

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



# CURVE GEODETICHE SU SUPERFICI

Relatore: Chiar.mo prof. Alberto Alzati

ELABORATO FINALE DI  
Valentina Franceschi  
Matr. 658898

ANNO ACCADEMICO 2005 - 2006

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Curve geodetiche e brevi richiami di teoria delle superfici</b>	<b>7</b>
1.1 Fogli semplici di superficie . . . . .	7
1.2 Curve geodetiche . . . . .	11
1.3 Coordinate semigeodetiche . . . . .	18
1.4 Proprietà fondamentali delle curve geodetiche . . . . .	22
<b>2 Completezza</b>	<b>25</b>
2.1 Uno sguardo più moderno . . . . .	25
2.2 Il teorema di Hopf-Rinow . . . . .	32
<b>3 Esempi</b>	<b>43</b>
3.1 Superfici di rotazione . . . . .	43
3.2 La relazione di Clairaut . . . . .	50
3.3 Esempi di calcolo di geodetiche . . . . .	55
<b>A Geodetiche con Maple</b>	<b>71</b>
A.1 Il programma <code>plotgeod</code> . . . . .	71
A.2 Il programma <code>plotgeodpunti</code> . . . . .	76
<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>

## NOTAZIONI USATE:

Abbiamo scelto di denotare i vettori e le matrici in grassetto; in particolare per queste ultime si ha che se  $\mathbf{A}$  è la matrice  $[a_{ij}]$ , allora  $[a^{ij}]$  indica la matrice  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Il prodotto scalare tra vettori è indicato dal semplice accostamento degli stessi, mentre il prodotto vettoriale è caratterizzato dal simbolo  $\wedge$ . Il simbolo di sommatoria è omissivo, ma le stesse sono facilmente riconoscibili grazie agli indici.

Il gradiente di una funzione  $f$  è denotato con  $\nabla f$ , mentre la derivata di una curva  $\sigma$ , rispetto al suo parametro, è contrassegnata con  $\dot{\sigma}$  se si è in presenza di un parametro arco, con  $\sigma'$  se invece è parametrizzata tramite un parametro generico.

Infine, intendiamo lo spazio  $\mathbb{R}^3$  identificato con  $\mathbb{E}^3$  e denotiamo con  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la sua base. Gli intorni, in genere denotati con  $\mathcal{U}$ , sono da intendersi aperti e con  $\langle \mathbf{a} \rangle$  si intende lo spazio generato dal vettore  $\mathbf{a}$ .

# Introduzione

Scopo di questa tesi è presentare un compendio della teoria delle curve geodetiche che risulti accessibile a partire dalle conoscenze di base di un corso di geometria differenziale.

A questo scopo abbiamo limitato il nostro studio alle geodetiche tracciate su superfici, dove per superficie intendiamo una varietà topologica localmente parametrizzata attraverso una mappa liscia iniettiva. Chiameremo parametrizzazioni locali queste mappe  $\mathbf{P}$ , definite su aperti  $A$  omeomorfi a dischi aperti di  $\mathbb{R}^2$  e a valori in  $\mathbb{R}^3$ . Denoteremo con  $u^1, u^2$  le coordinate dei punti di  $A$ .

Dopo aver ricordato alcune nozioni preliminari di teoria locale delle superfici, e in particolare le proprietà della prima e della seconda forma fondamentale  $\mathbf{G} = [g_{ij}]$  e  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  di  $\mathbf{P}$ , nel primo capitolo introdurremo la definizione di curva come un'opportuna classe di equivalenza di funzioni  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Poi definiremo geodetica una curva, tracciata su una superficie, avente curvatura geodetica nulla. Ciò comporta che due qualsiasi parametrizzazioni equivalenti debbano entrambe verificare la condizione che la norma del vettore curvatura geodetica  $\mathbf{k}_g$  sia zero, cioè che sia soddisfatta la relazione

$$\|\mathbf{k}_g\| = \frac{\sqrt{g}}{\left(g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}\right)^{3/2}} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} & \frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \end{array} \right| = 0,$$

dove  $i, j = 1, 2$ ,  $g = \det \mathbf{G}$  e  $\Gamma_{ij}^k$  sono i simboli di Christoffel, funzioni delle coordinate  $u^1$  e  $u^2$ .

In particolare mostreremo che qualora la curva sia parametrizzata tramite

un parametro arco  $s$ , questa condizione si riduce al sistema

$$\begin{cases} \frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0, \\ \frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0. \end{cases}$$

Proseguiremo quindi esplicitando le condizioni di esistenza e unicità di una curva geodetica su una superficie, fissate opportune condizioni iniziali, e dimostrando il seguente teorema:

**Teorema:** Sia  $Q$  un punto di una superficie  $S$ ,  $\mathcal{U}$  un suo intorno aperto. L'arco di una curva geodetica  $\gamma$  passante per il punto  $Q$  e giacente interamente in  $\mathcal{U}$  è il cammino più breve che congiunge  $Q$  con un qualsiasi altro punto di  $\gamma$ , rispetto a ogni altra curva tracciata nell'intorno  $\mathcal{U}$ .

Per dimostrare questa ultima proprietà costruiremo delle coordinate particolari, dette semigeodetiche, in cui la famiglia di linee coordinate  $u^1 = \text{costante}$  è composta di geodetiche, mentre l'altra consiste di traiettorie ortogonali alle prime.

A partire dalla constatazione che nel piano le curve geodetiche sono tutte e sole le rette, nel secondo capitolo introdurremo la definizione di campo vettoriale parallelo secondo Levi-Civita:

**Definizione:** Un campo vettoriale è parallelo lungo una curva tracciata su una superficie se in ogni punto la proiezione della sua derivata sul piano tangente è nulla.

Dimostriamo poi come una curva geodetica, parametrizzata attraverso un parametro arco o un suo multiplo, abbia vettore tangente parallelo e di conseguenza di norma costante.

A questo punto introdurremo una seconda definizione di curva geodetica, chiamando tale una curva che abbia vettore tangente parallelo. Noteremo che questa definizione coincide con la precedente solo a patto di restringere ogni classe di equivalenza di curve alle sole parametrizzazioni che abbiano vettore tangente di norma costante.

Ne seguirà quindi l'opportunità di modificare la precedente definizione di curva come classe di equivalenza di parametrizzazioni, e per tutto il resto del capitolo ogni curva sarà considerata in relazione ad una specifica assegnata

parametrizzazione.

Analogamente a quanto fatto nel primo capitolo, anche in questo caso dimostreremo l'esistenza e unicità di una geodetica, fissate opportune condizioni, e un teorema analogo a quello precedentemente enunciato.

Il secondo capitolo si conclude quindi con alcune riflessioni di natura globale e in particolare tratteremo il teorema di Hopf-Rinow:

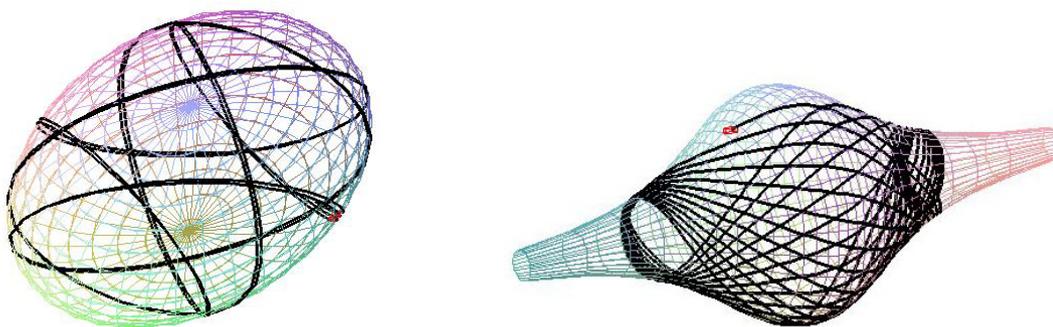
**Definizione:** Dati due punti su una superficie  $S$  chiamiamo distanza intrinseca su  $S$  la funzione  $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$  data da

$$d_S(Q, R) = \inf\{L(\sigma) \mid \sigma : [0, 1] \rightarrow S \text{ curva tra } Q \text{ e } R\}.$$

**Teorema di Hopf-Rinow:** Sia  $S$  una superficie completa per la metrica  $d_S$ ; allora dati due punti su  $S$ , essi possono sempre essere collegati da una geodetica che ha lunghezza minore o uguale a quella di una qualsiasi altra curva su  $S$  avente i medesimi estremi.

Conclusa la parte puramente teorica, nel terzo capitolo analizzeremo alcuni esempi. In particolare affronteremo il problema della determinazione delle curve geodetiche sulle superfici di rotazione. Per la determinazione di queste faremo uso della cosiddetta relazione di Clairaut.

Abbiamo inoltre deciso di sfruttare le potenzialità di Maple per estrapolare



il grafico di particolari curve geodetiche su alcune importanti superfici (di rotazione e non) tra le quali sfera, toro, cilindri, coni, tutte le quadriche di rango massimo, catenoide e elicoide. Il programma creato per questo scopo

è riportato nell'appendice.

Questa ultima sezione ha permesso non solo di rivelare il comportamento, spesso inaspettato, delle geodetiche, ma anche di comprendere l'importanza pratica della seconda definizione data di curva geodetica: pur essendo più restrittiva infatti, poichè essa caratterizza le geodetiche come curve con vettore tangente parallelo, permette di determinare le stesse attraverso un sistema di equazioni differenziali del second'ordine molto più semplice.

# Capitolo 1

## Curve geodetiche e brevi richiami di teoria delle superfici

### 1.1 Fogli semplici di superficie

**Definizione 1.1.1.** Chiamiamo *foglio semplice di superficie* un'applicazione iniettiva di classe  $C^\infty$ ,  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $\mathbb{R}^3$  è identificato con  $\mathbb{E}^3$ , e  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è omeomorfo ad un disco aperto.

Denotiamo con  $u^1, u^2$  le coordinate di un punto su  $A$ , variabili che saranno spesso chiamate coordinate curvilinee, e con  $\mathbf{P}_1 \doteq \partial\mathbf{P}/\partial u^1$ ,  $\mathbf{P}_2 \doteq \partial\mathbf{P}/\partial u^2$  le derivate parziali di  $\mathbf{P}$ .

$\mathbf{P}_{ij}$  indicherà quindi la derivata seconda di  $\mathbf{P}$  rispetto a  $u^i, u^j$ , con  $i, j = 1, 2$ . Introduciamo come condizione di regolarità che  $\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \neq 0 \quad \forall (u^1, u^2) \in A$ . L'immagine  $\mathbf{P}(A)$  di  $\mathbf{P}$  è detta *supporto* del foglio semplice di superficie.

Osserviamo che con tale definizione è univocamente determinato il *piano tangente* in ogni punto  $Q$  del supporto di  $\mathbf{P}$  e sarà indicato con  $\mathbf{T}_Q S = \langle \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \rangle$ .

**Definizione 1.1.2.** Un insieme connesso  $S$  di punti nello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{E}^3$  è detto *superficie* se per ogni punto  $Q$  di questo insieme esiste un intorno  $\mathcal{U}(Q) \subset S$  che sia supporto di un foglio semplice di superficie. Tale foglio viene detto *parametrizzazione locale* di  $S$ .

**Definizione 1.1.3.** Data una parametrizzazione locale  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  di un

punto su una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ , denotiamo con  $\mathbf{N}$  il *versore normale*

$$\mathbf{N}(u^1, u^2) \doteq \frac{\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2}{\|\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2\|}.$$

Assumeremo quindi come sistema di riferimento intrinseco per ogni punto di una superficie la tripletta  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{N}$ , tripletta ottenuta dalla particolare parametrizzazione locale  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Consideriamo ora una curva regolare definita su un intervallo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  a valori in  $A$ ; la composizione di questa curva con  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  è  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(u^1(t), u^2(t))$ , curva regolare sul foglio semplice  $\mathbf{P}$ .

Possiamo quindi ricavare il vettore tangente  $\mathbf{t}$  alla curva in ogni suo punto  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}(t) = \frac{du^i}{dt}(t) \mathbf{P}_i(u^1(t), u^2(t)). \quad (1.1)$$

Ricordiamo inoltre che intenderemo con *curva* quella che in realtà è una classe di equivalenza di curve parametrizzate (cfr. [Goe70, pag. 29, paragrafo 3.3]). Tra tutte le possibili parametrizzazioni di una curva considereremo, in questi primi paragrafi, solo quelle definite tramite un parametro d'arco  $s$ .

Ricordiamo ora brevemente cosa si intende per prima e seconda forma fondamentale di un foglio semplice:

**Definizione 1.1.4.** Sia  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione locale per una superficie  $S$  in un suo punto  $Q$ . Chiamiamo *prima forma fondamentale* definita sul piano tangente alla superficie in  $Q$ , la forma quadratica, definita positiva, rappresentata dalla matrice  $\mathbf{G} = [g_{ij}]$  con  $g_{ij} = \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j$ ,  $i, j = 1, 2$ , dove  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  è la base di  $\mathbf{T}_Q S$ .

Denoteremo con  $g$  il determinante di  $\mathbf{G}$  e con  $[g^{hk}]$  l'inversa di tale matrice. La prima forma fondamentale è profondamente legata alla metrica di un foglio: attraverso di essa infatti è possibile calcolare la lunghezza di un arco di curva tracciata sul supporto, l'angolo compreso tra due vettori di  $\mathbf{T}_Q S$ , l'area di una porzione compatta del supporto del foglio e la curvatura del foglio.

Si ha inoltre che la matrice  $\mathbf{G}$ , tramite un'isometria, viene trasformata da

una congruenza in modo che la forma quadratica che essa rappresenta resti invariata. Anzi si può dire di più, una funzione tra fogli è un'isometria se e solo se conserva la prima forma fondamentale. (cfr. [Goe70, pag. 201, paragrafo 20.2])

**Definizione 1.1.5.** Sia  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione locale per una superficie  $S$  in un suo punto  $Q$ . Chiamiamo *seconda forma fondamentale* definita sul piano tangente alla superficie in  $Q$ , la matrice  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  con  $b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N}$ ,  $i, j = 1, 2$ , dove  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{N}$  è la tripletta che definisce il sistema di riferimento intrinseco, dato da  $\mathbf{P}$ , in  $Q$  su  $S$ .

Data una parametrizzazione locale  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  di una superficie  $S$  in un suo punto  $Q$ , ogni vettore delle derivate parziali del secondo ordine  $\mathbf{P}_{ij}$  valutato in  $Q$ , come anche ogni altro vettore di  $\mathbb{R}^3$ , può essere rappresentato come combinazione lineare dei tre vettori linearmente indipendenti  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{N}$  calcolati nel punto.

Denoteremo questi coefficienti rispettivamente come  $\Gamma_{ij}^1, \Gamma_{ij}^2, \beta_{ij}$ . Abbiamo quindi

$$\mathbf{P}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{P}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{P}_2 + \beta_{ij} \mathbf{N}.$$

Notiamo che moltiplicando scalarmente entrambi i lati per  $\mathbf{N}$  si ottiene  $\beta_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N} = b_{ij}$ ; si hanno allora le *formule di Gauss*:

$$\mathbf{P}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{P}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{P}_2 + b_{ij} \mathbf{N}. \quad (1.2)$$

**Definizione 1.1.6.** I coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  sono detti *simboli di Christoffel di seconda specie* della parametrizzazione locale  $\mathbf{P}$ .

Esprimiamo ora le derivate parziali rispetto a  $u^1, u^2$  del versore normale  $\mathbf{N}$  come combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ :

$$\mathbf{N}_1 = -x_1^1 \mathbf{P}_1 - x_1^2 \mathbf{P}_2, \quad \mathbf{N}_2 = -x_2^1 \mathbf{P}_1 - x_2^2 \mathbf{P}_2.$$

Allo scopo di determinare la relazione che lega i coefficienti  $x_i^j$  alle entrate delle matrici che rappresentano le forme fondamentali, svolgiamo questi semplici passaggi:

(ricordiamo che  $\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{N} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{N}_i = 0$ )

$$\mathbf{N}_i = -x_i^k \mathbf{P}_k$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_i \mathbf{P}_j &= -x_i^k \mathbf{P}_k \mathbf{P}_j \\
-\mathbf{N} \mathbf{P}_{ij} &= -x_i^k \mathbf{P}_j \mathbf{P}_k \\
b_{ij} &= x_i^k g_{kj}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Grazie alle formule di Gauss (1.2) e alle relazioni appena ottenute si ottiene il seguente

**Teorema 1.1.1. (Relazione di Weingarten)** Detta  $\mathbf{X}$  la matrice dei coefficienti  $x_i^j$  tali che  $\mathbf{N}_i = -x_i^j \mathbf{P}_j$ , si ha che  $\mathbf{B} = \mathbf{XG}$ .

