possiamo semplificare la prima equazione ottenendo $u = a$.

(ii) Dobbiamo verificare che $\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v \neq \underline{0}$ $\forall u, v$.

$$P_u = \begin{pmatrix} v^2, & 0, & 2uv \end{pmatrix}$$
$$P_v = \begin{pmatrix} 2uv, & 3v^2, & u^2 \end{pmatrix}$$

Naturalmente vale

$$\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v \neq \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rk} \begin{bmatrix} v^2 & 0 & 2uv \\ 2uv & 3v^2 & u^2 \end{bmatrix} = 2,$$

e considerando la sottomatrice 2×2 di sinistra A' notiamo che tale condizione è verificata $\forall (u, v)$, perché $\det A' = 3v^4$ e $v \neq 0$.

b) Determinare la natura dei punti.

Dobbiamo analizzare il segno di $\det B$. Facciamo i conti.

$$\begin{aligned}
\underline{N} &= \frac{\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v}{\|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2v^2 + u^4 + v^4}} \begin{pmatrix} -2uv, & u^2, & v^2 \end{pmatrix} \\
\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v &= 3v^2 \begin{pmatrix} -2uv, & u^2, & v^2 \end{pmatrix} \\
\underline{P}_{uu} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & 2v \end{pmatrix} \\
\underline{P}_{uv} &= \begin{pmatrix} 2v, & 0, & 2u \end{pmatrix} = \underline{P}_{vu} \\
\underline{P}_{vv} &= \begin{pmatrix} 2u, & 6v, & 0 \end{pmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} \underline{N} \cdot \underline{P}_{uu} & \underline{N} \cdot \underline{P}_{uv} \\ \underline{N} \cdot \underline{P}_{vu} & \underline{N} \cdot \underline{P}_{vv} \end{bmatrix} = \frac{2v}{\sqrt{4u^2v^2 + u^4 + v^4}} \underbrace{\begin{bmatrix} v^2 & -uv \\ -uv & u^2 \end{bmatrix}}_{B'}
\end{aligned}$$

L'idea è di "fattorizzare" il determinante in maniera da escludere quei fattori che influiscono sul segno in modo costante. Qui (poiché $v \neq 0$) ci interesserà dunque il segno di

$$\det B' = u^2v^2 - u^2v^2 \equiv 0.$$

Questo significa che tutti i punti sono o parabolici o planari; ma siccome le entrate della B' sono sempre non-nulle abbiamo sempre $B \neq 0$, quindi tutti i punti sono parabolici.

c) Determinare una curva $C \subseteq S$ t.c. $\forall R \in C$ valga $\underline{N}_R \perp \underline{w} = (0, 1, -1)$.

Questo significa determinare gli $R \in S$ t.c. $\underline{N}_R \cdot (0, 1, -1) = 0$.

$$(-2u,\ u^2,\ v^2) \cdot (0, 1, -1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = 0.$$

Abbiamo due possibilità, $u + v = 0$ o $u - v = 0$, sicché *a priori* avremmo due curve. Ma l'insieme di definizione è $(\mathbb{R}^+)^2$, quindi da $u, v > 0$ escludiamo $u + v = 0$. Pertanto

$$C \equiv \begin{cases} u = t \\ v = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

ci dà la curva nello spazio dei parametri. Per $C \subseteq \mathbb{R}^3$ si avrà

$$\underline{P}(u(t), v(t)) = \underline{P}(t, t) = (t^3, t^3, t^3),$$

ovvero la semiretta

$$C \equiv \underline{Q}(t) = (t, t, t).$$

d) Determinare l'angolo α delle linee coordinate di S per il punto $Q = \underline{P}(1, 1) = (1, 1, 1)$.

Quando voglio l'angolo tra due curve calcolo l'angolo tra le tangenti, e questo posso farlo in due modi: considerando le curve nello spazio $\mathbb{R}^3$ oppure nello spazio dei parametri, dove al posto del prodotto scalare standard devo usare quello legato alla matrice G. Scegliamo quest'ultima strada. Le linee coordinate sono

$$\lambda \equiv \begin{cases} u = t \\ v = 1 \end{cases} \qquad \mu \equiv \begin{cases} u = 1 \\ v = s \end{cases}$$

e le tangenti che ci interessano sono dunque $\dot{\lambda}(1) = (1, 0)$, $\dot{\mu}(1) = (0, 1)$.

$$G = \begin{bmatrix} \underline{P}_u \cdot \underline{P}_u & \underline{P}_u \cdot \underline{P}_v \\ \underline{P}_v \cdot \underline{P}_u & \underline{P}_v \cdot \underline{P}_v \end{bmatrix} \qquad G\Big|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

