

Curve Geodetiche su Superfici

ELABORATO FINALE DI Valentina Franceschi (matr.658898)

RELATORE: Prof. Alberto Alzati

In questa tesi abbiamo voluto dare una trattazione sufficientemente completa della teoria delle curve geodetiche tracciate su superfici immerse nello spazio euclideo tridimensionale.

Per superficie intendiamo una varietà topologica localmente parametrizzata tramite funzioni analitiche, regolari ed iniettive.

La trattazione risulta accessibile a partire dalle conoscenze di base di un corso di geometria differenziale, ma può essere facilmente estesa al caso delle superfici immerse in spazi euclidei di dimensione più elevata.

Per completezza abbiamo scelto di considerare due diverse definizioni di curva geodetica: nella prima una curva è geodetica se e solo se la sua curvatura geodetica è nulla, ovvero se è nulla la componente tangenziale del vettore curvatura della curva; nella seconda una curva è geodetica se e solo se il suo vettore tangente è autoparallelo secondo Levi-Civita, ovvero si richiede l'annullamento della proiezione del vettore derivato secondo sul piano tangente alla superficie su cui è tracciata la curva.

E' ovvio che le due definizioni estendono due naturali proprietà delle rette sul piano.

Le due definizioni in generale non sono equivalenti, come si vede in un esempio dato nella tesi. Tuttavia se per rappresentare una curva si utilizza un parametro naturale (parametro arco), o più in generale se ne considerano solo rappresentazioni che abbiano vettore tangente di norma costante, allora le due definizioni coincidono.

La non equivalenza implica che se si ammette, come abitualmente viene fatto, che una curva differenziale è in realtà un'opportuna classe di equivalenza di applicazioni, allora può accadere che, utilizzando la seconda definizione, il fatto che una curva sia o meno geodetica dipende dal rappresentante scelto per la sua classe di equivalenza.

In conseguenza di ciò, nelle parti della tesi in cui abbiamo considerato la seconda definizione di geodetica, abbiamo modificato la usuale definizione di curva in modo da evitare questo fenomeno. Abbiamo cioè considerato ogni curva in relazione ad una specifica rappresentazione parametrica.

Nel corso della trattazione abbiamo illustrato ampiamente la situazione qui descritta e abbiamo dato numerosi esempi che mostrano come la seconda definizione abbia una notevole importanza pratica: essa infatti permette di determinare le curve geodetiche

attraverso un sistema di equazioni differenziali del second'ordine molto più semplice rispetto a quello richiesto nella prima definizione.

Abbiamo inoltre implementato questo sistema tramite Maple e abbiamo utilizzato questo strumento per costruire geodetiche e ricavare informazioni sul loro comportamento su alcune importanti superfici, fra cui per esempio le quadriche.

L'elaborato risulta organizzato nel seguente modo:

nel primo capitolo, dopo aver fornito alcune nozioni preliminari di teoria locale delle superfici e di teoria delle curve, abbiamo introdotto la prima definizione di curva geodetica.

Dopo di che abbiamo dimostrato due importanti risultati:

- Per ogni punto su una superficie esiste un'unica geodetica passante per tale punto che abbia come direzione un vettore assegnato.
- Per ogni coppia di punti sulla superficie che appartengano al supporto di un foglio semplice di superficie, la curva geodetica che li congiunge ne minimizza la distanza.

Nel secondo capitolo invece abbiamo introdotto la seconda definizione di curva geodetica e, come fatto nel primo capitolo, anche in questo caso abbiamo dimostrato due teoremi analoghi ai precedenti.

Abbiamo poi concluso il secondo capitolo con alcune considerazioni di natura globale e in particolare abbiamo dimostrato il teorema di Hopf-Rinow, che fissa le condizioni affinché due punti qualsiasi su una superficie possano sempre essere collegati da una geodetica che ha lunghezza minore o uguale a quella di una qualsiasi altra curva avente i medesimi estremi.

Nel terzo capitolo abbiamo scelto di illustrare alcuni esempi. In particolare abbiamo affrontato il problema della determinazione delle curve geodetiche sulle superfici di rotazione attraverso l'uso della relazione di Clairaut.

Abbiamo poi elaborato con Maple un programma che, a partire dalla parametrizzazione di un foglio semplice di superficie, è in grado di calcolare e risolvere le equazioni differenziali delle curve geodetiche e che

- dato un punto e una direzione traccia sul supporto del foglio la curva geodetica passante per quel punto con vettore tangente richiesto;
- dati due punti traccia sul supporto del foglio semplice la geodetica che li congiunge.

Abbiamo applicato il programma ad alcune importanti superfici (di rotazione e non) tra le quali sfera, toro, cilindri, cono, tutte le quadriche di rango massimo, catenoide e elicoide.

Abbiamo infine riportato in appendice il programma creato per questo scopo.