Riprendiamo ora le equazioni viste precedentemente (1.2)

$$\mathbf{P}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{P}_k + b_{ij} \mathbf{N}.$$

Moltiplicando scalarmente entrambi i lati per  $\mathbf{P}_r$  e ricordando che  $\mathbf{P}_r \mathbf{N} = 0$  otteniamo

$$\mathbf{P}_{ij} \mathbf{P}_r = \Gamma_{ij}^k \mathbf{P}_k \mathbf{P}_r = \Gamma_{ij}^k g_{kr}.$$

**Definizione 1.1.7.** I prodotti  $\mathbf{P}_{ij} \mathbf{P}_r$  sono detti *simboli di Christoffel di prima specie* della parametrizzazione locale  $\mathbf{P}$  e si denotano con  $\Gamma_{ijr}$ .

**Osservazione 1.1.1.** I simboli di Christoffel di prima e seconda specie sono quindi tra loro legati nel seguente modo:  $\Gamma_{ijr} = \Gamma_{ij}^k g_{kr}$ .

Ricordiamo (Cfr. [Goe70, pag. 181, paragrafo 18.2]) che risulta inoltre possibile esprimere i simboli di Christoffel di seconda specie in termini dei coefficienti della prima forma fondamentale e delle loro derivate:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right). \tag{1.4}$$

Concludiamo infine questi brevi richiami di teoria locale delle superfici immerse in  $\mathbb{R}^3$  ricordandone alcuni risultati tra i piú importanti.

**Teorema 1.1.2. (Formule di Gauss-Codazzi)** I coefficienti della prima e seconda forma fondamentale di una superficie soddisfano le seguenti equazioni:

$$b \doteq \det \mathbf{B} = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - (\Gamma_{11}^s \Gamma_{22}^r - \Gamma_{12}^s \Gamma_{12}^r) g_{sr},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + \Gamma_{11}^k b_{k2} &= \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^k b_{k1}, \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + \Gamma_{21}^k b_{k2} &= \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + \Gamma_{22}^k b_{k1}.\end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Cfr. [Goe70, pag. 185, paragrafo 18.3] □

**Teorema 1.1.3. (Teorema egregium di Gauss)** Detta  $K = \det \mathbf{X}$  la curvatura di Gauss di una superficie in un suo punto, si ha che questa dipende solo dalle entrate della matrice che rappresenta la prima forma fondamentale e dalle loro derivate del primo e del secondo ordine.

*Dimostrazione.* Cfr. [Goe70, pag. 186, paragrafo 18.3] □

**Teorema 1.1.4. (Teorema di Bonnet)** Due forme quadratiche  $\mathbf{M} = g_{ij} du^i du^j$  con coefficienti di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  e  $\mathbf{L} = b_{ij} du^i du^j$  di classe almeno  $\mathcal{C}^1$  definite in un aperto convesso del piano  $(u^1, u^2)$  sono, in qualche intorno di ogni punto di questo dominio, la prima e la seconda forma fondamentale di un foglio semplice di superficie  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(u^1, u^2)$  se e solo se:

- 1)  $g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 > 0$ ,  $g_{11} > 0$ ;
- 2) i coefficienti  $g_{ij}$  e  $b_{ij}$  soddisfano le equazioni di Gauss-Codazzi, dove i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  si ricavano secondo la formula già vista (1.4)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right).$$

*Dimostrazione.* Cfr. [Goe70, pag. 190, paragrafo 18.4] □

## 1.2 Curve geodetiche

Data una curva  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$  nello spazio, denotiamo con  $\dot{\mathbf{P}}$  la derivata prima di  $\mathbf{P}$  rispetto al parametro d'arco  $s$  e con  $\ddot{\mathbf{P}}$  la derivata seconda.

Ad ogni suo punto è possibile associare un sistema di riferimento intrinseco dato dalla tripletta  $\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$ , versori ricavati rispettivamente come

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{P}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{P}}}{\|\ddot{\mathbf{P}}\|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}. \quad (1.5)$$

**Definizione 1.2.1.** Chiamiamo *vettore di curvatura* della curva in ogni suo punto  $\mathbf{P}(s)$  il vettore  $\mathbf{k} = \ddot{\mathbf{P}}(s) = k\mathbf{n}$ , dove  $k = \|\ddot{\mathbf{P}}(s)\|$  indica la curvatura della curva in  $\mathbf{P}(s)$ .

Se la curva giace su una superficie, è possibile scomporre il vettore  $\mathbf{k}$  nelle due componenti tangente e normale alla superficie nel punto  $\mathbf{P}(s)$ .

**Definizione 1.2.2.** La componente tangente di  $\mathbf{k}$  è detta *vettore di curvatura geodetica* e viene indicata con  $\mathbf{k}_g$ , la seconda componente  $\mathbf{k}_n$  è invece il *vettore di curvatura normale*.

Supponiamo che la curva sia del tipo  $u^i = u^i(s)$ . Allora l'equazione della curva sarà  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(u^1(s), u^2(s))$  e di conseguenza

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}_i \frac{du^i}{ds}, \\ \ddot{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \mathbf{P}_i \frac{d^2u^i}{ds^2}.\end{aligned}$$

Ricordando le formule di Gauss (1.2) si calcola

$$\ddot{\mathbf{P}} = (\Gamma_{ij}^k \mathbf{P}_k + b_{ij} \mathbf{N}) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \mathbf{P}_k \frac{d^2u^k}{ds^2}. \quad (1.6)$$

Quindi, poichè  $\mathbf{k} = \ddot{\mathbf{P}}$ , si ha

$$\mathbf{k} = \left( \frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \mathbf{P}_k + b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \mathbf{N},$$

da cui è facile estrarre

$$\mathbf{k}_g = \left( \frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \mathbf{P}_k, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{k}_n = b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \mathbf{N}. \quad (1.8)$$

**Osservazione 1.2.1.** Il vettore di curvatura geodetica  $\mathbf{k}_g$  di una curva su  $S$  nel punto  $Q$ , data un'isometria tra due superfici  $S$  e  $S'$ , è mappato nel vettore di curvatura geodetica dell'immagine della curva su  $S'$  nel punto immagine di  $Q$  e la sua norma rimane invariata.

Abbiamo visto che il vettore di curvatura geodetica  $\mathbf{k}_g$  in ogni punto  $Q$  di una curva tracciata sul supporto di un foglio semplice  $\mathbf{P}$  (parametrizzazione locale di una superficie  $S$  cui il punto  $Q$  appartiene), è la proiezione ortogonale del vettore  $\mathbf{k}$  su  $\mathbf{T}_Q S$ . Consideriamo ora, oltre al vettore tangente  $\mathbf{t}$ , un altro versore  $\mathbf{u} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{t} \in \mathbf{T}_Q S$ , dove  $\mathbf{N}$  è il versore normale ad  $S$  rispetto a  $\mathbf{P}$  valutato in  $Q$ .

**Definizione 1.2.3.** Il versore  $\mathbf{u} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}$  è detto *normale geodetica* della curva in ogni suo punto  $Q$ .

Si ricorda che il verso di  $\mathbf{u}$  dipende dall'orientazione della superficie.

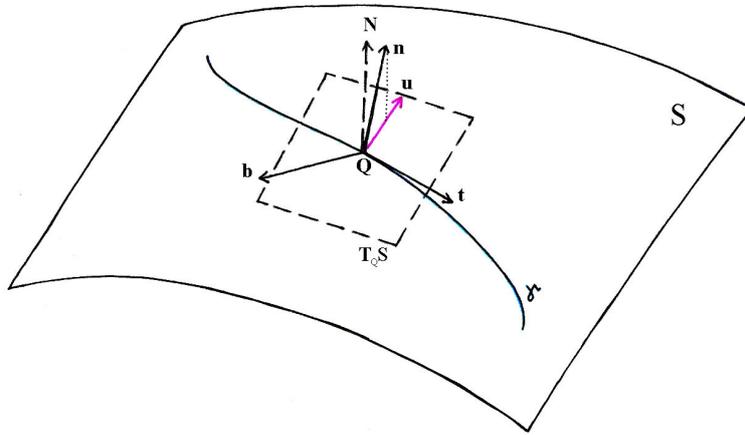


Figura 1.1:  $\mathbf{N} \perp \mathbf{T}_Q S$ ,  $\mathbf{t}, \mathbf{u} \in \mathbf{T}_Q S$ ,  $\mathbf{n}$  non è parallelo a  $\mathbf{N}$

Ora, poichè  $\mathbf{k}_g$  e  $\mathbf{u}$  hanno la stessa direzione, ortogonale a  $\mathbf{N}$  e a  $\mathbf{t}$ , possiamo scrivere

$$\mathbf{k}_g = k_g \mathbf{u}.$$

**Definizione 1.2.4.** Il coefficiente  $k_g$  introdotto nella precedente relazione si chiama *curvatura geodetica* della curva sulla superficie  $S$  nel suo punto  $Q$ .

**Teorema 1.2.1.** Il valore assoluto di  $k_g$  dipende solamente dalle entrate della prima forma fondamentale. Infatti vale la seguente relazione:

$$k_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \\ \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} & \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \end{array} \right|. \quad (1.9)$$

*Dimostrazione.* Per la (1.7) abbiamo visto che

$$k_g = \mathbf{k}_g \mathbf{u} = \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \mathbf{P}_k \mathbf{u},$$

ma vale anche che

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i \mathbf{u} &= \mathbf{P}_i (\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}) = \mathbf{N} (\mathbf{t} \wedge \mathbf{P}_i), \\ \mathbf{t} &= \frac{du^k}{ds} \mathbf{P}_k. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbf{P}_i \mathbf{u} = \frac{du^k}{ds} (\mathbf{P}_k \wedge \mathbf{P}_i) \mathbf{N},$$

$$\frac{du^k}{ds} (\mathbf{P}_k \wedge \mathbf{P}_1) = \frac{du^2}{ds} (\mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_1) = -\frac{du^2}{ds} (\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2) = -\sqrt{g} \frac{du^2}{ds} \mathbf{N},$$

poichè  $\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 = \sqrt{g} \mathbf{N}$ . Similmente

$$\frac{du^k}{ds} (\mathbf{P}_k \wedge \mathbf{P}_2) = \sqrt{g} \frac{du^1}{ds} \mathbf{N}.$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \mathbf{u} &= -\sqrt{g} \frac{du^2}{ds}, \\ \mathbf{P}_2 \mathbf{u} &= \sqrt{g} \frac{du^1}{ds}, \end{aligned}$$

che sostituiti nella prima equazione scritta danno la tesi.  $\square$

**Osservazione 1.2.2.** Un cambio di orientazione della curva cambia il segno della prima riga del determinante, ma non ha effetti sulla seconda riga, quindi produce un cambio del segno della curvatura geodetica  $k_g$ .

Il calcolo di  $k_g$  tramite la (1.9) è valido solamente nel caso di curve parametrizzate con un parametro d'arco; vediamo allora brevemente come il teorema si modifica in presenza di un parametro  $t$  che non è parametro d'arco.

**Teorema 1.2.2.** La curvatura geodetica  $k_g$  di una curva  $\mathbf{P}(t)$ , di parametro  $t$  generico, su una superficie  $S$  parametrizzata localmente da un'applicazione  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  si calcola tramite l'equazione

$$k_g = \frac{\sqrt{g}}{\left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{3/2}} \begin{vmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} & \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

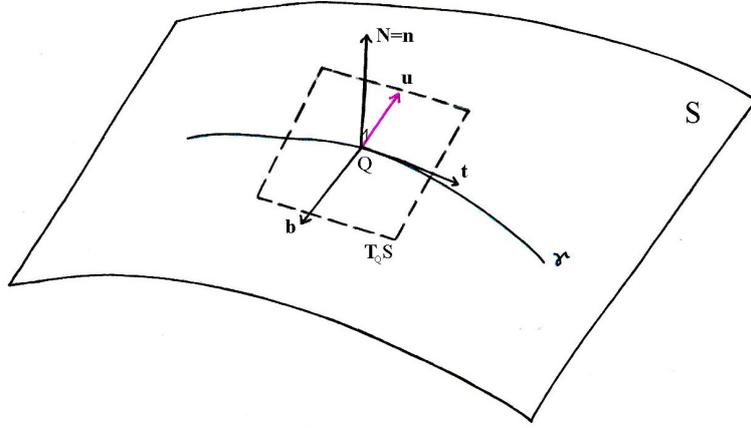


Figura 1.2:  $\mathbf{N} \perp \mathbf{T}_Q S$ ,  $\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{T}_Q S$ ,  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$

*Dimostrazione.* Indicando come sempre con  $s$  un parametro d'arco, per una generica parametrizzazione  $t$  di una curva  $\mathbf{P}(t)$  si ha

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{du^k}{dt} \frac{dt}{ds} = \left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{-1/2} \frac{du^k}{dt},$$

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} = \frac{d^2 u^k}{dt^2} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{du^k}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} = \left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{-2} \frac{d^2 u^k}{dt^2} + \frac{du^k}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2}.$$

Sostituiamo quindi quanto trovato nell'equazione data dal Teorema 1.2.1 e sottraiamo dalla seconda riga della matrice la prima, moltiplicata precedentemente per

$$\left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{1/2} \frac{d^2 t}{ds^2}.$$

□

Si hanno inoltre le seguenti proprietà:

**Proposizione 1.2.1.** Cfr. [Goe70, pag. 218, paragrafo 21.3]

1. Se i supporti di due fogli semplici sono tangenti lungo una curva  $\gamma$  comune su cui hanno la stessa orientazione, allora la curvatura geodetica di  $\gamma$  è la stessa per entrambi i fogli. Se le orientazioni sono opposte, allora anche i valori delle curvatures sono opposti.

2. Se i supporti di due fogli semplici si intersecano perpendicolarmente lungo una curva  $\gamma$ , allora in ogni punto il vettore di curvatura geodetica di  $\gamma$  rispetto a uno dei fogli coincide con il vettore di curvatura normale di  $\gamma$  rispetto all'altro foglio e viceversa.

Possiamo finalmente introdurre la seguente

**Definizione 1.2.5.** Una *curva geodetica* o più brevemente una *geodetica* su una superficie  $S$  è una curva tracciata su  $S$  la cui curvatura geodetica è nulla in ogni suo punto.

Dal momento che il valore assoluto della curvatura geodetica è invariante per isometrie (cfr. Osservazione 1.2.1), anche la nozione di curva geodetica appartiene alla geometria intrinseca di una superficie.

Utilizzando un parametro d'arco, possiamo ottenere delle equazioni differenziali che determinino le curve geodetiche su una superficie semplicemente imponendo uguale a zero (1.9), ma useremo invece il sistema lineare del second'ordine ottenuto annullando ciascuna delle componenti del vettore  $\mathbf{k}_g$ , facendo riferimento all'equazione (1.7). Infatti, in questo caso, ciò è equivalente all'imporre che la norma del vettore  $\mathbf{k}_g$  sia nulla, dato che la matrice  $\mathbf{G}$  è definita positiva:  $\mathbf{k}_g$  è parallelo a  $\mathbf{t}$  se e solo se  $\mathbf{k}_g = \mathbf{0}$ .

Si ha quindi il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0. \quad (1.11)$$

Questo è un sistema del second'ordine in cui  $k = 1, 2$ . Poniamo  $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$  e  $\mathbf{v} = d\mathbf{u}/ds$ ; sia quindi  $U \subseteq \mathbb{R}^4$  un aperto di coordinate  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  una funzione  $\mathcal{C}^1$ . Notiamo allora che il sistema (1.11) si può riscrivere nella forma

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{ds^2} = F\left(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{ds}\right).$$

E' naturale in questa situazione richiamare il

**Teorema 1.2.3. (Teorema di esistenza e unicità)** Dati  $U \subseteq \mathbb{R}^4$  e  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in$

$U$ , esiste  $\epsilon > 0$  tali che il problema

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{u}}{ds^2} = F(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{ds}), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds}(0) = \mathbf{v}_0. \end{cases}$$

ha un'unica soluzione  $s \mapsto \mathbf{u}(s)$  definita per  $|s| < \epsilon$ .

*Dimostrazione.* Cfr. [Dup93, pag. 35, capitolo 3] □

Da quanto detto appare ora immediato il

**Teorema 1.2.4.** Per ogni punto  $Q$  di una superficie  $S$  passa una e una sola curva geodetica che abbia come vettore tangente il versore arbitrariamente fissato  $\mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione locale per la superficie  $S$  nel punto  $Q$  in modo che si abbiano  $\mathbf{a} = \alpha^i \mathbf{P}_i$  e  $Q = (u_0^1, u_0^2)$ . Allora una curva, passante per  $Q$  con direzione  $\mathbf{a}$ , è una geodetica per  $S$  se e solo se le sue equazioni  $u^i = u^i(s)$  sono soluzione del sistema differenziale (1.11) con valori iniziali  $u^i = u_0^i, du^i/ds = \alpha^i$ .