Pertanto

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\lambda} \cdot \dot{\mu}}{\left\|\dot{\lambda}\right\| \|\dot{\mu}\|} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}}.$$

Alternativamente potevamo lavorare in $\mathbb{R}^3$:

$$\lambda(t) = \underline{P}(t, 1) = (t,\ 1,\ t^2) \qquad \mu(s) = \underline{P}(1, s) = (s^2,\ s^3,\ s)$$

e avremmo $\dot{\lambda}(1) = (1, 0, 2)$ e $\dot{\mu}(1) = (2, 3, 1)$. Applicando il prodotto standard otteniamo dunque lo stesso risultato di prima:

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\lambda} \cdot \dot{\mu}}{\left\|\dot{\lambda}\right\| \|\dot{\mu}\|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}}.$$

e) Determinare le direzioni asintotiche (se ce ne sono) e principali in Q.
Le direzioni asintotiche $\underline{a}$ sono tali che $\mathrm{II}(\underline{a}, \underline{a}) = 0$. Se un punto è iperbolico se ne hanno due, se è parabolico una, se è ellittico nessuna. Qui i punti sono tutti parabolici, quindi ce ne sarà una per ogni punto. Consideriamo il vettore $\underline{a}$ nello spazio tangente, con coordinate rispetto a $\underline{P}_u$ e $\underline{P}_v$:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \qquad \mathrm{II}(\underline{a}, \underline{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} B\Big|_{(1,1)} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = 0.$$

Possiamo ignorare la frazione in quanto è una costante non nulla, quindi giungiamo a

$$(\xi - \eta)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \eta,$$

sempre nello spazio dei parametri. Trasferiamoci in $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{a} = 1 \cdot \underline{P}_u(1, 1) + 1 \cdot \underline{P}_v(1, 1) = (1, 0, 2) + (2, 3, 1) = (3, 3, 3).$$

Poiché siamo interessati solo alla direzione, potremmo rispondere anche solo $(1, 1, 1)$.
Le direzioni principali sono gli autovettori di X_T, dove $X = BG^{-1}$; sono sempre due distinte e ortogonali. Se i punti sono iperbolici allora le direzioni principali sono le bisettrici dell'angolo individuato dalle due direzioni asintotiche; per un punto parabolico sono direzioni principali la sola direzione asintotica e la perpendicolare a questa per il punto. Avendo le direzioni asintotiche possiamo dunque in questo caso individuare anche le direzioni principali. Oppure possiamo semplicemente usare X_T:

$$X\Big|_{(1,1)} = B\Big|_{(1,1)} G^{-1}\Big|_{(1,1)} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

e trovando gli autovalori di X_T si giunge fino alla fine. Cerchiamo però di evitare di fare questo, perché sappiamo già che una direzione principale è la direzione asintotica data da $\underline{a} = (1, 1)$. L'altra sarà $\underline{b} = (\varphi, \psi)$ t.c. $\underline{a} \perp \underline{b}$, che accade sse $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ tramite il prodotto dato da G.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tema d'esame (aprile 2000) Sia $\underline{P}$ l'applicazione:

$$\begin{aligned} \underline{P} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u + v, u^2 + v, v) \end{aligned}$$

a) Mostrare che $\underline{P}$ è un foglio semplice di superficie S.
Dobbiamo mostrare che $\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v \neq \underline{0}\ \forall (u, v)$ e che P è iniettiva, dato che l'insieme di definizione è l'intero piano dove $\underline{P}$ è analitica. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{P}_u &= (1,\ 2u,\ 0) \\ \underline{P}_v &= (1,\ 1,\ 1) \\ \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v &= (2u,\ -1,\ 1 - 2u) \neq \underline{0} \quad \forall (u, v). \end{aligned}$$

P è iniettiva perché da

$$\begin{cases} u + v = a + b \\ u^2 + v = a^2 + b \\ v = b \end{cases}$$

discende $u = a$, $v = b$.

b) Determinare la natura dei punti.
Questo significa analizzare il segno di $\det B$.

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} \underline{N} \cdot \underline{P}_{uu} & \underline{N} \cdot \underline{P}_{uv} \\ \underline{N} \cdot \underline{P}_{vu} & \underline{N} \cdot \underline{P}_{vv} \end{bmatrix} \\ \underline{N} &= \frac{\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v}{\|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 4u + 8u^2}} \left(2u, \quad -1, \quad 1 - 2u\right) \\ \underline{P}_{uu} &= (0,\ 2,\ 0), \qquad \underline{P}_{uv} = \underline{P}_{vv} = 0 \\ B &= \frac{1}{\sqrt{2 - 4u + 8u^2}} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In ogni punto $\det B = 0$ e $B \neq 0$, quindi i punti sono tutti parabolici.

c) Determinare curvatura e torsione della curva $C \subseteq S$ immagine della retta $r \equiv u + v - 1 = 0$ nel piano dei parametri.
Dobbiamo scrivere l'equazione della curva C. Scelgo u come parametro, ottenendo nello spazio dei parametri

$$\begin{cases} u = u \\ v = 1 - u \end{cases}$$

e nello spazio $\mathbb{R}^3$ una $\underline{R}(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\underline{R} \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = u^2 - u - 1 \\ z = 1 - u \end{cases}$$

Da $x = 1$ deduciamo che C è piana, quindi $\tau = 0$.

$$\kappa = \frac{\left\| \dot{\underline{R}} \wedge \ddot{\underline{R}} \right\|}{\left\| \dot{\underline{R}} \right\|^3} = \frac{2}{(4u^2 - 4u + 2)^{\frac{3}{2}}}.$$

In questo caso avremmo anche potuto usare la formula per le curve piane, a patto di prendere il risultato in valore assoluto:

$$\frac{\left|\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

d) Sia L la linea coordinata di S $u = 1$, $Q = L \cap C$. Calcolare $\widehat{LC}$ in Q.

Intersecando L e C vediamo che il punto di intersezione è $(u, v) = (1, 0)$, ovvero $P(1, 0) = (1, 1, 0)$. Facciamo i conti necessari:

$$G = \begin{bmatrix} 1+4u^2 & 1+2u \\ 1+2u & 3 \end{bmatrix} \qquad G(1,0) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\dot{L} = (0, 1) \qquad \dot{C} = (1, -1)$$

Usando il prodotto scalare dato da G troviamo

$$\cos\alpha = \frac{\dot{L}(1)\cdot\dot{C}(1)}{\left\|\dot{L}(1)\right\|\left\|\dot{C}(1)\right\|} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}} = 0,$$

quindi L e C sono perpendicolari in Q.

e) Trovare le direzioni asintotiche e le direzioni principali in ogni punto.

Le direzioni asintotiche corrispondono all'annullamento della II forma fondamentale, le direzioni principali sono date dagli autovettori di $(BG^{-1})_T$. In questo caso i punti di S sono tutti parabolici, quindi troveremo una sola direzione asintotica che sarà anche principale, e l'altra direzione principale sarà la perpendicolare a questa. Ignorando il coefficiente frazionario di B in quanto costante non nulla abbiamo

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \mathrm{II}(\underline{a}, \underline{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,$$

quindi l'unica direzione asintotica nel piano (u, v) è $(0, 1)$, corrispondente in $\mathbb{R}^3$ a $0 \cdot \underline{P}_u + 1 \cdot \underline{P}_v = \underline{P}_v = (1, 1, 1)$. Per quanto riguarda l'altra direzione principale, essa sarà data da $\underline{b} \neq \underline{0}$ t.c. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ secondo il prodotto scalare dato da $G(u, v)$.

$$0 = \underline{a}G\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+4u^2 & 1+2u \\ 1+2u & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \xi(1+2u) + 3\eta,$$

quindi $\underline{b} = (\xi, \eta) = (-3, 1+2u)$, ovvero in $\mathbb{R}^3$ $-3 \cdot \underline{P}_u + (1+2u) \cdot \underline{P}_v$.

Osservazione In realtà S è una quadrica: notando $x - z = u$, $y - z = u^2$ si ha $S \equiv y - z = (x - z)^2$. Scritta $\underline{P}$ come

$$\underline{P} = (u + v,\ u^2 + v,\ v) = \begin{bmatrix} u \\ u^2 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si vede subito che S è un foglio rigato, precisamente un cilindro su base parabolica, e che la direzione asintotica è $(1, 1, 1)$: quella delle generatrici del cilindro.

Tema d'esame (luglio 2001) Sia S il foglio semplice di superficie differenziabile dato da

$$\begin{aligned} \underline{P} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u, v, (u-v)^3) \end{aligned}$$

a) Determinare la natura dei punti di S.