I coefficienti  $\alpha^i$ , quando utilizzati come valori iniziali per  $du^i/ds$ , devono soddisfare la condizione che  $s$  sia parametro d'arco

$$g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1, \tag{1.12}$$

ma l'ipotesi fatta che  $\mathbf{a}$  sia unitario rende questa condizione sempre vera.

Per il Teorema 1.2.3 di esistenza e unicità della teoria delle equazioni differenziali, tale soluzione esiste ed è unica se le funzioni  $\Gamma_{ij}^k$  sono  $\mathcal{C}^1$ . Abbiamo allora raggiunto il nostro scopo, dato che l'assunzione fatta che un foglio semplice sia di classe  $\mathcal{C}^\infty$  implica che i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  siano di classe  $\mathcal{C}^1$ . □

Il seguente teorema ci illustra invece un'altra conseguenza di quanto abbiamo fin qui appreso.

**Teorema 1.2.5.** Una curva regolare  $\gamma$  su una superficie  $S$  è una geodetica se e solo se in ogni suo punto  $Q$  il piano osculatore di  $\gamma$  in  $Q$  è ortogonale a  $\mathbf{T}_Q S$  o se la curvatura di  $\gamma$  in  $Q$  è zero.

*Dimostrazione.* La tesi discende immediatamente dal fatto che  $k_g = 0$  se e solo se  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{N}$  sono dipendenti, il che avviene se e solo se o  $\mathbf{k} = 0$  o il versore normale alla curva  $\mathbf{n}$  e il versore normale alla superficie  $\mathbf{N}$  sono dipendenti. Questa ultima condizione equivale a richiedere che il piano osculatore contenga la normale alla superficie, e quindi che sia ortogonale al piano tangente.  $\square$

### 1.3 Coordinate semigeodetiche

Il Teorema 1.2.1 ci permette di determinare le curve geodetiche su ogni superficie  $S$ , a partire semplicemente dalla prima forma fondamentale di una sua parametrizzazione locale  $\mathbf{P}$ . Si nota subito però come la determinazione non sia certo immediata, perchè comporta la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali in cui compaiono le funzioni  $\Gamma_{ij}^k$ , e sappiamo che per ricavarle occorre usare l'equazione (cfr. (1.4))

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right).$$

Introduciamo quindi quelle che si usano chiamare *coordinate semigeodetiche*, strumenti che, come vedremo, rendono il procedimento più semplice.

Naturalmente si tratta di una trattazione teorica, analoga all'introduzione del parametro arco per le curve, nella pratica l'utilizzo di queste coordinate comporta calcoli non meno semplici dei precedenti.

Si scelga un'arbitraria curva regolare  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$  su una superficie  $S$  che sia passante per un punto  $Q \in S$  e si denoti con  $u^2$  il suo parametro naturale, in modo che  $Q$  corrisponda al valore  $u^2 = 0$ .

Si tracci ora, per ogni punto  $Q'$  della curva  $\sigma$ , la curva geodetica  $\gamma = \gamma_{Q'}$  determinata dalla normale geodetica  $\mathbf{u}$  di  $\sigma$  in  $Q'$  e sia  $u^1$  il parametro naturale di questa curva.

I due parametri  $u^1, u^2$  determinano la posizione di ogni punto contenuto nel

dominio spazzato da queste linee geodetiche e possono quindi essere considerate, in un intorno  $\mathcal{U}$  del punto  $Q$ , come coordinate curvilinee di una rappresentazione parametrica regolare della superficie  $S$ .

Vediamo meglio cosa succede: denotiamo con  $v^1, v^2$  delle coordinate curvilinee in un intorno  $\mathcal{U}$  di  $Q$ . Scegliamo la nostra curva  $\sigma$  come  $v^i \doteq \phi^i(\tau)$ , con  $\tau$  parametro naturale tale che  $a < \tau < b$  e siano quindi  $v_0^i = \phi^i(0)$  le coordinate di  $Q$  sul piano  $(v^1, v^2)$ .

Consideriamo ora il sistema

$$\frac{d^2 v^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(v^1, v^2) \frac{dv^i}{dt} \frac{dv^j}{dt} = 0 \quad k = 1, 2. \quad (1.13)$$

Vogliamo costruire un'applicazione  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definita in un aperto del piano  $(t, \tau)$  tale che  $\tau \in (a, b)$  e  $t \in (-\eta, \eta)$ , dipendente da due parametri  $\xi^1, \xi^2$  con  $\alpha < \xi^1 < \beta, \mu < \xi^2 < \nu$ , e vogliamo che essa soddisfi

$$\Psi^k(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \phi^k(\tau), \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial t}(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \xi^k, \quad (1.15)$$

Grazie al Teorema 1.2.4, per ogni valore finito di  $\tau$  esiste unica la soluzione del sistema (1.13) passante per il punto di coordinate  $(\phi^1(\tau), \phi^2(\tau))$  con vettore tangente di coordinate  $(\xi^1, \xi^2)$ ; quindi è possibile costruire la  $\Psi$  per un opportuno intervallo  $(-\eta, \eta)$  dell'asse delle  $t$ .

Ora, se qualche funzione  $v^k = \varphi^k(t)$  è soluzione del sistema (1.13) con dati iniziali  $\varphi^k(0) = \phi^k(\tau)$ ,  $d\varphi^k/dt(0) = \lambda \xi^k$  dove  $\lambda$  è una costante non nulla, allora anche le funzioni  $\omega^k(t) = \varphi^k(t/\lambda)$  sono soluzioni per il sistema (1.13) con dati iniziali  $\omega^k(0) = \phi^k(\tau)$ ,  $d\omega^k/dt(0) = \xi^k$ .

Per l'unicità della soluzione si ha quindi che la  $\Psi$  deve soddisfare la relazione

$$\Psi^k\left(\frac{t}{\lambda}, \tau, \lambda \xi^1, \lambda \xi^2\right) = \Psi^k(t, \tau, \xi^1, \xi^2).$$

Quindi, ponendo  $\lambda = t/\eta$ , otteniamo

$$\Psi^k(\eta, \tau, t\xi^1/\eta, t\xi^2/\eta) = \Psi^k(t, \tau, \xi^1, \xi^2). \quad (1.16)$$

Derivando entrambi i membri dell'uguaglianza rispetto a  $t$  e calcolando il risultato in  $t = 0$  (cfr. (1.15)) si ottiene

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial \xi^i}(\eta, \tau, 0, 0) \frac{\xi^i}{\eta} = \xi^k, \quad (1.17)$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \xi^1}(\eta, \tau, 0, 0) \frac{\xi^1}{\eta} + \frac{\partial \Psi^1}{\partial \xi^2}(\eta, \tau, 0, 0) \frac{\xi^2}{\eta} = \xi^1, \\ \frac{\partial \Psi^2}{\partial \xi^1}(\eta, \tau, 0, 0) \frac{\xi^1}{\eta} + \frac{\partial \Psi^2}{\partial \xi^2}(\eta, \tau, 0, 0) \frac{\xi^2}{\eta} = \xi^2. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial \xi^i}(\eta, \tau, 0, 0) \frac{\xi^i}{\eta} = \xi^k \delta_i^k. \quad (1.18)$$

Dalla (1.14) e dalla (1.16) segue che per  $t = 0$

$$\frac{\partial \Psi^k}{\partial \tau}(\eta, \tau, 0, 0) = \frac{\partial \Psi^k}{\partial \tau}(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \dot{\phi}(\tau). \quad (1.19)$$

Poniamo ora  $t = u^1$  e  $\tau = u^2$  e denotiamo con  $a^1(u^2)$  e  $a^2(u^2)$  le componenti della normale geodetica  $\mathbf{u}(u^2)$  di  $\sigma$ . Sia ora  $Q'$  il punto della curva  $\sigma$  corrispondente al valore  $\widehat{u}^2$  fissato; poichè le curve geodetiche  $\gamma_{Q'}$  cercate sono soluzioni del sistema (1.13) con condizioni iniziali  $v^k(0) = \phi^k(\widehat{u}^2), dv^k/du^1 = a^k(u^2)$ , la loro equazione risulta essere

$$v^k = \Psi^k(u^1, u^2, a^1(u^2), a^2(u^2))$$

e, ponendo  $\lambda = u^1/\eta$ , si ha

$$v^k = \Psi^k(u^1, u^2, a^1(u^2), a^2(u^2)) = \Psi^k\left(\eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta}\right).$$

Calcoliamone le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial u^1} &= \frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi^j} \left( \eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta} \right) \frac{a^j(u^2)}{\eta}, \\ \frac{\partial v^i}{\partial u^2} &= \frac{\partial \Psi^i}{\partial u^2} \left( \eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta} \right) + \frac{u^1}{\eta} \frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi^j} \left( \eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta} \right) \frac{da^j}{du^2}. \end{aligned}$$

Nel punto  $Q$ , che corrisponde a  $u^1 = u^2 = 0$ , abbiamo che (cfr. (1.17)):

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^1} = a^i(0), \quad \frac{\partial v^i}{\partial u^2} = \dot{\phi}^i(0).$$

Ma  $a^i(0)$  e  $\dot{\phi}^i(0)$  sono le componenti di due vettori ortogonali non nulli, quindi il determinante della matrice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a^1(0) & a^2(0) \\ \dot{\phi}^1(0) & \dot{\phi}^2(0) \end{pmatrix}$$

è diverso da zero ed è lo Jacobiano del cambiamento di coordinate da  $(v^1, v^2)$  a  $(u^1, u^2)$  in  $Q$ . Quindi in un opportuno intorno  $\mathcal{U}$  di  $Q$  possiamo trasformare il foglio iniziale in uno equivalente assegnando le coordinate curvilinee  $(u^1, u^2)$ . Come richiesto allora, nelle nuove coordinate  $(u^1, u^2)$ , la curva iniziale  $\sigma$  ha equazione  $u^1 = 0$ , la curva geodetica  $\gamma_{Q'}$  ha invece equazione  $u^2 = \widehat{u}^2$ .

Consideriamo una qualsiasi di queste geodetiche  $\gamma$  di equazione

$$\begin{cases} u^1 = s \\ u^2 = \text{costante}, \end{cases}$$

supponendo  $s$  parametro arco per  $\gamma$ .

Si ha allora

$$\frac{du^1}{ds} = 1, \quad \frac{du^2}{ds} = 0, \quad \frac{d^2u^i}{ds^2} = 0.$$

Poichè tale curva deve soddisfare le equazioni (1.11), si ottiene

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0. \quad (1.20)$$

Notiamo che ciò equivale a chiedere che (cfr. (1.4))

$$\frac{1}{2}g^{kr} \left( \frac{\partial g_{1r}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{r1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^r} \right) = 0.$$

Dalla condizione (1.12), che cioè  $s$  sia parametro d'arco, si ottiene poi

$$g_{11} = 1, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} = 0;$$

Queste condizioni, unite a (1.20), implicano anche che

$$g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0, \quad g^{22} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0.$$

Ma non possono annullarsi contemporaneamente  $g^{12}$  e  $g^{22}$ , altrimenti il determinante dell'inversa della prima forma fondamentale, e quindi anche quello della forma stessa, si annullerebbero di conseguenza.

Quindi deve essere  $\partial g_{12} / \partial u^1 = 0$ , cioè  $g_{12}$  non dipende da  $u^1$ .

Ma l'angolo tra la curva  $u^1 = 0$  e una qualsiasi geodetica  $u^2 = \text{costante}$  è un angolo retto per costruzione, e di conseguenza  $g_{12}(0, u^2) = 0$  per ogni  $u^2$ ; quindi il coefficiente  $g_{12}$  non dipendendo nemmeno da  $u^2$  è la costante zero.

Rispetto a tali coordinate, se denotiamo  $g_{22}(u^1, u^2)$  con  $g(u^1, u^2)$ , vediamo che la matrice che rappresenta la prima forma fondamentale è

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

Essendo quindi la matrice  $\mathbf{G}$  diagonale, si ha che le linee coordinate si tagliano secondo angoli retti.

**Definizione 1.3.1.** Chiamiamo *semigeodetiche* le coordinate  $(u^1, u^2)$ ; la denominazione è dovuta al fatto che, utilizzando queste coordinate, una famiglia di linee coordinate è composta di geodetiche, mentre l'altra consiste di traiettorie ortogonali alle prime.

Infine scriviamo come appaiono ora i simboli di Christoffel di seconda specie:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^1}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u^1}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Siamo quindi pronti a riscrivere le equazioni delle geodetiche:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u^1} \left( \frac{du^2}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u^1} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^2} \left( \frac{du^2}{ds} \right)^2 = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

## 1.4 Proprietà fondamentali delle curve geodetiche

Vedremo ora un risultato dal quale, come preannunciato nel titolo, discendono una serie di importanti proprietà che rendono le geodetiche oggetto di studio interessante.

**Definizione 1.4.1.** Siano  $Q$  e  $Q'$  due punti su una superficie  $S$  parametrizzata localmente da un foglio semplice  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Chiamiamo *cammino*

$\overline{QQ'}$  il supporto, giacente in  $S$ , di ogni curva regolare  $\sigma$ , di parametro generico  $t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , che unisce  $Q$  e  $Q'$ .

E' noto che la *lunghezza del cammino*  $\overline{QQ'}$  si calcola mediante l'integrale

$$L(\sigma) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt.$$

**Teorema 1.4.1.** Sia  $Q$  un punto della superficie  $S$ ,  $\mathcal{U}$  un suo intorno aperto e  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathcal{U}$  una parametrizzazione locale di  $S$ . L'arco di una curva geodetica  $\gamma$  passante per il punto  $Q$  e giacente interamente in  $\mathcal{U}$  è il cammino più breve che congiunge  $Q$  con un qualsiasi altro punto di  $\gamma$ , rispetto a ogni altra curva tracciata nell'intorno  $\mathcal{U}$ .

*Dimostrazione.* Data la geodetica  $\gamma$ , si tracci una curva sulla superficie passante per  $Q$  e ortogonale a  $\gamma$ . Usiamo questa curva come base per la costruzione di un sistema di coordinate semigeodetiche in  $\mathcal{U}$ :

con una scelta appropriata della parametrizzazione della curva, possiamo avere come coordinate di  $Q$  la coppia  $(0, 0)$  e, come equazione di  $\gamma$ ,  $u^2 = 0, u^1 = t$ . Fissato nell'intorno  $\mathcal{U}$  un punto  $Q' \in \gamma$ , possiamo supporre che  $Q'$  corrisponda al valore  $t = 1$  del parametro. Si scelga ora una qualsiasi curva  $u^i = u^i(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , che connetta  $Q$  e  $Q'$  all'interno di  $\mathcal{U}$ ; la lunghezza di quest'ultima curva è

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + g \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt. \quad (1.22)$$

Lungo  $\gamma$  invece, la distanza  $\overline{QQ'}$  per la costruzione fatta vale

$$\left| \int_0^1 \frac{du^1}{dt} dt \right| = |u^1(1)|, \quad (1.23)$$

dove  $u^1(1)$  è la prima coordinata di  $Q'$ .

Poiché  $g > 0$ , vale la disuguaglianza

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + g \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt \geq \int_0^1 \left| \frac{du^1}{dt} \right| dt \geq \left| \int_0^1 \frac{du^1}{dt} dt \right|,$$

e si ha quindi la tesi. □

**Osservazione 1.4.1.** Questa proprietà non vale globalmente, si pensi a due punti non antipodali  $Q$  e  $Q'$  posti su di una sfera (sulla sfera le geodetiche

sono i cerchi massimi, cfr. Esempio 3.1.1):  $Q$  e  $Q'$  sono uniti da due archi di geodetica, uno più lungo e uno più corto, appartenenti entrambi al cerchio massimo che li congiunge.

La proprietà delle curve geodetiche illustrata nel Teorema 1.4.1 ci fa immediatamente pensare alle rette sul piano, e in effetti le geodetiche possono essere considerate l'analogo locale delle rette su una qualsiasi superficie.

Nella geometria assiomatica dei piani infatti, gli assiomi assegnano le caratteristiche agli oggetti fondamentali delle geometrie, i punti e le rette. Verificando o meno questi assiomi, vengono costruiti così modelli diversi di geometrie. In alternativa si può pensare di definire in modo astratto le rette, a partire dalle caratteristiche che si vuole che esse abbiano, e dimostrare come questa definizione si realizza nei vari modelli, Euclidei e non.