Vogliamo il segno di $\det B$.

$$\begin{aligned}
\underline{P}_u &= \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3(u-v)^2 \end{pmatrix} \\
\underline{P}_v &= \begin{pmatrix} 0, & 1, & 3(u-v)^2 \end{pmatrix} \\
\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v &= \begin{pmatrix} -3(u-v)^2, & 3(u-v)^2, & 1 \end{pmatrix} \\
\|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\| &= \sqrt{1+18(u-v)^4} \\
\underline{N} &= \frac{1}{\sqrt{1+18(u-v)^4}} \begin{pmatrix} -3(u-v)^2, & 3(u-v)^2, & 1 \end{pmatrix} \\
\underline{P}_{uu} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & 6(u-v) \end{pmatrix} \\
\underline{P}_{uv} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & -6(u-v) \end{pmatrix} \\
\underline{P}_{vv} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & 6(u-v) \end{pmatrix} \\
B &= \frac{6(u-v)}{\sqrt{1+18(u-v)^4}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\mathrm{sgn}(\det B) = 0 \ \forall (u,v)$, quindi avremo punti parabolici quando $B \neq 0$, punti planari quando $B = 0$. Vediamo che $B = 0 \Leftrightarrow u = v$, quindi i punti sono planari se $u = v$, parabolici altrimenti. Questo significa che nello spazio dei parametri avremo una retta di punti planari, ma non necessariamente che questi punti corrispondano in $\mathbf{E}^3$ ad una retta.[1]

b) Per ogni punto $P \in S$ parabolico determinare l'unica direzione asintotica.

Individuiamo le direzioni autoconiugate attraverso coordinate sul piano dei parametri.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \frac{6(u-v)}{\sqrt{1+18(u-v)^4}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0
\end{aligned}$$

Quindi la direzione asintotica è nel piano dei parametri $(1,1)$, la stessa per ogni punto P; questo avviene per "caso", non in generale. In $\mathbf{E}^3$ questa direzione è

$$1 \cdot \underline{P}_u + 1 \cdot \underline{P}_v = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3(u-v)^2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3(u-v)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

quindi è davvero costante; anche qui si tratta di un "caso".

c) Sia Γ la curva di equazione $v = -u$ (nel piano dei parametri). Provare che Γ è una curva piana e per ogni $Q \in \Gamma$ che è parabolico determinare la misura dell'angolo ϑ tra la direzione asintotica uscente da Q e quella tangente a Γ in Q.

Γ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} u = t \\ v = -t \end{cases}$$

[1] In realtà qui ciò si verifica, ma è un "caso".

quindi in $\mathbb{E}^3$ essa sarà data da

$$\underline{P}(t,-t) \rightsquigarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 8t^3 \end{cases}$$

In generale Γ è piana se e solo se

$$\exists \pi : \ ax + by + cz + d = 0 \quad \text{t.c.} \quad ax(t) + by(t) + cz(t) + d = \underline{R}(t) \equiv 0.$$

In generale non è facile vedere se esistono a, b, c, d, ma qui è davvero semplice: $\pi \equiv x + y = 0$.

Alternativamente è possibile calcolare la torsione di Γ, perché Γ è piana se e solo se $\tau \equiv 0$. Questo è il metodo per giungere sicuramente fino alla fine. La differenza è che in questo modo non scopriamo qual è il piano che contiene la curva.

Individuiamo ora i punti non parabolici di Γ, mettendo a sistema le coordinate della curva e della retta di punti planari nel piano dei parametri. Da

$$\begin{cases} v = -u \\ v = u \end{cases}$$

inferiamo che l'unico punto planare di Γ è dato da $u = v = 0$. La direzione tangente a Γ in Q è ovviamente data da $(\dot{u}, \dot{v}) = (1, -1)$; abbiamo visto che la direzione asintotica è sempre data da $(1, 1)$. Calcoliamo G per poter trovare $\cos\vartheta$ sullo spazio tangente.

$$G = \begin{bmatrix} 1 + 9(u-v)^4 & -9(u-v)^4 \\ -9(u-v)^4 & 1 + 9(u-v)^4 \end{bmatrix} \qquad G\Big|_{(t,-t)} = \begin{bmatrix} 1 + 144t^4 & -144t^4 \\ -144t^4 & 1 + 144t^4 \end{bmatrix}$$

Alla fine risulta

$$\cos\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} G\Big|_{(t,-t)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \forall t$$

Questo è il metodo standard, ma si poteva anche procedere in un altro modo. Abbiamo visto che la direzione asintotica $\underline{a} = (1, 1, 0)$ è costante in $\mathbb{E}^3$, quindi possiamo, in Q, determinare la direzione tangente alla curva Γ in $\mathbb{E}^3$ e calcolare la misura dell'angolo usando il prodotto scalare standard. Facilmente troviamo che il vettore tangente nel generico punto di Γ è $\dot{\Gamma}(t) = (1, -1, 24t^2)$, dunque

$$\cos\vartheta = \frac{\dot{\Gamma}(t) \cdot \underline{a}}{\left\|\dot{\Gamma}(t)\right\| \|\underline{a}\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

d) Determinare se Γ è linea di curvatura.