Con riferimento alla caratteristica principale, da un punto di vista differenziale, delle rette nel piano, diamo allora la seguente

**Definizione 1.4.2.** Chiamiamo *retta* su una superficie  $S$  ogni curva che, parametrizzata tramite un parametro naturale  $s$ , ha la componente tangenziale della derivata seconda rispetto a  $s$  nulla.

Vediamo che questo equivale a chiedere  $\ddot{\mathbf{P}}(s)\mathbf{P}_1 = 0$ ,  $\ddot{\mathbf{P}}(s)\mathbf{P}_2 = 0$ .  
Ma riprendendo la scrittura data dalle formule di Gauss (1.2)

$$\ddot{\mathbf{P}} = \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \mathbf{P}_k + b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \mathbf{N},$$

si vede che la richiesta fatta non è nient'altro che

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

Questo sistema è assolutamente identico a quello che definisce le geodetiche (cfr. (1.11)), il che è del tutto giustificato se ci si ricorda che  $\ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{k} = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n$ .  
A conclusione questo ragionamento scriviamo quindi la seguente

**Proposizione 1.4.1.** Le rette su una superficie  $S$  sono tutte e sole le curve geodetiche.

# Capitolo 2

## Completezza

### 2.1 Uno sguardo più moderno

**Definizione 2.1.1.** Sia  $S$  una superficie,  $\mathbf{P} : A \rightarrow S$  una sua parametrizzazione locale e  $\mathcal{U}$  un intorno di un punto  $Q \in S$  tale che  $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{P}(A)$ . Chiamiamo *derivazione* in  $Q$  una funzione lineare  $D : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa la regola di Leibnitz

$$D(fg) = f(Q)D(g) + g(Q)D(f),$$

dove per funzione  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  si intende una funzione che composta con  $\mathbf{P}$  sia  $\mathcal{C}^\infty$  su  $A$ .

Ogni vettore  $\mathbf{v}$  tangente in  $Q$  a una curva  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(u^1(t), u^2(t))$  su  $S$  dà luogo a una derivazione  $V_Q$  così definita: sia  $f$  una funzione  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  e supponiamo che il punto  $Q$  corrisponda al valore  $t = 0$ , allora vale (cfr. (1.1))

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\mathbf{P}(t))\Big|_{t=0} &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_Q \frac{d\mathbf{P}_x}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_Q \frac{d\mathbf{P}_y}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_Q \frac{d\mathbf{P}_z}{dt}\Big|_{t=0} = \\ &= f_x\Big|_Q \left( \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial u^i}\Big|_{u^1(0), u^2(0)} \frac{du^i}{dt}\Big|_{t=0} \right) + f_y\Big|_Q \left( \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial u^i}\Big|_{u^1(0), u^2(0)} \frac{du^i}{dt}\Big|_{t=0} \right) + \\ &\quad + f_z\Big|_Q \left( \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial u^i}\Big|_{u^1(0), u^2(0)} \frac{du^i}{dt}\Big|_{t=0} \right) = \\ &= \left( (\nabla f|_Q) \mathbf{P}_i\Big|_{u^1(0), u^2(0)} \right) \frac{du^i}{dt}\Big|_{t=0} = (\nabla f|_Q) \cdot \mathbf{v} \doteq V_Q(f), \end{aligned}$$

dove il prodotto  $(\nabla f|_Q) \cdot \mathbf{v}$  è l'usuale prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ .

L'insieme di tutte le derivazioni fissato un punto  $Q \in S$  forma uno spazio vettoriale due-dimensionale, che denotiamo con  $\text{Der}_Q S$ . Poichè esiste un isomorfismo  $\mathbf{T}_Q S \rightarrow \text{Der}_Q S$  (Cfr. [MA06, pag. 142, paragrafo 3.4]), possiamo identificare senza equivoci i due spazi.

**Definizione 2.1.2.** Sia  $S$  una superficie,  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  una sua parametrizzazione locale e  $\sigma$  una curva con supporto in  $\mathbf{P}(A)$ ; per ogni punto  $Q$  di  $\sigma$  sia  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  una derivazione. Chiamiamo *campo vettoriale lungo  $\sigma$*  l'insieme di tali derivazioni, ovvero una funzione continua  $\mathbf{v} : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{T}_{\sigma(t)} S \forall t \in (a, b)$ , con  $(a, b)$  dominio della curva  $\sigma$ .

L'insieme di tali campi vettoriali lungo  $\sigma$  costituisce uno spazio vettoriale reale con le consuete operazioni di somma e prodotto per un numero di  $\mathbb{R}$  e sarà indicato con  $\mathcal{T}(\sigma)$ .

Cerchiamo ora di misurare quanto varia un campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}(\sigma)$  lungo la curva  $\sigma$  stessa.

La curva  $\sigma$  è espressa mediante un parametro generico  $t$  su un intervallo  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.1.3.** Definiamo *derivata assoluta* di un campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}(\sigma)$  lungo la curva  $\sigma$  su  $S$ , il campo vettoriale  $D\mathbf{v} \in \mathcal{T}(\sigma)$  dato da

$$D\mathbf{v}(t) = \pi_{\sigma(t)} \left( \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \right), \quad (2.1)$$

dove  $\pi_{\sigma(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{T}_{\sigma(t)} S$  è la proiezione ortogonale su  $\mathbf{T}_{\sigma(t)} S$ .

Sia  $S$  una superficie,  $Q$  un punto su  $S$  e  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione locale di  $S$  la cui immagine contenga il supporto di una curva  $\sigma$  passante per  $Q$ ; rispetto alle coordinate locali  $(u^1, u^2)$ , se consideriamo come base di  $\mathbf{T}_Q S$  i vettori  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ , si ha  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{P}_i$ .

Il differenziale di  $\mathbf{v}$  nel punto  $Q$  risulta

$$d\mathbf{v} = dv^i \mathbf{P}_i + v^i d\mathbf{P}_i = dv^i \mathbf{P}_i + v^i \mathbf{P}_{ij} du^j$$

che per le formule di Gauss (1.2) è uguale a

$$d\mathbf{v} = (dv^k + \Gamma_{ij}^k v^i du^j) \mathbf{P}_k + b_{ij} v^i du^j \mathbf{N}.$$

Esso non è in generale un vettore tangente e, secondo la definizione data, ne consideriamo quindi la proiezione ortogonale su  $\mathbf{T}_Q S$ .

Ricordando inoltre che il vettore  $\mathbf{v}$  è tangente alla curva  $\sigma$  tracciata su  $S$ , e che quindi  $v^i = du^i/dt$ , si ottiene

$$Dv^k = \frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k v^i \frac{du^j}{dt} = \frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}. \quad (2.2)$$

Si noti che la derivata assoluta in un punto  $Q$  non dipende espressamente dalla curva  $\sigma$  scelta, bensì solo dal vettore ad essa tangente.

Ci interessa ora formalizzare l'idea di un vettore che non varia lungo una curva, e ne diamo la seguente

**Definizione 2.1.4.** Sia  $S$  una superficie,  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  una sua parametrizzazione locale e  $\sigma$  una curva con supporto in  $\mathbf{P}(A)$ . Un campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}(\sigma)$  si dice *parallelo* lungo  $\sigma$  se  $D\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ .

**Teorema 2.1.1.** Sia  $\sigma$  una curva su una superficie  $S$  come nella Definizione 2.1.4 con dominio  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  e sia  $t_0 \in (a, b)$ . Preso un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_{\sigma(t_0)} S$ , esiste ed è unico un campo vettoriale  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}(\sigma)$  parallelo tale che  $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{v}$ .

*Dimostrazione.* Per la (2.2), imporre  $D\mathbf{w} = \mathbf{0}$  significa risolvere un sistema di due equazioni differenziali lineari ordinarie. L'asserto segue quindi dal Teorema 1.2.3 di esistenza e unicità di soluzioni.

La soluzione risulta definita su un sottointervallo  $I$  di  $(a, b)$  contenente  $t_0$  e tale che  $\sigma(I)$  sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale. Sia ora  $I_0 \subset (a, b)$  l'intervallo massimale contenente  $t_0$  su cui sia definito un campo vettoriale  $\mathbf{w}$  parallelo tale che  $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{v}$ ; per assurdo sia  $I_0 \neq (a, b)$ , sia quindi  $t_1 \in (a, b)$  un estremo di  $I_0$  e sia data una parametrizzazione locale  $\tilde{\mathbf{P}} : V \rightarrow S$ , con  $\tilde{\mathbf{P}}(V)$  contenente un intorno di  $\sigma(t_1)$ .

Allora esiste  $t_2 \in I_0$  tale che  $\sigma(t_2) \in \tilde{\mathbf{P}}(V)$  e il Teorema 1.2.3 ci assicura l'esistenza di un unico campo vettoriale  $\tilde{\mathbf{w}}$  definito su  $\sigma^{-1}(\tilde{\mathbf{P}}(V))$  tale che  $\tilde{\mathbf{w}}(t_2) = \mathbf{w}(t_2)$ ; in particolare  $\tilde{\mathbf{w}}$  è definito anche in  $t_1$ . L'unicità della soluzione ci assicura che  $\mathbf{w}$  e  $\tilde{\mathbf{w}}$  coincidono sull'intersezione degli intervalli di definizione, per cui  $\tilde{\mathbf{w}}$  estende  $\mathbf{w}$  anche in un intorno di  $t_1$ , contro l'ipotesi che  $t_1$  fosse un estremo di  $I_0$ . Quindi  $I_0 \equiv (a, b)$ , come affermato.  $\square$

**Proposizione 2.1.1.** Sia  $\sigma$  una curva sulla superficie  $S$  come nella Definizione 2.1.4, con dominio  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  e sia  $t_0 \in (a, b)$ . Se  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  sono due campi vettoriali lungo  $\sigma$ , il prodotto scalare  $\mathbf{vw}$  è costante. In particolare, la norma di un campo parallelo è costante.

*Dimostrazione.* Per ogni coppia di campi vettoriali  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{T}(\sigma)$  vale

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{vw}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{w} + \mathbf{v}\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{w}D\mathbf{v} + \mathbf{v}D\mathbf{w};$$

Poichè per ipotesi  $D\mathbf{v} = D\mathbf{w} \equiv 0$ , si ha che  $\mathbf{vw}$  è costante.  $\square$

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per introdurre le curve geodetiche in modo più moderno, ovvero come curve che ammettono almeno una parametrizzazione che abbia vettore tangente parallelo.

**Definizione 2.1.5.** Sia  $S$  una superficie e  $\sigma$  una curva su  $S$  come nella Definizione 2.1.4, assegnata tramite un parametro arco  $s \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ . La curva  $\sigma$  è una *geodetica* su  $S$  se il campo vettoriale tangente alla curva  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}(\sigma)$  è parallelo, cioè se  $D\mathbf{v} \equiv 0$ , dove  $\mathbf{v}(s) \in \mathbf{T}_{\sigma(s)}S \quad \forall s \in (a, b)$ .

Consideriamo allora una curva  $\sigma$  come nella precedente definizione e ricordiamo che  $v^k = du^k/ds$ . La (2.2) ci dice che  $\sigma$  è una geodetica se e solo se

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0. \quad (2.3)$$

**Osservazione 2.1.1.** Poiché, come visto, il concetto di derivata assoluta, e quindi quello di parallelismo, è intrinseco, le isometrie locali mandano curve geodetiche in curve geodetiche.

Vediamo nel dettaglio cosa accade alla curvatura geodetica di una curva regolare  $\sigma : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$  su una superficie  $S$  parametrizzata con un parametro naturale.

**Definizione 2.1.6.** Sia  $\sigma$  una curva regolare come nella Definizione 2.1.5. Sia inoltre  $\mathbf{N}$  il campo dei versori normali lungo  $\sigma$  e  $\mathbf{t}$  il campo dei versori tangenti. Chiamiamo *curvatura geodetica* di  $\sigma$  la funzione  $k_g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$k_g = (D\mathbf{t})(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{t}}{ds}(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}). \quad (2.4)$$

In particolare, poichè  $D\mathbf{t} = k_g(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t})$  si ha  $k_g^2 = \|D\mathbf{t}\|^2$ .

Ricordiamo adesso che  $k^2 = \|\ddot{\mathbf{P}}(s)\|^2 = \|d\mathbf{t}/ds\|^2$  e  $|k_n|^2 = |\ddot{\mathbf{P}}\mathbf{N}|^2 = |(d\mathbf{t}/ds)\mathbf{N}|^2$ , ed enunciamo la seguente

**Proposizione 2.1.2.** Sia  $\sigma$  una curva regolare su una superficie  $S$  come nella Definizione 2.1.5. Allora  $\sigma$  è una geodetica se e solo se la sua curvatura  $k$  coincide con il modulo della sua curvatura normale  $|k_n|$ .

*Dimostrazione.* Per come sono state date le definizioni di curvatura  $k(s)$  e di curvatura normale  $k_n(s)$ , si ha che

$$k(s) = \|\ddot{\mathbf{P}}(s)\| = \sqrt{\|\mathbf{k}_g\|^2 + \|\mathbf{k}_n\|^2} = |k_n|$$

se e solo se  $\|\mathbf{k}_g\| = 0$ , cioè se e solo se  $\sigma$  è una geodetica.  $\square$

Riassumendo, considerando la seguente decomposizione ortogonale

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = D\mathbf{t} + \left(\mathbf{N}\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right)\mathbf{N},$$

si ha che

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2,$$

e che quindi se  $\sigma$  è assegnata tramite un parametro arco, allora  $\sigma$  è una curva geodetica se e solo se la sua curvatura geodetica è identicamente nulla.

Notiamo che per quanto detto finora, la Definizione 2.1.5 di geodetica sembra equivalente alla Definizione 1.2.5; infatti se si considera una parametrizzazione naturale della curva, si ha vede chiaramente che i sistemi (1.11) e (2.3) sono uguali.

Tuttavia se si considera una parametrizzazione generica, la Definizione 2.1.5 è più restrittiva, con la conseguenza paradossale che in una stessa classe di equivalenza di curve vi sono delle parametrizzazioni che sono geodetiche e delle parametrizzazioni che non lo sono.

Per vedere ciò consideriamo la

**Proposizione 2.1.3.** Sia  $\sigma$  una curva sulla superficie  $S$  con dominio  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  e sia  $t_0 \in (a, b)$ . Se  $\sigma$  è una curva geodetica secondo la Definizione 2.1.5, allora è parametrizzata rispetto ad un multiplo della lunghezza d'arco, cioè  $\|\mathbf{v}\|$  è costante, con  $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{T}_{\sigma(t)}S \quad \forall t \in (a, b)$ .

*Dimostrazione.* Segue subito dalla Proposizione 2.1.1. □

Allora possiamo vedere che se  $t = \alpha s + \beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 0,$$

e quindi

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0,$$

ma ciò in generale non è vero.

### Esempio 2.1.1

Si consideri la sfera di raggio unitario centrata nell'origine di  $\mathbb{E}^3$ , parametrizzata come nell'Esempio 3.1.1:

$$\mathbf{P}(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

Sia quindi  $\sigma$  il meridiano

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(u^1(s), u^2(s)) = \mathbf{P}(s, u_0^2),$$

in cui  $s$  è parametro naturale, dal momento che

$$\mathbf{t} = \frac{du^i}{ds} \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_1 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{t}\| = \sqrt{g_{11}} = 1.$$

Le equazioni geodetiche (3.8) sono soddisfatte e quindi, come già avevamo dimostrato, il meridiano  $\sigma$  è una curva geodetica secondo entrambe le definizioni date.

Cambiamo ora parametrizzazione, cioè consideriamo un altro rappresentante della classe di equivalenza della curva  $\sigma$ , e in particolare consideriamo  $t$  parametro tale che  $s = t^2 + 2$ .

$$\sigma : \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(u^1(t), u^2(t)) = \mathbf{P}(t^2 + 2, u_0^2),$$

$$\mathbf{t} = \frac{du^i}{dt} \mathbf{P}_i = 2t \mathbf{P}_1 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{t}\| = |2t \sqrt{g_{11}}| = |2t|.$$

Ora la medesima curva  $\sigma$  non è una geodetica secondo la Definizione 2.1.5, perchè non soddisfa (3.8) e quindi neppure (2.3), ma è una geodetica per la Definizione 1.2.5 perchè annulla il determinante (1.10):

$$k_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}\right)^{3/2}} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} & \frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \end{array} \right| =$$

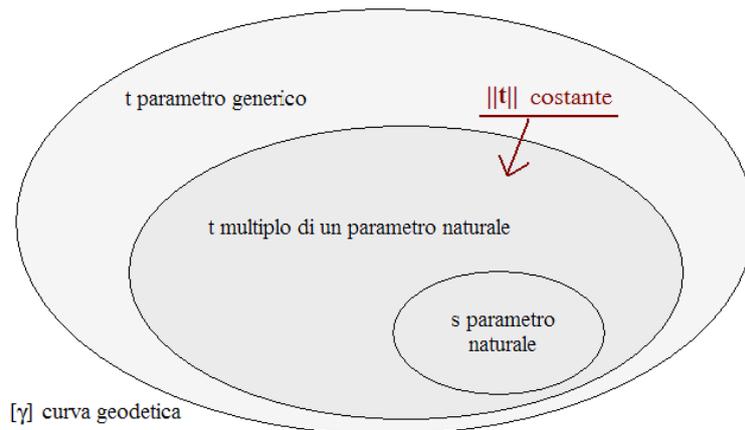
$$= c \left| \begin{array}{cc} 2t & 0 \\ 2 & 0 \end{array} \right| = 0.$$

Riassumendo quanto detto, abbiamo quindi visto che:  
 se  $\gamma$  è una curva parametrizzata tramite un parametro naturale  $s$  o tramite un multiplo di  $s$ , allora

$\gamma$  è geodetica secondo la Definizione (2.1.5)



$\gamma$  è geodetica secondo la Definizione (1.2.5);



se invece  $\gamma$  è una curva parametrizzata tramite un parametro generico  $t$  che non sia multiplo di un parametro arco, allora vale solo

$\gamma$  è geodetica secondo la Definizione (2.1.5)

↓

$\gamma$  è geodetica secondo la Definizione (1.2.5),

ma non viceversa.

E' ovviamente possibile considerare solo la Definizione 2.1.5, come del resto si ha nella maggior parte dei libri, occorre però cambiare la definizione di curva, intendendo la stessa non più come classe di equivalenza, ma come specifica parametrizzazione (cfr. [Car76, pag. 2, paragrafo 1.2]).

## 2.2 Il teorema di Hopf-Rinow

Prenderemo ora in esame, per tutto il paragrafo, solo quelle curve geodetiche che soddisfano anche la Definizione (2.1.5), cioè quelle curve che hanno il campo vettoriale tangente  $\mathbf{t}$  parallelo. Ricordiamo che quindi ora intendiamo per curva una specifica funzione  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Sia quindi  $S$  una superficie,  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  una sua parametrizzazione locale. Sappiamo dal Teorema 1.2.4 che per ogni punto  $Q \in \mathbf{P}(A)$  e  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  unitario, esiste un'unica curva geodetica  $\sigma_{\mathbf{v}} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ , parametrizzata tramite un parametro arco  $s$ , che abbia come vettore tangente  $\mathbf{v}$ . Si noti che se  $\mathbf{v}$  non è unitario, il teorema continua a valere, cioè esiste unica la curva geodetica  $\sigma_{\mathbf{v}}$ , che risulta parametrizzata tramite un multiplo  $t$  del parametro arco  $s$ :

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  non unitario e si ponga  $\mathbf{a} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ . Allora per il Teorema 1.2.4 esiste un'unica geodetica  $\sigma$  parametrizzata in  $s$  con vettore tangente  $\mathbf{a}$ . Si ponga  $t = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}s$ . Allora  $\sigma(t)$  soddisfa il sistema (2.3) e quindi è una curva geodetica (cfr. Proposizione 2.1.3) e

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d\sigma(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{a}\|\mathbf{v}\| = \mathbf{v}.$$

Chiamiamo quindi  $\sigma_{\mathbf{v}}(t)$  la curva  $\sigma(t)$ . □

Sia quindi  $0 \in I$ ,  $\sigma_{\mathbf{v}}(0) = Q$  e  $d\sigma_{\mathbf{v}}/dt = \sigma'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ .

**Lemma 2.2.1.** Per ogni  $c, t \in \mathbb{R}$  si ha  $\sigma_{c\mathbf{v}}(t) = \sigma_{\mathbf{v}}(ct)$  non appena uno dei due membri è definito.

*Dimostrazione.* Sia  $c \neq 0$ ; posta  $\tilde{\sigma}(t) = \sigma_{\mathbf{v}}(ct)$ , si ha che  $\tilde{\sigma}(0) = Q$  e  $\tilde{\sigma}'(0) = c\mathbf{v}$ , per cui basta dimostrare che  $\tilde{\sigma}$  è una geodetica. Ma infatti vale

$$D\tilde{\sigma}'(t) = \pi_{\tilde{\sigma}(t)} \left( \frac{d^2\tilde{\sigma}(t)}{dt^2} \right) = c^2 \pi_{\sigma_{\mathbf{v}}(ct)} \left( \frac{d^2\sigma_{\mathbf{v}}(ct)}{dt^2} \right) = c^2 D\sigma'_{\mathbf{v}}(ct) = \mathbf{0}.$$

Viceversa, supponiamo che esista  $\sigma_{c\mathbf{v}}(t)$  e poniamo  $\mathbf{v}' = c\mathbf{v}$ ,  $s = ct$ . Allora

$$\sigma_{c\mathbf{v}}(t) = \sigma_{c\mathbf{v}}(c^{-1}ct) = \sigma_{\mathbf{v}'}(c^{-1}s) = \sigma_{c^{-1}\mathbf{v}'}(s) = \sigma_{\mathbf{v}}(ct).$$

□

In particolare otteniamo  $\sigma_{\mathbf{v}}(t) = \sigma_{t\mathbf{v}}(1)$ , quindi studiare  $\sigma_{\mathbf{v}}(t)$  al variare di  $t$  equivale a studiare il comportamento di  $\sigma_{\mathbf{v}}(1)$  al variare della lunghezza di  $\mathbf{v}$ .

**Definizione 2.2.1.** Sia  $S$  una superficie e  $Q$  un punto su di essa; denotiamo con  $\tilde{\mathbf{T}}_Q S$  l'insieme  $\{\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S \mid 1 \in I\}$ , dove  $I$  indica l'insieme di definizione della curva geodetica  $\sigma_{\mathbf{v}}$ . Chiamiamo *mappa esponenziale* l'applicazione

$$\exp_Q : \tilde{\mathbf{T}}_Q S \rightarrow S$$

tale che  $\exp_Q(\mathbf{v}) = \sigma_{\mathbf{v}}(1)$ .

Enunciamo ora senza dimostrazione due proprietà della mappa esponenziale:

**Proposizione 2.2.1.** Cfr. [MA06, pag. 264, paragrafo 5.2]

1. L'applicazione  $\exp_Q$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
2.  $\exp_Q$  è un diffeomorfismo tra un intorno dell'origine del piano tangente  $\mathbf{T}_Q S$  e un intorno del punto  $Q$  in  $S$ .

Notiamo allora che le curve geodetiche che stiamo considerando possono essere viste, data questa definizione, nel seguente modo:

$$\sigma_{\mathbf{v}}(t) = \exp_Q(t\mathbf{v}). \tag{2.5}$$

Introduciamo ora alcune definizioni.

**Definizione 2.2.2.** Sia  $S$  una superficie e  $Q$  un punto su di essa. Denotiamo con  $B_Q(\delta)$  l'insieme dei vettori  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  di norma minore di  $\delta$  e chiamiamo *raggio d'iniettività*  $\text{rad}(Q)$  di  $S$  in  $Q$  il più grande  $\delta > 0$  tale che  $\exp_Q : B_Q(\delta) \rightarrow S$  sia un diffeomorfismo sull'immagine.

Se  $0 < \delta \leq \text{rad}(Q)$ , chiamiamo *palla geodetica* di centro  $Q$  e raggio  $\delta$  l'insieme  $B_\delta(Q) = \exp_Q(B_Q(\delta))$ .

Le geodetiche uscenti dal punto  $Q$  sono dette *geodetiche radiali* mentre le curve immagine, tramite  $\exp_Q$ , delle circonferenze su  $\mathbf{T}_Q S$  di raggio minore di  $\text{rad}(Q)$  sono dette *circonferenze geodetiche*.

Infine indichiamo con  $B_\delta^*(Q)$  l'insieme  $B_\delta(Q) \setminus \{Q\}$  e chiamiamo *campo radiale* l'applicazione

$$T : B_\delta^*(Q) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

che, fissato  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$ , associa al punto  $R = \exp_Q(\mathbf{v}) \in B_\delta^*(Q)$  il vettore  $\sigma'_\mathbf{v}(1)/\|\mathbf{v}\| \in \mathbf{T}_R S$ .

Queste definizioni permettono di introdurre il primo dei due fondamentali risultati di cui tratteremo in questo paragrafo, ovvero il Lemma di Gauss, che estende a ogni superficie la proprietà che hanno le rette uscenti da un punto nel piano di essere ortogonali alle circonferenze centrate nel punto e di essere tangenti ovunque al campo radiale.

**Lemma 2.2.2. (Lemma di Gauss)** Fissato un punto  $Q \in S$  superficie, sia  $0 < \delta < \text{rad}(Q)$ . Allora il campo radiale è ortogonale a tutte le circonferenze geodetiche contenute in  $B_\delta^*(Q)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $R$  un punto in  $B_\delta^*(Q)$  e  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  tale che  $R = \exp_Q(\mathbf{v})$ . Prendiamo ora una base ortonormale  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  di  $\mathbf{T}_Q S$  con  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ .

Allora  $\sigma_{\mathbf{e}_1}$  è una geodetica radiale da  $Q$  a  $R$  parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

Una circonferenza geodetica passante per  $R$  è invece parametrizzata dalla curva  $\tau(s) = \exp_Q(\|\mathbf{v}\|(\cos s)\mathbf{e}_1 + \|\mathbf{v}\|(\sin s)\mathbf{e}_2)$ .

Denotiamo inoltre con  $\mathbf{v}_s$  il versore  $(\cos s)\mathbf{e}_1 + (\sin s)\mathbf{e}_2$ .

In particolare si ha che  $\sigma_{\mathbf{e}_1}(\|\mathbf{v}\|) = \sigma_{\|\mathbf{v}\|\mathbf{e}_1}(1) = \sigma_\mathbf{v}(1) = R$  e che  $\tau(0) = \exp_Q(\mathbf{v}) = R$ ; i vettori da confrontare sono quindi  $\dot{\tau}(0)$  e  $\dot{\sigma}_{\mathbf{e}_1}(\|\mathbf{v}\|)$ .

Per dimostrare che  $\dot{\sigma}_{\mathbf{e}_1}(\|\mathbf{v}\|)$  è ortogonale a  $\dot{\tau}(0)$ , introduciamo l'applicazione

$\Phi : (-\pi, \pi) \times (-\delta, \delta) \rightarrow S$  definita da

$$\Phi(s, t) = \exp_Q(t(\cos s)\mathbf{e}_1 + t(\sin s)\mathbf{e}_2) = \sigma_{t\mathbf{v}_s}(1) = \sigma_{\mathbf{v}_s}(t).$$

Poichè  $\|t(\cos s)\mathbf{e}_1 + t(\sin s)\mathbf{e}_2\| = |t| < \delta$ , la  $\Phi$  è ben posta e di classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Abbiamo quindi che  $\sigma_{\mathbf{e}_1}(t) = \Phi(0, t)$  e  $\tau(s) = \Phi(s, \|\mathbf{v}\|)$ ; dobbiamo quindi mostrare che il prodotto scalare

$$\frac{\partial\Phi(0, \|\mathbf{v}\|)}{\partial t} \frac{\partial\Phi(0, \|\mathbf{v}\|)}{\partial s}$$

si annulla.

Osserviamo che, poichè  $\sigma_{\mathbf{v}_s}(t)$  è una curva geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco perchè  $\|\mathbf{v}_s\| = 1$ , si ha  $D\dot{\sigma}_{\mathbf{v}_s} = \ddot{\sigma}_{\mathbf{v}_s}(t) = \mathbf{0}$  e  $\|\dot{\sigma}_{\mathbf{v}_s}(t)\| = 1$  e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial t} \frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial s} \right) &= \frac{\partial\dot{\sigma}_{\mathbf{v}_s}(t)}{\partial t} \frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial s} + \frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial t} \frac{\partial^2\Phi(s, t)}{\partial t\partial s} = \\ &= D\dot{\sigma}_{\mathbf{v}_s}(t) \frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial s} + \frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial t} \frac{\partial^2\Phi(s, t)}{\partial t\partial s} = \\ &= \frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial t} \frac{\partial^2\Phi(s, t)}{\partial t\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\| \frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial t} \right\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\dot{\sigma}_{\mathbf{v}_s}(t)\|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\mathbf{v}_s\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Si ha cioè che il prodotto scalare

$$\frac{\partial\Phi(0, \|\mathbf{v}\|)}{\partial t} \frac{\partial\Phi(0, \|\mathbf{v}\|)}{\partial s}$$

non dipende da  $t$ ; valutandolo per  $t = 0$  si ha

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0, \|\mathbf{v}\|) \frac{\partial\Phi}{\partial s}(0, \|\mathbf{v}\|) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(0, 0) \frac{\partial\Phi}{\partial s}(0, 0).$$

Dal momento che  $\partial\Phi/\partial s(0, 0) = 0$ , si ha la tesi.  $\square$

Abbiamo già visto, grazie al Teorema 1.4.1, che la curva più breve che unisce due punti su un foglio semplice di superficie è da cercarsi tra le curve geodetiche passanti tra tali punti.

Vale questo risultato anche secondo la nuova definizione di curva geodetica,

ma in molti testi ne è proposta una dimostrazione completamente diversa da quella che abbiamo visto e che ha come chiave di volta proprio il lemma appena citato (per esempio cfr. [MA06, pag. 268, paragrafo 5.2] e [Dup93, pag. 43, capitolo 3]).

Il Teorema 1.4.1, alla luce della Definizione 2.1.5 e della Definizione 2.2.2 che abbiamo introdotto, si può riscrivere nel seguente modo:

**Teorema 2.2.1.** Sia  $S$  una superficie,  $Q$  un suo punto e  $0 < \delta < \text{rad}(Q)$ . Allora per ogni punto  $R \in B_\delta(Q)$  la geodetica radiale che unisce  $Q$  e  $R$  è la curva su  $S$  che minimizza il cammino  $\overline{QR}$  ed è unica a meno di riparametizzazioni.

Abbiamo già osservato come il Teorema 1.4.1, e quindi anche quello appena citato, non sia valido a livello globale (cfr. Osservazione 1.4.1): in generale non è detto che una curva geodetica tra due punti ne minimizzi la distanza, nè che questa sia unica.

Il quadro può però anche peggiorare: se consideriamo come superficie  $\mathbb{R}^2$  privato dell'origine, allora quale che sia la curva che collega un punto con il suo opposto ne esiste sempre una più corta. Non si ha cioè una curva che minimizza la distanza tra due punti su  $S$ .

Sotto quali condizioni allora a livello globale la distanza minima tra due punti è effettivamente realizzata da una curva della superficie in esame?

Per rispondere a questa domanda, occorre innanzitutto introdurre alcune definizioni:

**Definizione 2.2.3.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie e  $Q, R$  due punti su di essa; chiamiamo *distanza intrinseca* su  $S$  la funzione  $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$  data da

$$d_S(Q, R) = \inf\{L(\sigma) \mid \sigma : [0, 1] \rightarrow S \text{ curva tra } Q \text{ e } R\}.$$

**Proposizione 2.2.2.** La distanza intrinseca  $d_S$  su di una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  è una distanza e induce su  $S$  la topologia di  $\mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* Dalla definizione è chiaro che  $d_S(Q, R) = d_S(R, Q) \geq 0$  e che  $d_S(Q, Q) = 0$  per ogni  $Q, R$  su  $S$ . Dal momento che vale la disuguaglianza  $\|Q - R\| \leq d_S(Q, R)$ , si ottiene anche che  $d_S(Q, R) > 0$  se  $Q \neq R$ .

Siano ora  $Q, R, X$  tre punti su  $S$ ; se  $\sigma$  è una curva su  $S$  da  $Q$  a  $R$  e  $\tau$  una

da  $R$  a  $X$ , la curva  $\sigma \diamond \tau$  ottenuta percorrendo prima  $\sigma$  e poi un'opportuna riparametrizzazione di  $\tau$  è una curva su  $S$  da  $Q$  a  $X$  e  $L(\sigma \diamond \tau) = L(\sigma) + L(\tau)$ . Passando all'estremo inferiore, otteniamo infine

$$d_S(Q, X) \leq d_S(Q, R) + d_S(R, X).$$

Indichiamo ora con  $\mathcal{U}_S$  la palla di centro  $Q \in S$  e raggio  $\epsilon \geq 0$  per  $d_S$ , e con  $\mathcal{U}$  la palla di centro  $Q$  e raggio  $\epsilon$  per la distanza euclidea in  $\mathbb{R}^3$ .