Ricordiamo che per definizione Γ è linea di curvatura se $\forall Q \in \Gamma$ la tangente a Γ in Q è una delle direzioni principali di S in Q. Nel quesito precedente abbiamo visto che Γ, in ogni suo punto parabolico, è perpendicolare alla direzione asintotica; in generale questo non vuol dire alcunché, ma per i punti parabolici una delle due direzioni principali è perpendicolare all'unica direzione asintotica, il che vuol dire che $\dot{\Gamma}(t)$ è una delle direzioni principali e Γ è linea di curvatura. In teoria dovremmo controllare anche il punto planare per cui passa Γ, ma in un punto planare ogni direzione è principale.

Alternativamente, Γ è di curvatura se e solo se $\forall t$

$$\det \begin{bmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Se $\Gamma = (u, v)$ ovviamente $du = \dot{u}\,dt$ e $dv = \dot{v}\,dt$. In questo caso abbiamo $\Gamma = (t, -t)$, quindi $du = dt$ e $dv = -dt$. Sostituendo otteniamo

$$\frac{12t}{\sqrt{1+18(2t)^4}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+144t^4 & -144t^4 & 1+144t^4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

osservando la dipendenza della prima e della terza colonna della matrice, pertanto Γ è linea di curvatura.

e) Sia

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (u - v, v) \end{aligned}$$

Provare che $\underline{Q} = \underline{P} \circ f^{-1}$ è ancora un foglio semplice di superficie equivalente a $\underline{P}$ e dedurre che il foglio semplice di superficie è un cilindro.

Affinché $\underline{Q}$ sia un foglio semplice occorre e basta che f sia un diffeomorfismo. Abbiamo:

$$f \equiv \begin{cases} \tilde{u} = u - v \\ \tilde{v} = v \end{cases} \qquad f^{-1} \equiv \begin{cases} u = \tilde{u} + \tilde{v} \\ v = \tilde{v} \end{cases}$$

- f è di classe C^∞, perché le funzioni componenti sono polinomi;
- f è invertibile, perché le componenti sono polinomi lineari;
- f^{-1} è di classe C^∞, perché anch'essa è costituita da componenti polinomiali.

In altre parole f è un'applicazione lineare rappresentata da una matrice invertibile, quindi è un'affinità e perciò un diffeomorfismo. In definitiva $\underline{Q} = \underline{P} \circ f^{-1}$ è un foglio semplice di superficie. Per vedere che $\underline{Q}$ è un cilindro andiamo a vedere come è fatta:

$$\underline{Q}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \underline{P} \circ f^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \underline{P}(f^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v})) = (u, v, (u - v)^3) = (\tilde{u} + \tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{u}^3).$$

Questo è palesemente un cilindro, perché possiamo scrivere $\underline{Q}$ come

$$\underline{Q}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \underbrace{(\tilde{u}, 0, \tilde{u}^3)}_{\text{direttrice}} + \tilde{v}\underbrace{(1, 1, 0)}_{\substack{\text{direzione} \\ \text{asintotica}}}.$$

Tema d'esame (gennaio 2003) Sia S il foglio semplice di superficie differenziabile dato da

$$\begin{aligned} \underline{P} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, u^3 + v^3 + uv) \end{aligned}$$

a) Determinare la natura dei punti di S.

Vogliamo analizzare il segno di $\det B$.

$$\underline{P}_u = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3u^2 + v \end{pmatrix} \qquad \underline{P}_v = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 3v^2 + u \end{pmatrix}$$
$$\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v \begin{pmatrix} -3u^2 - v, & -3v^2 - u, & 1 \end{pmatrix}$$

Chiamiamo ora $d = \|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\|$, perché non vale la pena fare i conti: si tratta di un fattore sempre positivo, che non può influire sul segno di $\det B$.

$$\begin{aligned}
\underline{P}_{uu} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & 6u \end{pmatrix}\\
\underline{P}_{uv} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \underline{P}_{vu}\\
\underline{P}_{vv} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & 6v \end{pmatrix}\\
B &= \begin{bmatrix} \underline{N}\cdot\underline{P}_{uu} & \underline{N}\cdot\underline{P}_{uv}\\ \underline{N}\cdot\underline{P}_{vu} & \underline{N}\cdot\underline{P}_{vv} \end{bmatrix} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} 6u & 1\\ 1 & 6v \end{bmatrix}\\
\operatorname{sgn}(\det B) &= \operatorname{sgn}(36uv - 1)
\end{aligned}$$

Nel piano dei parametri $36uv-1 = 0$ è un'iperbole di punti parabolici, che divide su tale piano i punti ellittici dai punti iperbolici (quelli che stanno nella porzione di piano che comprende $(0,0)$. In realtà per dire che tutti i punti dell'iperbole sono parabolici dobbiamo ancora notare che non ci possono essere punti planari, perché B non può mai essere nulla.

b) Determinare le direzioni asintotiche e principali in $\underline{P}(0,0)$.

$\underline{P}(0,0)$ è iperbolico, quindi ci devono essere due direzioni asintotiche. Chiamiamo $\delta = d(0,0)$, che non siamo interessati a calcolare.

$$B\Big|_{(0,0)} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} B\Big|_{(0,0)} \begin{bmatrix} \alpha\\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha\\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 0$$

Da ciò deduciamo che $(1,0)$ e $(0,1)$ sono le due direzioni asintotiche nel piano dei parametri. In $\mathbf{E}^3$ si ha:

$$\begin{bmatrix} 1\\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow 1\cdot\underline{P}_u + 0\cdot\underline{P}_v = \underline{P}_u(0,0) = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0\\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow 0\cdot\underline{P}_u + 1\cdot\underline{P}_v = \underline{P}_v(0,0) = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le direzioni principali in un punto iperbolico non sono altro che le bisettrici delle direzioni asintotiche, quindi in questa situazione si identificano a occhio: in $\mathbf{E}^3$ esse sono $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$.

Esercizio B.1.2 Eseguire il conto nel piano dei parametri.

c) Trovare curvatura e torsione delle linee coordinate per $\underline{P}(0,0)$.

Le linee coordinate passanti per $\underline{P}(0,0)$ sono, nel piano dei parametri,

$$C_1 \equiv \begin{cases} u = t\\ v = 0 \end{cases} \qquad\qquad C_2 \equiv \begin{cases} u = 0\\ v = t \end{cases}$$

o, in $\mathbf{E}^3$, $C_1 = \underline{P}(t,0) = (0,t,t^3)$ e $C_2 = \underline{P}(0,t) = (t,0,t^3)$. Notiamo subito che C_1 è una curva piana, giacente sul piano $x = 0$. Pertanto $\tau_1 = 0$, mentre usando la formula per il calcolo della curvatura delle curve piane otteniamo

$$\kappa_1 = \frac{6|t|}{\left(\sqrt{1+9t^4}\right)^3}.$$

Infine $\tau_2 = 0$ e $\kappa_2 = \kappa_1$, perché si nota immediatamente che le due curve sono ottenute l'una dall'altra tramite il movimento rigido di $\mathbf{E}^3$ dato da: $x' = y, y' = x, z' = -z$ e la trasformazione $t \to -t$ che cambia l'orientazione della curva.

d) Sia $C : u = v$ una curva su S. C è linea di curvatura?

Ricordiamo che C è linea di curvatura se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Facendo dunque i conti:

$$C \equiv \begin{cases} u = t \\ v = t \end{cases} \qquad \begin{cases} du = dt \\ dv = dt \end{cases}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 + (3u^2 + v)^2 & (3u^2 + v)(3v^2 + u) \\ (3u^2 + v)(3v^2 + u) & 1 + (3v^2 + u)^2 \end{bmatrix}$$

Approdiamo così al determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 + (t + 3t^2)^2 & (3t^2 + t)^2 & 1 + (t + 3t^2)^2 \\ 6t & 1 & 6t \end{vmatrix} = 0,$$

nullo per la dipendenza della prima e della terza colonna. Conclusione: sì, C è linea di curvatura.

e) Sia Γ la curva di S giacente sul piano $z = 0$. Determinare le direzioni tangenti a Γ in $P(0, 0)$.

Dobbiamo innanzitutto scrivere l'equazione di $\Gamma = S \cap (z = 0)$.

$$S \equiv \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 + v^3 + uv \end{cases}$$

$$\Gamma \equiv z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 + uv = 0$$

Vorremmo ora poter scrivere

$$\Gamma \equiv \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

e derivando ottenere la direzione tangente, ma purtroppo non riusciamo a farlo. Approfittiamo dunque delle nostre conoscenze relative alle curve algebriche: il complesso delle tangenti principali in $\underline{P}(0, 0)$ sarà dato dai termini di grado più basso eguagliati a zero: $uv = 0$. Quindi vi sono due direzioni tangenti in $\underline{P}(0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underline{P}_u(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underline{P}_v(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio B.1.3 In realtà la curva si può esprimere razionalmente, perché è una cubica, irriducibile e ridotta, con un (solo) nodo nell'origine ed è quindi razionale.

Tema d'esame (aprile 2003) Sia S il foglio semplice di superficie differenziabile dato da

$$\begin{aligned} \underline{P} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, e^{uv}) \end{aligned}$$

a) Determinare la natura dei punti.