La disuguaglianza  $\|Q - R\| \leq d_S(Q, R)$  implica immediatamente che

$$\mathcal{U}_S \subseteq \mathcal{U} \cap S$$

per ogni  $Q$  ed  $\epsilon$ , per cui gli aperti della topologia usuale di  $S$  sono aperti anche per la topologia indotta da  $d_S$ , perchè per ogni sottoinsieme  $A$  di  $S$  ogni punto che sia interno ad  $A$  secondo la topologia usuale è interno ad  $A$  anche secondo la topologia indotta da  $d_S$ .

Viceversa, ogni palla  $\mathcal{U}_S$  contiene l'intersezione con  $S$  di una palla euclidea; infatti sia  $\epsilon_1 = \min\{\text{rad}(Q), \epsilon\}$ , allora la palla geodetica  $B_{\epsilon_1}(Q)$  è un aperto per la topologia usuale di  $S$ , dal momento che  $\exp_Q : B_Q(\epsilon_1) \rightarrow B_{\epsilon_1}(Q)$  è un diffeomorfismo (cfr. Proposizione 2.2.1). Esiste quindi  $\delta > 0$  tale che, denotata con  $\mathcal{U}'$  la palla euclidea di centro  $Q$  e raggio  $\delta$ , si abbia  $\mathcal{U}' \cap S \subseteq B_{\epsilon_1}(Q)$ . Ora, dato che  $\epsilon_1 \leq \epsilon$ , si ha

$$\mathcal{U} \cap S \subseteq B_{\epsilon_1}(Q) \subseteq \mathcal{U}_S$$

e gli aperti per  $d_S$  sono aperti anche per la topologia usuale, poichè come detto prima per ogni sottoinsieme  $A$  di  $S$  ogni punto che sia interno ad  $A$  secondo la topologia indotta da  $d_S$  è interno ad  $A$  anche secondo la topologia usuale.  $\square$

Definiamo a questo punto le curve di una superficie  $S$  che realizzano la distanza  $d_S$  tra due punti di  $S$ .

**Definizione 2.2.4.** La curva regolare  $\sigma : [0, 1] \rightarrow S$  è detta *minimizzante* se ha lunghezza minore o uguale a quella di una qualsiasi altra curva su  $S$  avente i medesimi estremi. Si deve avere cioè  $L(\sigma) = d_S(\sigma(0), \sigma(1))$ .

Finora abbiamo quindi mostrato che, data  $0 < \delta < \text{rad}(Q)$  con  $Q$  punto su  $S$ , se il punto  $R$  appartiene a  $B_\delta(Q)$  allora la geodetica radiale da  $Q$  a  $R$  è l'unica curva minimizzante, a meno di riparametrizzazioni. Si noti che la palla geodetica  $B_\delta(Q)$  coincide con la bolla  $\mathcal{U}_S$  di centro  $Q$  e raggio  $\delta$  della distanza intrinseca  $d_S$ .

Cercando di rispondere alla domanda precedentemente posta riguardo all'esistenza di curve minimizzanti, osserviamo ora che, per trovare esempi di situazioni in cui detta curva minimizzante non esista, basta scegliere due punti di una superficie collegati da un'unica curva minimizzante  $\sigma$  e togliere un punto del supporto di  $\sigma$ .

L'esistenza delle curve minimizzanti risulta infatti collegata alla possibilità di estendere deinfinitamente le curve geodetiche sulla superficie  $S$ .

Diamo alcune nozioni preliminari:

**Lemma 2.2.3.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie e  $Q$  un suo punto. Allora per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  la curva geodetica  $\sigma_{\mathbf{v}} : I \rightarrow S$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$  se e solo se la mappa esponenziale  $\exp_Q$  è definita su tutto  $\mathbf{T}_Q S$ , ovvero se  $\{\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S \mid 1 \in I\} \equiv \mathbf{T}_Q S$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che la mappa  $\exp_Q$  sia definita su tutto  $\mathbf{T}_Q S$ ; allora per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  la curva  $\sigma(t) = \exp_Q(t\mathbf{v})$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

Per il Lemma 2.2.1 si ha però che  $\sigma(t) = \sigma_{t\mathbf{v}}(1) = \sigma_{\mathbf{v}}(t)$ , quindi anche  $\sigma_{\mathbf{v}}$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

Viceversa, se  $\sigma_{\mathbf{v}}$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ , è definita anche in 1 e quindi  $\exp_Q(\mathbf{v})$  è ben definito.  $\square$

**Definizione 2.2.5.** Chiamiamo *raggio di iniettività* di un sottoinsieme  $C$  di una superficie  $S$  il numero

$$\text{rad}(C) = \inf\{\text{rad}(Q) \mid Q \in C\} \geq 0.$$

Diremo che un intorno  $\mathcal{U} \subseteq S$  di un punto  $Q$  è *uniformemente normale* se ha raggio di iniettività positivo.

In particolare si può dimostrare (cfr.[MA06, pag. 293, paragrafo 5.4]), che ogni punto di una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ammette un intorno uniformemente normale.

**Definizione 2.2.6.** La distanza  $d_S$  si dice *completa* se ogni successione che sia di Cauchy per  $d_S$  è convergente in  $S$ .

**Definizione 2.2.7.** Chiamiamo *completa* una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  la cui distanza intrinseca sia completa.

Possiamo finalmente scrivere la promessa condizione sufficiente per l'esistenza di geodetiche minimizzanti su una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ .

**Teorema 2.2.2. (Teorema di Hopf-Rinow)** Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. la superficie  $S$  è completa;
2.  $\forall Q \in S$  la mappa esponenziale  $\exp_Q$  è definita su tutto  $\mathbf{T}_Q S$ ;
3.  $\exists Q \in S$  per cui la mappa esponenziale  $\exp_Q$  è definita su tutto  $\mathbf{T}_Q S$ ;
4. ogni sottoinsieme di  $S$  che sia chiuso e limitato rispetto alla distanza  $d_S$  è compatto.

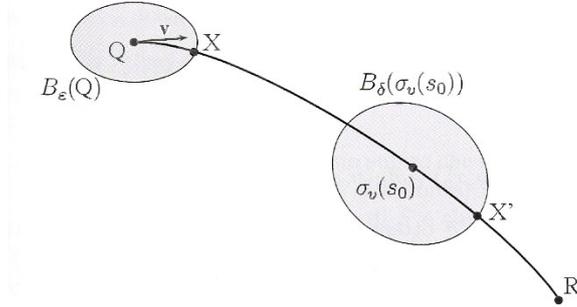
Inoltre ciascuna di queste condizioni implica che, dati due punti su  $S$ , essi possano sempre essere collegati da una geodetica minimizzante.

*Dimostrazione.* 1.  $\Rightarrow$  2. Grazie al Lemma 2.2.3, è sufficiente dimostrare che per ogni  $Q \in S$  e  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  la geodetica  $\sigma_{\mathbf{v}} : I \rightarrow S$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Poniamo  $t_0 = \sup\{t > 0 \mid t \in I\}$  e supponiamo per assurdo che  $t_0$  sia finito. Sia  $\{t_k\} \subset [0, t_0)$  una successione convergente a  $t_0$ ; allora la successione  $\{\sigma_{\mathbf{v}}(t_k)\}$  è di Cauchy in  $S$  per la distanza  $d_S$  dal momento che  $\|\mathbf{v}\| = \|\sigma'_{\mathbf{v}}(t)\| \forall t$  e

$$d_S(\sigma_{\mathbf{v}}(s), \sigma_{\mathbf{v}}(t)) \leq L(\sigma_{\mathbf{v}}|_{[s,t]}) = \|\mathbf{v}\||s - t|.$$

Si ha quindi che  $\{\sigma_{\mathbf{v}}(t_k)\}$  converge a un punto  $R \in S$ . Ponendo quindi  $R = \sigma_{\mathbf{v}}(t_0)$ ,  $\sigma_{\mathbf{v}}$  è un'applicazione continua da  $[0, t_0]$  in  $S$ .

Sia ora  $\mathcal{U}$  un intorno uniformemente normale di  $R$  e sia  $\epsilon = \text{rad}(R)$ . Allora esiste  $\bar{k} > 0$  tale che  $\forall k > \bar{k}$  si ha  $|t_k - t_0| < \delta / \|\mathbf{v}\|$  e  $\sigma_{\mathbf{v}}(t_k) \in \mathcal{U}$ . In particolare le geodetiche radiali uscenti da  $\sigma_{\mathbf{v}}(t_k)$  si prolungano per una lunghezza almeno uguale a  $\delta$ . Siccome però  $L(\sigma_{\mathbf{v}}|_{[t_k, t_0]}) = |t_0 - t_k| \|\mathbf{v}\| < \delta$  e la geodetica  $\sigma_{\mathbf{v}}$  è



unica, la geodetica  $\sigma_{\mathbf{v}}$  si prolunga oltre  $t_0$ , il che porta a una contraddizione. In maniera analoga si dimostra che  $\sigma_{\mathbf{v}}$  è definita su tutto  $(-\infty, 0]$ .

2.  $\Rightarrow$  3. Ovvio.

3.  $\Rightarrow$  4. (I) Dato un punto  $R \in S$ , poniamo  $d_S(Q, R) = r$ ; sia ora  $B_\epsilon(Q)$  una palla geodetica di centro  $Q$  tale che  $R$  non appartenga a  $\overline{B_\epsilon(Q)}$ .

Sia  $X \in \partial B_\epsilon(Q)$  un punto della circonferenza geodetica  $\partial B_\epsilon(Q)$  in cui la funzione continua  $d_S(R, \cdot)$  ammette un minimo. Esiste quindi un opportuno  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Q S$  di norma unitaria tale che  $X = \exp_Q(\epsilon \mathbf{v})$ .

Si noti che, poichè  $\|\mathbf{v}\| = 1$ , la geodetica  $\sigma_{\mathbf{v}}$  è espressa rispetto a un parametro naturale ed è inoltre una geodetica minimizzante tra  $Q$  e tutti i punti del suo supporto.

E' possibile dimostrare che  $\sigma_{\mathbf{v}}(r) = R$ , cioè che  $\sigma_{\mathbf{v}}$  è una geodetica minimizzante da  $Q$  a  $R$ .

Infatti poniamo  $A = \{s \in [0, r] \mid d_S(\sigma_{\mathbf{v}}(s), R) = d_S(Q, R) - s\}$ : l'insieme  $A$  è non vuoto perchè  $0 \in A$  ed è chiuso in  $[0, r]$ , ci basta allora dimostrare che  $r = \sup A$ .

Sia  $s_0 \in A$  minore di  $r$ ; dal momento che  $\sigma_{\mathbf{v}}(s_0) \neq R$ , scegliamo  $0 < \delta < \text{rad}(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0))$  in modo che  $R$  non appartenga a  $B_\delta(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0))$ .

Si ha inoltre che  $d_S(Q, \sigma_{\mathbf{v}}(s_0)) = s_0$ , perchè come detto  $\|\mathbf{v}\| = 1$  e  $\sigma_{\mathbf{v}}$  geodetica minimizzante tra  $Q$  e tutti i punti del suo supporto.

Sia  $X' \in \partial B_\delta(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0))$  un punto della circonferenza geodetica  $\partial B_\delta(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0))$  in cui la funzione continua  $d_S(R, \cdot)$  assume minimo. In particolare se  $s_0 = 0$  si prenda  $\delta = \epsilon$  e  $X' = X$ . Allora

$$d_S(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0), R) \leq d_S(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0), X') + d_S(X', R) = \delta + d_S(X', R).$$

D'altra parte però, se  $\tau : [0, 1] \rightarrow S$  è una curva da  $\sigma_{\mathbf{v}}(s_0)$  a  $R$  e  $\tau(t_0)$  è il primo punto di intersezione tra il supporto di  $\tau$  e  $\partial B_\delta(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0))$ , si ha

$$L(\tau) = L(\tau|_{[0, t_0]}) + L(\tau|_{[t_0, 1]}) \geq \delta + \min_{Y \in \partial B_\delta(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0))} d_S(Y, R) = \delta + d_S(X', R).$$

Prendendo l'estremo inferiore rispetto a  $\tau$  si ottiene

$$d_S(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0), R) \geq \delta + d_S(X', R)$$

e quindi

$$d_S(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0), R) = \delta + d_S(X', R).$$

Ora, ricordando che  $s_0 \in A$ , si ha

$$d_S(Q, R) - s_0 = \delta + d_S(X', R),$$

da cui si deduce

$$d_S(Q, X') \geq d_S(Q, R) - d_S(R, X') = s_0 + \delta.$$

Ma la curva  $\tilde{\sigma}$  ottenuta unendo  $\sigma_{\mathbf{v}}|_{[0, s_0]}$  con la geodetica radiale da  $\sigma_{\mathbf{v}}(s_0)$  a  $X'$  ha lunghezza esattamente  $s_0 + \delta$ ; quindi  $d_S(Q, X') = s_0 + \delta$ . In particolare la curva  $\tilde{\sigma}$  è minimizzante, per cui è una geodetica e dunque coincide con  $\sigma_{\mathbf{v}}$ . Ma allora  $\sigma_{\mathbf{v}}(s_0 + \delta) = X'$  e quindi

$$d_S(\sigma_{\mathbf{v}}(s_0 + \delta), R) = d_S(X', R) = d_S(Q, R) - (s_0 + \delta).$$

Si ha quindi che  $(s_0 + \delta) \in A$  e che quindi  $r = \sup A$ .

(II) Utilizziamo quanto appena mostrato, cioè che  $Q$  può essere collegato a qualsiasi altro punto di  $S$  con una geodetica minimizzante, per dimostrare 4.

Facciamo vedere che le palle chiuse  $\overline{U}_S$  di centro  $Q \in S$  e raggio 1 per la distanza intrinseca sono compatte.

Sia  $\mathbf{v} \in B_Q(1)$ , allora la geodetica radiale  $\exp_Q(t\mathbf{v})$  da  $Q$  a  $R = \exp_Q(\mathbf{v})$  ha lunghezza  $\|\mathbf{v}\| \leq 1$ . Quindi  $d_S(Q, R) \leq 1$  e  $\exp_Q(\overline{B_Q(1)}) \subseteq \overline{U}_S$ .

Viceversa se  $R \in \overline{U}_S$ , sia  $\sigma$  la geodetica minimizzante da  $Q$  a  $R$ ; dovendo avere lunghezza al massimo pari a 1, deve essere della forma  $\sigma(t) = \exp_Q(t\mathbf{v})$  con  $\|\mathbf{v}\| \leq 1$ . Per cui  $R = \exp_Q(\mathbf{v}) \in \exp_Q(\overline{B_Q(1)})$ .

Allora  $\overline{\mathcal{U}_S} = \exp_Q(\overline{B_Q(1)})$ . Poichè  $\exp_Q$  è un omeomorfismo e i chiusi e limitati del piano  $\mathbf{T}_Q S$  sono compatti, si ha che  $\overline{\mathcal{U}_S}$  è compatto. Analogamente si dimostra che sono compatte le palle chiuse di centro  $Q$  e raggio arbitrario. Ora, se  $C$  è un sottoinsieme chiuso e limitato di  $S$ , esiste un disco  $\overline{D}_S$  di centro  $Q$  e raggio opportuno tale che  $C \subseteq \overline{D}_S$ . Dal momento che  $\overline{D}_S$  è compatto per la precedente dimostrazione e che  $C$  è chiuso in  $\overline{D}_S$ , si ha che  $C$  è compatto.

4.  $\Rightarrow$  1. Sia  $\{Q_n\}$  una successione di Cauchy per  $d_S$ : in particolare è un insieme limitato di  $S$ . Scelto  $R \in S$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $\{Q_n\} \subset \overline{\mathcal{U}_S}$ , dove  $\mathcal{U}_S$  è la palla di centro  $R$  e raggio  $\delta$ .

Per ipotesi  $\overline{\mathcal{U}_S}$  è compatta, quindi dalla successione  $\{Q_n\}$  possiamo estrarre una sottosuccessione  $\{Q_{n_k}\}$  convergente ad un punto  $Q \in \overline{\mathcal{U}_S}$ . Allora necessariamente l'intera successione di Cauchy  $\{Q_n\}$  deve convergere a  $Q \in S$ , quindi  $d_S$  è completa.

Resta da dimostrare che ogni coppia di punti di  $S$  può essere collegata da una curva geodetica minimizzante, ma partendo da 2. la dimostrazione è analoga alla prima parte della dimostrazione 3.  $\Rightarrow$  4. □

**Osservazione 2.2.1.** La condizione espressa nel Teorema 2.2.2 è solo sufficiente, cioè esistono superfici non complete dove ogni coppia di punti può essere collegata da una geodetica minimizzante. Si pensi ad esempio a un aperto convesso  $A$  del piano, che non sia tutto il piano: ogni coppia di punti di  $A$  è collegata da un segmento, ma ogni segmento che unisce un punto di  $A$  con un punto di  $\partial A$  non è prolungabile.