Quello che salta fuori è, detta $d = \|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\|$:

$$\begin{aligned} \underline{P}_u &= \begin{pmatrix} 1, & 0, & ve^{uv} \end{pmatrix} & \underline{P}_{uu} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & v^2e^{2uv} \end{pmatrix} \\ \underline{P}_v &= \begin{pmatrix} 0, & 1, & ue^{uv} \end{pmatrix} & \underline{P}_{uv} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & e^{uv} + uve^{uv} \end{pmatrix} \\ \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v &= \begin{pmatrix} -ve^{uv}, & -ue^{uv}, & 1 \end{pmatrix} & \underline{P}_{vv} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & u^2e^{uv} \end{pmatrix} \\ B &= \frac{e^{uv}}{d}\begin{bmatrix} v^2 & 1+uv \\ 1+uv & u^2 \end{bmatrix} & & \operatorname{sgn}(\det B) = \operatorname{sgn}(-1-2uv) \end{aligned}$$

Nel piano dei parametri $1 + 2uv = 0$ è dunque un'iperbole di punti parabolici che separa i punti ellittici dai punti iperbolici. La regione di punti iperbolici è quella contenente l'origine, perché $\det B(0,0) = -1 < 0$.

b) Trovare le direzioni asintotiche, le direzioni principali e le curvature principali in $\underline{P}(0,0)$.

Se vogliamo le curvature principali dobbiamo calcolare gli autovalori di X_T. Troviamo innanzitutto G:

$$G = \begin{bmatrix} 1+v^2e^{2uv} & uve^{2uv} \\ uve^{2uv} & 1+u^2e^{2uv} \end{bmatrix} \qquad G\Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poi calcoliamo

$$X = BG^{-1} = B = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e di questa troviamo gli autovalori, ovvero le curvature principali nel punto, che risultano essere $\kappa_1 = 1$ e $\kappa_2 = -1$. Gli autovettori relativi a questi due autovalori costituiranno poi le direzioni principali, $(1,1)$ e $(1,-1)$.

Esercizio B.1.4 Trovare le direzioni asintotiche.

c) Determinare se la curva data da $u = -v$ è linea di curvatura.

Applicando il solito metodo del determinante otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1+t^2e^{-2t^2} & -t^2e^{-2t^2} & 1+t^2e^{-2t^2} \\ t^2 & 1-t^2 & t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

quindi $u = -v$ è effettivamente una linea di curvatura.

d) Sia $\Gamma : v = -\frac{1}{2u}$. Determinare la torsione di Γ.

L'espressione di Γ in $\mathbf{E}^3$ è data da

$$\underline{P}\left(t, -\frac{1}{2t}\right) = \begin{pmatrix} t, & -\frac{1}{2t}, & e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

quindi Γ giace sul piano $z = e^{-\frac{1}{2}}$. Essendo una curva piana, $\tau \equiv 0$.

e) Determinare in ogni punto di Γ l'unica direzione asintotica e stabilire se Γ è una linea asintotica.

Γ ha equazione $2uv + 1 = 0$, pertanto ricordiamo dal primo quesito che essa e costituita interamente da punti parabolici, che presenteranno ciascuno un'unica direzione asintotica. Troviamola:

$$B\Big|_{\left(t, -\frac{1}{2t}\right)} = -\frac{1}{2d}\begin{bmatrix} \frac{1}{4t^2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} B\Big|_{\left(t, -\frac{1}{2t}\right)} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4t^2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{1}{2t} \end{bmatrix}$$

La direzione tangente a $\Gamma(t)$ risulta essere $\dot{\Gamma}(t) = \left(t, -\frac{1}{2t^2}\right)$. Dunque Γ è linea asintotica se e solo se queste due direzioni sono proporzionali. Tuttavia

$$\begin{vmatrix} t & 1 \\ -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \neq 0,$$

quindi Γ non è linea asintotica.

Tema d'esame (gennaio 2004) Sia

$$A = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v + 1 > 0 \wedge 2v > u - 5\right\},$$

e sia $\underline{P}$ l'applicazione iniettiva tale che: [2]

$$\begin{aligned} &\underline{P} : A \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &(u, v) \mapsto (u^2 + v^2, uv + u + v, u - 2v) \end{aligned}$$

a) Mostrare che $\underline{P}$ è un foglio semplice di superficie S.

- $\underline{P}$ è iniettiva.
- $\underline{P} \in C^\infty$, perché si tratta di polinomi.
- $\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v \neq 0$ su tutto A. Infatti:

$$\begin{aligned} \underline{P}_u &= \begin{pmatrix} 2u, & v + 1, & 1 \end{pmatrix} \\ \underline{P}_v &= \begin{pmatrix} 2v, & u + 1, & -2 \end{pmatrix} \\ \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v &= \left(-u - 2v - 3, 4u + 2v, 2u^2 - 2v^2 + 2u - 2v\right) \end{aligned}$$

Notiamo che la terza componente si può scrivere come $2(u-v)(u+v+1)$, e in A $(u + v + 1) > 0$. È dunque di facile verifica che

$$\begin{cases} -u - 2v - 3 = 0 \\ 4u + 2v = 0 \\ u - v = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

b) Determinare la natura dei punti di S.
Calcoliamo innanzitutto quanto ci serve.

$$\underline{P}_{uu} = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{P}_{uv} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{P}_{vv} = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{2}{d}\begin{bmatrix} -u - 2v - 3 & 2u + v \\ 2u + v & -u - 2v - 3 \end{bmatrix}$$

Risulta dunque

$$\det B = \frac{12}{d^2} \underbrace{(u + v + 1)}_{>0}(-u + v + 3)$$

dove $d = \|\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v\|$. Dunque la retta $-u+v+3 = 0$ separa i punti ellittici (che stanno sopra la retta) da quelli parabolici (che stanno sotto). Non possiamo però ancora dire che i punti della retta sono parabolici. Questi punti si possono parametrizzare con

$$-u + v + 3 = 0 \quad \equiv \quad \begin{cases} u = t \\ v = t - 3 \end{cases}$$

[2] Il simbolo "$\hookrightarrow$" indica che $\underline{P}$ è iniettiva.

Da qui si considera la matrice B:

$$B = \frac{2}{d}\begin{bmatrix} -u-2v-3 & 2u+v \\ 2u+v & -u-2v-3 \end{bmatrix} \qquad B\Big|_{(t,\,t-3)} = \frac{6}{d}(t-1)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \rightsquigarrow (1,-2) \notin A$$

Quindi la nostra retta è costituita tutta da punti parabolici.

c) Sia Γ la linea parabolica di equazione $v = u - 3$. Γ è asintotica?

Adottando la parametrizzazione del punto precedente, la direzione tangente a $\Gamma(t)$ è data da $(\dot{u}, \dot{v}) = (1,1)$; il fatto che sia costante è un "caso". Dobbiamo valutare la II forma fondamentale lungo tale direzione,nel generico punto di Γ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} B\Big|_{(t,\,t-3)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

quindi Γ è linea asintotica.

d) Determinare le curvature principali in $\underline{P}(0,0)$.

Dobbiamo trovare gli autovalori di $X_T = (BG^{-1})_T$. La cosa più facile è sostituire prima $\underline{P}(0,0)$ e poi fare i conti. Alla fine viene

$$X\Big|_{(0,\,0)} = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{2}{9}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = X_T.$$

Gli autovalori di X_T sono dati da

$$-\frac{2}{9}\left[\text{soluzioni di } \det\begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0\right].$$

Quello che risulta è $\kappa_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{13}}{9} < 0$, così come deve essere dal momento che il punto in questione è ellittico.

e) Determinare curvatura e torsione di Γ. Γ è linea di curvatura?

Esprimiamo Γ in $\mathbb{E}^3$.

$$\Gamma \equiv P(t, t-3) = \underline{Q}(t) = \left(2t^2 - 6t + 9, \quad t^2 - t - 3, \quad -t + 6\right)$$

$$\kappa = \frac{\left\|\dot{\underline{Q}} \wedge \ddot{\underline{Q}}\right\|}{\left\|\dot{\underline{Q}}\right\|^3} = \sqrt{\frac{21}{2(10t^2 - 26t + 19)^3}}$$

$$\tau = \frac{\dot{\underline{Q}} \wedge \ddot{\underline{Q}} \cdot \dddot{\underline{Q}}}{\left\|\dot{\underline{Q}} \wedge \ddot{\underline{Q}}\right\|^2} = 0$$

Dunque Γ è piana.

Per dire se una curva è linea di curvatura si può controllare se la tangente è in ogni punto direzione principale. Ma in questo caso possiamo esimerci dal fare i conti, perché Γ è linea asintotica a punti parabolici, e pertanto è linea di curvatura.

f) Γ è linea geodetica?

Una curva è geodetica se in ogni punto la direzione normale principale alla curva coincide con la direzione normale alla superficie. Ora

$$(\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v)\Big|_{(t,\,t-3)} = (3t-3)(-1,2,4),$$

ma

$$\underline{b}(t) = \frac{\dot{\underline{Q}} \wedge \ddot{\underline{Q}}}{\left\| \dot{\underline{Q}} \wedge \ddot{\underline{Q}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{84}}(2, -4, -8) \parallel (1, -2, -4).$$

Pertanto la direzione normale principale in ogni punto $\underline{Q}(t)$ di Γ, che è perpendicolare a $\underline{b}(t)$, è perpendicolare alla direzione normale di S in $\underline{Q}(t)$, e quindi Γ non è geodetica.