**Corollario 2.2.1.** Ogni superficie chiusa  $S$  di  $\mathbb{R}^3$  è completa.

**Osservazione 2.2.2.** Esistono però superfici complete non chiuse in  $\mathbb{R}^3$ . Un esempio è dato dal cilindro costruito a partire dalla curva  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$\sigma(t) = ((1 + e^{-t}) \cos t, (1 + e^{-t}) \sin t),$$

spirale che tende asintoticamente alla circonferenza unitaria.

# Capitolo 3

## Esempi

### 3.1 Superfici di rotazione

**Definizione 3.1.1.** Sia  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  un piano,  $C \subset \pi$  il supporto di una curva semplice regolare di classe  $\mathcal{C}^\infty$  ed  $\ell \subset \pi$  una retta disgiunta da  $C$ . L'insieme  $S$  di punti di  $\mathbb{R}^3$  ottenuto ruotando la curva  $C$  attorno a  $\ell$  è una superficie detta *superficie di rotazione* di *generatrice*  $C$  e *asse di rotazione*  $\ell$ .

Per dimostrare che  $S$  è una superficie supponiamo, senza perdita di generalità, che  $\pi$  sia il piano generato dai versori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$  di  $\mathbb{R}^3$ , che  $\ell$  sia l'asse generato da  $\mathbf{e}_3$  e che  $C$  giaccia nel semipiano positivo  $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = k\mathbf{e}_1 + h\mathbf{e}_3, k > 0\}$ .

Per semplificare la notazione denoteremo  $(u^1, u^2)$  con la coppia  $(u, v)$  e le derivate rispetto a un parametro naturale  $s$  con  $(\dot{u}, \dot{v})$ .

Sia  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione di  $C$  di parametro  $u$  tale che  $\sigma(u) = (\alpha(u), 0, \beta(u))$ , con  $\alpha(u) > 0$  per ogni  $u \in \mathbb{R}$ ; allora si ha

$$S = \{(\alpha(u) \cos v, \alpha(u) \sin v, \beta(u)) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi]\}. \quad (3.1)$$

Per ogni punto di  $S$  con  $v \in (0, 2\pi)$  definiamo una parametrizzazione locale  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{P}(u, v) = (\alpha(u) \cos v, \alpha(u) \sin v, \beta(u)), \quad (3.2)$$

il cui supporto risulta essere la superficie  $S$  privata della curva  $\mathbf{P}(u, 0)$ .

Per i punti di tale curva sarà invece opportuno scegliere una parametrizza-

zione locale  $\tilde{\mathbf{P}}$  con  $v \in (-\pi, \pi)$  e si dimostra che  $\tilde{\mathbf{P}}$  è foglio semplice nello stesso modo in cui ora dimostreremo che lo è  $\mathbf{P}$ .

**Definizione 3.1.2.** Fissato  $u_0 \in \mathbb{R}$ , la composizione della mappa

$$\begin{cases} u = u_0, \\ v = t \end{cases}$$

con  $\mathbf{P}$  è detta *parallelo* di  $S$  e rappresenta la circonferenza di raggio  $\alpha(u_0)$  ottenuta ruotando il punto  $\sigma(u_0)$  attorno ad  $\ell$ .

Fissato  $v_0 \in \mathbb{R}$ , la composizione della mappa

$$\begin{cases} u = t, \\ v = v_0 \end{cases}$$

con  $\mathbf{P}$  è detta *meridiano* di  $S$  ed è ottenuta ruotando  $C$  di un angolo di misura  $v_0$  attorno ad  $\ell$ .

Calcoliamo ora le derivate parziali della parametrizzazione  $\mathbf{P}$  rispetto a  $u$  e  $v$ , indicando per semplicità  $d\alpha/du, d\beta/du$  con  $\alpha', \beta'$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (\alpha'(u) \cos v, \alpha'(u) \sin v, \beta'(u)), \\ \mathbf{P}_2 &= (-\alpha(u) \sin v, \alpha(u) \cos v, 0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Osservazione 3.1.1.** La matrice  $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \text{Jac}(\mathbf{P}(u, v))$  ha rango minore di 2 se e solo se

$$\begin{cases} \alpha'(u)\alpha(u) = 0, \\ \alpha(u)\beta'(u) \sin v = 0, \\ \alpha(u)\beta'(u) \cos v = 0. \end{cases}$$

Ciò non può mai accadere dal momento che abbiamo posto  $\alpha$  sempre positiva e  $\sigma$  regolare. Questo fatto conclude la dimostrazione che  $\mathbf{P}$  sia una parametrizzazione ammissibile per  $S$ , ovvero che  $\mathbf{P}$  sia un foglio semplice (cfr. Definizione 1.1.1).

Determiniamo ora la matrice  $\mathbf{G}$  che rappresenta la prima forma fondamentale relativa a  $\mathbf{P}$  e i simboli di Christoffel di seconda specie  $\Gamma_{ij}^k$  ricordandone la formulazione (1.4):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (\alpha'(u))^2 + (\beta'(u))^2 & 0 \\ 0 & (\alpha(u))^2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{\alpha'\alpha'' + \beta'\beta''}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 = -\frac{\alpha'\alpha''}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}, \\ \Gamma_{11}^2 = 0, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha'}{\alpha}, & \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Abbiamo finalmente tutti gli elementi per trovare le curve geodetiche, descritte rispetto a un parametro d'arco, di una qualsiasi superficie di rotazione  $S$ , parametrizzata da

$$\mathbf{P}(u, v) = (\alpha(u) \cos v, \alpha(u) \sin v, \beta(u)).$$

Per fare questo è naturale utilizzare il sistema (1.11) che grazie alle (3.4) e (3.5) diventa:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \left( \frac{\alpha'\alpha'' + \beta'\beta''}{(\alpha')^2 + (\beta')^2} \right) (\dot{u})^2 - \left( \frac{\alpha\alpha'}{(\alpha')^2 + (\beta')^2} \right) (\dot{v})^2 = 0, \\ \ddot{v} + \left( \frac{2\alpha'}{\alpha} \right) \dot{v}\dot{u} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

In particolare, se la curva  $\sigma(u) = (\alpha(u), 0, \beta(u))$  è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, si ha che

$$(\dot{\alpha})^2 + (\dot{\beta})^2 = 1, \quad \dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \dot{\beta}\ddot{\beta} = 0,$$

e le equazioni differenziali delle geodetiche per le superfici di rotazione di riducono a

$$\begin{cases} \ddot{u} - (\alpha\dot{\alpha}) (\dot{v})^2 = 0, \\ \ddot{v} + \left( \frac{2\dot{\alpha}}{\alpha} \right) \dot{v}\dot{u} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Vediamo subito una conseguenza importante di queste equazioni:

**Proposizione 3.1.1.** 1. I meridiani di una superficie di rotazione  $S$  sono curve geodetiche per  $S$ .

2. Un parallelo è una curva geodetica se e solo se è ottenuto ruotando un punto della curva generatrice  $C$  in cui il vettore tangente ad essa è parallelo all'asse di rotazione  $\ell$  della superficie.

*Dimostrazione.* 1. Supponiamo senza perdita di generalità che il meridiano  $\tau$  sia parametrizzato con un parametro d'arco  $s$  e che valga quindi

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(s, v_0) = (\alpha(s) \cos v_0, \alpha(s) \sin v_0, \beta(s)).$$

Allora  $\tau$  è soluzione del sistema (3.7).

2. Supponiamo senza perdita di generalità che il parallelo  $\tau$  sia parametrizzato con un parametro d'arco  $s$  e che valga quindi

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(u_0, s) = (\alpha(u_0) \cos s, \alpha(u_0) \sin s, \beta(u_0)).$$

Allora  $\tau$  è soluzione del sistema (3.7) se e solo se  $\alpha \dot{\alpha} = 0$ , cioè se e solo se  $\dot{\alpha}(u_0) = 0$ .

□

A parte il caso dei meridiani e dei paralleli, è alquanto raro poter risolvere esplicitamente il sistema (3.7), e pertanto si utilizzano tecniche diverse per aggirare il problema, specifiche per ogni singolo caso.

Vediamo per esempio quanto accade sulla sfera e sul toro.

### Esempio 3.1.1

**La sfera:** La sfera di raggio unitario, centrata nell'origine di  $\mathbb{R}^3$ , può essere parametrizzata come segue:

$$\mathbf{P}(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u),$$

con  $v \in (0, 2\pi)$ ,  $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Calcoliamo le derivate parziali prime e seconde rispetto ad  $u$  e  $v$

$$\mathbf{P}_1 = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \quad \mathbf{P}_2 = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{P}_{11} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u),$$

$$\mathbf{P}_{12} = (\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{P}_{22} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, 0),$$

da cui si ricava

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(u) \end{pmatrix}.$$

Le equazioni differenziali per le curve geodetiche parametrizzate rispetto a un parametro d'arco risultano quindi essere:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \sin u \cos u (\dot{v})^2 = 0, \\ \ddot{v} - 2 \tan(u) \dot{v} \dot{u} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Poichè  $\|\dot{\mathbf{P}}(s)\| = 1$ , si ottiene la relazione

$$1 = [\dot{u}, \dot{v}] \mathbf{G} [\dot{u}, \dot{v}]^T = g_{11}(\dot{u})^2 + g_{22}(\dot{v})^2. \quad (3.9)$$

Sulla sfera questo equivale a chiedere

$$1 = (\dot{u})^2 + \cos^2 u (\dot{v})^2. \quad (3.10)$$

Supponiamo  $\dot{v} \neq 0, \dot{u} \neq 0$  e risolviamo la prima equazione delle (3.8):

$$\int \frac{\ddot{v}}{\dot{v}} = \int 2 \tan(u) \dot{u} \\ \ln(|\dot{v}|) = -2 \ln(\cos u) + cost$$

E quindi con una opportuna costante  $c$  si ha

$$\dot{v} = \frac{c}{\cos^2 u}. \quad (3.11)$$

Sostituiamo quindi  $\dot{v}$  nella relazione di velocità unitaria (3.10) e otteniamo

$$1 = (\dot{u})^2 + \frac{c^2}{\cos^4 u} \cos^2 u \\ (\dot{u})^2 = 1 - \frac{c^2}{\cos^2 u} \\ \dot{u} = \pm \sqrt{\frac{\cos^2 u - c^2}{\cos^2 u}}. \quad (3.12)$$

Dividendo  $\dot{v}$  per  $\dot{u}$ , scriviamo la seguente equazione differenziale a variabili separabili

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - c^2}},$$

che può essere integrata nel modo seguente grazie alla sostituzione  $w = (c/\sqrt{1-c^2}) \tan v$  e  $\theta = \arcsin w$ :

$$v = \int \frac{c}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - c^2}} du = \int \frac{c \sec^2 u}{\sqrt{1 - c^2 \sec^2 u}} du =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{c \sec^2 u}{\sqrt{1-c^2-c^2 \tan^2 u}} du = \int \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \int d\theta = \\
&= \arcsin \left( \frac{c \tan u}{\sqrt{1-c^2}} \right) + d.
\end{aligned}$$

Quindi ponendo  $\lambda = c/\sqrt{1-c^2}$  otteniamo

$$\sin(v-d) = \lambda \tan u.$$

Possiamo sviluppare  $\sin(v-d) = \sin v \cos d - \sin d \cos v$  e, trovando il comune denominatore, scrivere

$$\frac{\sin v \cos u}{\cos u} \cos d - \sin d \frac{\cos v \cos u}{\cos u} - \frac{\lambda \sin u}{\cos u} = 0.$$

Denotiamo, riprendendo le coordinate sferiche usate per definire  $\mathbf{P}$ ,

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u$$

in modo da ottenere

$$y \cos d - x \sin d - \lambda z = 0. \tag{3.13}$$

Quindi vediamo che il supporto della curva  $\mathbf{P}(s)$  giace su  $ax + by + cz = 0$ , piano passante per l'origine. Questo significa che il supporto di  $\mathbf{P}(s)$  è contenuto nell'intersezione tra un piano passante per l'origine con la sfera, cioè che è parte di un cerchio massimo.

### Esempio 3.1.2

**Il toro:** Indichiamo con  $(x, y, z)$  assi di  $\mathbb{R}^3$ ; per parametrizzare un toro facciamo ruotare attorno all'asse  $z$  una circonferenza di raggio  $r$ , centrata nel punto  $(R, 0)$  del piano  $(x, z)$ , con  $R > r > 0$ :

$$\mathbf{P}(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

Poniamo  $u, v \in (0, 2\pi)$  e come fatto nell'esempio precedente, calcoliamo

$$\mathbf{P}_1 = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u),$$

$$\mathbf{P}_2 = (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{11} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\ \mathbf{P}_{12} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ \mathbf{P}_{22} &= -(R + r \cos u) \cos v, -(R + r \cos u) \sin v, 0),\end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos u)^2 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni geodetiche rispetto a un parametro d'arco risultano parimenti essere

$$\begin{cases} \ddot{u} + \frac{(R + r \cos u)}{r} \sin u (\dot{v})^2 = 0, \\ \ddot{v} - 2 \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)} \dot{u} \dot{v} = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Supponiamo  $\dot{v} \neq 0, \dot{u} \neq 0$ ; la seconda equazione è a variabili separabili; si ottiene allora per un'opportuna costante  $c$

$$\dot{v} = \frac{c}{(R + r \cos u)^2}. \quad (3.15)$$

Assumiamo quindi come nell'esempio precedente di cercare una curva espressa mediante un parametro naturale e sostituiamo  $\dot{v}$  nella relazione (3.9) ottenendo

$$\begin{aligned} 1 &= r^2 (\dot{u})^2 + \frac{c^2}{(R + r \cos u)^2} \\ \dot{u} &= \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{c^2}{(R + r \cos u)^2}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dividiamo  $\dot{v}$  per  $\dot{u}$  e otteniamo infine

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{cr\sqrt{R + r \cos u}}{\sqrt{(R + r \cos u)^2 - c^2}} \\ v &= \int \frac{cr\sqrt{R + r \cos u}}{\sqrt{(R + r \cos u)^2 - c^2}} du. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Integrando si ottengono le equazioni delle curve, ma come si può vedere ciò risulta assai arduo.

## 3.2 La relazione di Clairaut

Osservando gli Esempi 3.1.1 e 3.1.2, si può notare come in entrambi i casi le entrate della prima forma fondamentale  $\mathbf{G}$  dipendessero soltanto da  $u^1$ .

**Definizione 3.2.1.** Sia  $\mathbf{P}(u^1, u^2)$  una parametrizzazione locale di una superficie  $S$  tale che la matrice  $\mathbf{G}$  che rappresenta la prima forma fondamentale risulti diagonale. Diciamo che  $\mathbf{P}$  è una *parametrizzazione di Clairaut* in  $u^1$  se  $\partial g_{11}/\partial u^2 = \partial g_{22}/\partial u^2 = 0$  e analogamente che  $\mathbf{P}$  è una *parametrizzazione di Clairaut* in  $u^2$  se  $\partial g_{11}/\partial u^1 = \partial g_{22}/\partial u^1 = 0$ .

Nei casi in cui la matrice  $\mathbf{G}$  è diagonale, il sistema (1.11) risulta più semplice:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \left(\frac{du^1}{ds}\right) \left(\frac{du^2}{ds}\right) - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 = 0, \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} - \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \left(\frac{du^1}{ds}\right) \left(\frac{du^2}{ds}\right) + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

Utilizzando queste ultime equazioni, il sistema di equazioni differenziali delle geodetiche per una parametrizzazione di Clairaut in  $u^1$  è

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 = 0, \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

mentre per una parametrizzazione di Clairaut in  $u^2$  si ha

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} = 0, \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} - \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Si consideri ora una curva  $\mathbf{P}(u^1(s), u^2(s)) = \mathbf{P}(s, u_0^2)$ , con  $s$  parametro naturale e  $u_0^2$  costante, tracciata su un foglio semplice  $\mathbf{P}$  dotato di una  $u^1$ -parametrizzazione di Clairaut.

Allora, poichè  $u^2 = u_0^2$  e  $\|\mathbf{P}_1\| = 1$ , si ha che  $\partial g_{11}/\partial u^1 = 0$  e quindi che  $\mathbf{P}(s, u_0^2)$  soddisfa le equazioni geodetiche di Clairaut (3.19). Quindi, per una

$u^1$ -parametrizzazione di Clairaut, le linee coordinate  $u^2 = \text{costante}$  espresse rispetto a un parametro naturale sono geodetiche.

Ci chiediamo quindi come si comporti una curva  $\mathbf{P}(u^1(s), u^2(s)) = \mathbf{P}(u_0^1, s)$  con  $s$  parametro naturale e  $u_0^1$  costante. Dalle equazioni (3.19), poichè  $du^1/ds = 0$  e  $du^2/ds = 1$ , si ha che

$$-\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0,$$

con  $\partial g_{22}/\partial u^1$  valutata in  $u_0^1$ . Quindi una curva di questo tipo è una geodetica se e solo se  $\partial g_{22}/\partial u^1|_{u_0^1} = 0$ .

Riassumiamo quanto detto nella seguente proposizione; un risultato analogo vale ovviamente per una parametrizzazione di Clairaut in  $u^2$ .

**Proposizione 3.2.1.** Sia  $S$  una superficie tale che  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia una sua parametrizzazione locale di Clairaut in  $u^1$ .

Allora ogni curva  $\mathbf{P}(u^1, u_0^2)$  è una geodetica, mentre una curva  $\mathbf{P}(u_0^1, u^2)$  è una geodetica quando  $\partial g_{22}/\partial u^1|_{u_0^1} = 0$ .

Essendo le superfici di rotazione un caso particolare di  $u^1$ -parametrizzazione di Clairaut, quanto detto altro non è che la formulazione generale della Proposizione 3.1.1. Infatti segue immediatamente il seguente

**Corollario 3.2.1.** Sia  $S$  una superficie ottenuta dalla rotazione della curva  $\sigma(u) = (\alpha(u), 0, \beta(u))$  con  $u$  lunghezza d'arco, e sia

$$\mathbf{P}(u, v) = (\alpha(u) \cos v, \alpha(u) \sin v, \beta(u))$$

una sua parametrizzazione locale.

Allora ogni meridiano è una curva geodetica, mentre un parallelo è una geodetica se e solo se  $\dot{\alpha}(u_0) = 0$ , cioè quando  $u_0$  è un punto stazionario per  $\alpha$ .

Un'altra caratteristica delle parametrizzazioni di Clairaut è quella di fornire una tecnica standard per ridurre le equazioni delle geodetiche a un'unica equazione, come è già stato visto peraltro negli Esempi 3.1.1 e 3.1.2.

Denotiamo infatti  $(u^1, u^2)$  con  $(u, v)$  e scegliamo un foglio semplice  $\mathbf{P}$  di Clairaut in  $u$ ; cerchiamo quindi una curva geodetica  $\gamma$  espressa mediante un

parametro naturale.

Supponendo  $\dot{v} \neq 0, \dot{u} \neq 0$ , la seconda equazione del sistema (3.19) diventa

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{v}}{\dot{v}} &= -\frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \dot{u} \\ \int \frac{\ddot{v}}{\dot{v}} ds &= -\int \frac{1}{g_{22}} \dot{u} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} ds \\ \ln |\dot{v}| &= -\ln g_{22} + c \\ \dot{v} &= \frac{c}{g_{22}}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Come negli esempi visti, sostituiamo  $\dot{v}$  nella relazione (3.9)

$$1 = g_{11}(\dot{u})^2 + g_{22}(\dot{v})^2$$

e otteniamo

$$\begin{aligned}1 &= g_{11}(\dot{u})^2 + \frac{c^2}{g_{22}} \\ \dot{u} &= \pm \sqrt{\frac{g_{22} - c^2}{g_{11}g_{22}}}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Per raggiungere il nostro scopo, dividiamo quindi  $\dot{v}$  per  $\dot{u}$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \pm \frac{c\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22} - c^2}} \\ v &= \pm \int \frac{c\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22} - c^2}} du.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Per concludere, ritorniamo brevemente al caso delle superfici di rotazione e diamo un'applicazione di quanto appena visto.

Sia quindi  $\mathbf{P}(u, v)$  la parametrizzazione di una superficie di rotazione  $S$  ottenuta ruotando  $\sigma(u) = (\alpha(u), 0, \beta(u))$ , con  $u$  parametro generico. Si deduce da (3.4) che  $\mathbf{P}$  è di Clairaut in  $u$ . Presa una curva geodetica  $\gamma$  su  $S$  con  $s$  parametro naturale, denotiamo con  $\phi = \phi(s)$  l'angolo più piccolo compreso tra i vettori  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{P}_2$  in ogni punto di  $\gamma$ ; sia di conseguenza  $(\pi/2 - \phi)$  l'angolo tra  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{P}_1$ . Allora

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{P}_2 \mathbf{t}}{\|\mathbf{P}_2\| \|\mathbf{t}\|} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left( \frac{du}{ds} \mathbf{P}_1 + \frac{dv}{ds} \mathbf{P}_2 \right) \mathbf{P}_2 = \dot{v} \sqrt{g_{22}}.$$

Usando questa relazione e la (3.21), si ha infine

$$\cos \phi = \frac{c}{\sqrt{g_{22}}}. \quad (3.24)$$

In modo analogo si ottiene

$$\sin \phi = \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{t}}{\|\mathbf{P}_1\| \|\mathbf{t}\|} = \frac{du}{ds} \sqrt{g_{11}} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{g_{22}}}. \quad (3.25)$$

Ricordando che per una superficie di rotazione  $g_{22} = \alpha^2$ , dalla (3.24) si ottiene la *relazione di Clairaut*

$$\alpha(s) \cos \phi(s) = \text{costante}, \quad (3.26)$$

ovvero, per ogni geodetica di una superficie di rotazione  $S$  è costante il prodotto tra il raggio del parallelo in un punto  $Q = \mathbf{P}(\bar{s})$  e il coseno dell'angolo formato dal vettore tangente alla geodetica in  $\bar{s}$  e dal vettore tangente al parallelo passante per  $Q$  in  $Q$ .

Vediamone le conseguenze geometriche sulla sfera e il toro, facendo anche riferimento a quanto già visto negli Esempi 3.1.1 e 3.1.2.

### Esempio 3.2.1

**La Sfera:** Nell'Esempio 3.1.1 abbiamo considerato una  $u$ -parametrizzazione di Clairaut, sia ora invece

$$\mathbf{P}(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v),$$

con  $v \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $u \in (0, 2\pi)$ , una  $v$ -parametrizzazione della sfera di raggio unitario, centrata nell'origine di  $\mathbb{R}^3$ .

Per una curva geodetica  $\gamma$  sulla sfera, parametrizzata con un parametro d'arco  $s$ , si verifica facilmente (cfr. (3.11)) che

$$\dot{u} = c/(\cos^2 v),$$

da cui, poichè in questo caso  $\mathbf{P}$  è una  $v$ -parametrizzazione di Clairaut, si ricava

$$\sin \phi = \dot{u} \sqrt{g_{11}} = \dot{u} \cos v = \frac{c}{\cos v}.$$

Preso un punto  $Q$  sulla sfera e una direzione  $\mathbf{t}$ , dal momento che le curve geodetiche sono dei cerchi massimi, si ha che la geodetica passante per  $Q$  con vettore tangente  $\mathbf{t}$  è necessariamente costretta tra le latitudini di  $Q$  e del suo opposto.

Proviamo allora a vedere tutto questo usando la relazione di Clairaut. Sia  $\rho$  un parallelo  $\mathbf{P}(u, v_0)$  con  $v_0 > 0$ . Supponiamo che  $\gamma$  parta in modo parallelo a  $\rho$ , cioè che  $\mathbf{t}(0)$  sia parallelo a  $\mathbf{P}_1(u_0, v_0)$ , con  $u(0) = u_0$ ; si ha allora  $\phi(0) = \pi/2$ .

Poichè  $1 = \sin \phi(0) = c/(\cos v_0)$ , si ottiene che  $c = \cos v_0$  e quindi che lungo  $\gamma$   $\cos v(s) \sin \phi(s) = \cos v_0$ . Dal momento che  $|\sin \phi| \leq 1$ , si ha  $\cos^2 v \geq \cos^2 v_0$ , che per  $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$  implica  $\cos v \geq \cos v_0$ .

Essendo  $v_0 > 0$ , si ha  $-v_0 \leq v \leq v_0$ .

Dato che la variabile  $v$  rappresenta la latitudine, queste disuguaglianze significano che il cerchio massimo  $\gamma$  è compreso tra le latitudini  $v_0$  a nord e a sud dell'equatore.

### Esempio 3.2.2

**Il Toro:** Come visto nell'Esempio 3.1.2, sia

$$\mathbf{P}(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

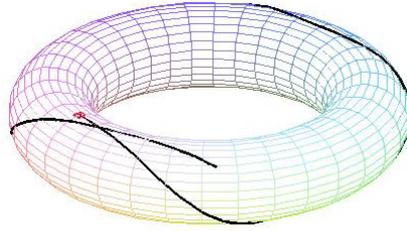
la parametrizzazione di un toro.

Per ogni geodetica  $u = u(s), v = v(s)$  parametrizzata tramite un parametro naturale  $s$ , usando la relazione  $\cos \phi(s) = \dot{v} \sqrt{g_{22}}$  e la (3.15), cioè  $\dot{v} = c/(R + r \cos u)^2$ , otteniamo che

$$\cos \phi(s) = \frac{c}{R + r \cos u(s)}.$$

Consideriamo ora una curva geodetica  $\gamma$  parametrizzata tramite un parametro d'arco  $s$ , per la quale valga  $u(0) = \pi/2, v(0) = 0$  e il vettore tangente  $\mathbf{t}(0)$  sia parallelo al vettore tangente della linea parabolica superiore  $\mathbf{P}(\frac{\pi}{2}, v) = (R \cos v, R \sin v, r)$ ; allora da  $\phi(0) = 0$  e dalla relazione di Clairaut si ottiene  $R = c$ . Di nuovo, poichè  $|\cos \phi(s)| \leq 1$ , si ha  $R + r \cos u(s) \geq R$  lungo tutta la curva  $\gamma$ .

Questo comporta che  $\cos u(s) \geq 0$ , e di conseguenza  $-\frac{\pi}{2} \leq u(s) \leq \frac{\pi}{2}$ . Quindi la geodetica  $\gamma$  resta confinata all'esterno del toro, tra le due linee paraboliche inferiore e superiore.



### 3.3 Esempi di calcolo di geodetiche

Poiché in generale il calcolo esplicito delle geodetiche, come si evince soprattutto dall' Esempio 3.1.2, è molto complesso e spesso purtroppo poco utile ai fini di una visione chiara della situazione, si è scelto di sfruttare le potenzialità del calcolatore per aggirare il problema.

Utilizziamo quindi Maple per scrivere le equazioni delle geodetiche e per estrapolarne il grafico delle curve. I programmi che abbiamo creato per questo scopo si possono trovare nell'Appendice.

Ci avvaloriamo ovviamente di quanto appreso nel Teorema 1.2.4 per determinare delle soluzioni dei sistemi che scriveremo, specificheremo quindi ogni volta anche il punto e la direzione di partenza utilizzati come dati iniziali.

Il programma calcola, a partire da una parametrizzazione  $\mathbf{P}$  della superficie  $S$  in esame, le equazioni del sistema (1.11) e le risolve in  $u(s), v(s)$ , con  $s$  parametro arco o multiplo di un parametro arco, trovando così una geodetica  $\gamma$  che abbia il punto base e il vettore tangente richiesti.

Si noti che le geodetiche trovate soddisfano sia la Definizione 1.2.5 che la Definizione 2.1.5 (cfr. Proposizione 2.1.3), e che quindi quest'ultima definizione, pur essendo più restrittiva, è sufficiente per i nostri scopi, e decisamente più comoda.

Maple disegna poi il supporto del foglio semplice  $\mathbf{P}$  facendo variare  $u$  e  $v$  nei due intervalli specificati e su di esso traccia la curva  $\gamma$  trovata, lasciando variare  $s$  nell'intervallo  $[a, b]$  richiesto in input.

Dal momento che il programma calcola separatamente i due grafici, quello di  $\mathbf{P}(A)$  e quello della geodetica  $\gamma$ , si è scelto in alcuni casi di lasciar correre  $\gamma$  anche oltre il supporto  $\mathbf{P}(A)$ , perchè ciò spiega bene come la curva si comporta.

Vediamo quindi finalmente le equazioni e il grafico delle geodetiche sulle superfici più comuni:

### Esempio 3.3.1

**La sfera di raggio unitario:** Sia data per la sfera la parametrizzazione locale

$$\mathbf{P}(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

Come già visto (cfr. (3.8)), le equazioni delle curve geodetiche sono:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \sin u \cos u (\dot{v})^2 = 0, \\ \ddot{v} - 2 \tan(u) \dot{v} \dot{u} = 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora  $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $v \in (-\pi, \pi)$ , il punto

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(\pi/4, 0)$$

e il vettore unitario

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{P}}{ds}(0)$$

con  $\frac{du}{ds}(0) = 1/2$ ,  $\frac{dv}{ds}(0) = 1$ .

Chiediamo quindi a Maple di rappresentare (Figura 3.1) la curva geodetica soluzione delle equazioni (3.8) con dati iniziali  $Q$  ed  $\mathbf{a}$ , che sappiamo essere un cerchio massimo. Il punto  $Q$  iniziale sarà sempre evidenziato in rosso.

### Esempio 3.3.2

**Il toro:** Sia data per il toro  $S$  la parametrizzazione locale (cfr. Esempio 3.1.2)

$$\mathbf{P}(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

Anche per il toro abbiamo già visto (cfr. (3.14)) che il sistema di equazioni differenziali per le curve geodetiche è:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \frac{(R + r \cos u)}{r} \sin u (\dot{v})^2 = 0, \\ \ddot{v} - 2 \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)} \dot{u} \dot{v} = 0. \end{cases}$$

Poniamo ora  $r = 1$  e  $R = 5$  e consideriamo  $u \in (0, 2\pi)$ ,  $v \in (-\pi, \pi)$ . Siano quindi

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(\pi/4, 0)$$

un punto e  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S$  due vettori tali che

$$\mathbf{a} : \quad \frac{du}{ds}(0) = 1, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 1,$$

$$\mathbf{b} : \quad \frac{du}{ds}(0) = 15, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 1.$$

Risolviamo allora il sistema (3.14) prima con dati iniziali  $Q$ ,  $\mathbf{a}$  e quindi con dati iniziali  $Q$ ,  $\mathbf{b}$  (Figura 3.2). Si noti che nel primo caso la curva geodetica rimanga confinata all'esterno, tra la linea parabolica superiore e quella inferiore (cfr. Esempio 3.2.2).

### Esempio 3.3.3

**Il cilindro:** Per il cilindro sia data la parametrizzazione locale

$$\mathbf{P}(u, v) = (\cos v, \sin v, u).$$

Calcoliamo quindi il sistema di equazioni differenziali per le curve geodetiche, che risulta essere:

$$\ddot{u} = 0, \quad \ddot{v} = 0.$$

Sappiamo già che i meridiani e i paralleli sono curve geodetiche, ma non sono le sole: scegliamo  $u \in (0, 4)$ ,  $v \in (-\pi, \pi)$ ,

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(3, 0),$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{P}}{ds}(0)$$

con  $\frac{du}{ds}(0) = -1$ ,  $\frac{dv}{ds}(0) = 5$ ,

e chiediamo a Maple (Figura 3.3) di rappresentare la curva geodetica soluzione del sistema scritto con dati iniziali  $Q$  ed  $\mathbf{a}$ .

### Esempio 3.3.4

**Il cono:** Sia  $\mathbf{P}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$  una parametrizzazione locale per

il cono a base circolare  $S$  con  $u \in (0, 10)$ ,  $v \in (0, 2\pi)$ .

Il sistema di equazioni differenziali per le curve geodetiche è:

$$\ddot{u} - \frac{1}{2}u\dot{v}^2 = 0, \quad \ddot{v} + \frac{2}{u}\dot{u}\dot{v} = 0.$$

Scegliamo  $Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(9, \pi/2)$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S$  con

$$\mathbf{a} : \quad \frac{du}{ds}(0) = -1, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 0,$$

$$\mathbf{b} : \quad \frac{du}{ds}(0) = -15, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 1/2,$$

e otteniamo la Figura 3.4.

### Esempio 3.3.5

**Le quadriche:** Abbiamo già trattato esempi di coni e cilindri; consideriamo quindi solo le quadriche reali, non singolari.

Per ogni superficie  $S$ , dopo aver assegnato una parametrizzazione locale, risolveremo le equazioni differenziali delle geodetiche rispetto a un parametro naturale  $s$  o un suo multiplo e daremo una particolare soluzione, uscente da un punto  $Q$  con direzione  $\mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S$ .

1. **Il paraboloido ellittico:** Sia  $\mathbf{P}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ .

Si ottiene quindi

$$\ddot{u} + \frac{4u}{4u^2 + 1}\dot{u}^2 - \frac{4u}{4u^2 + 1}\dot{v}^2 = 0, \quad \ddot{v} + \frac{2}{u}\dot{u}\dot{v} = 0.$$

Poniamo infine  $u \in (0, 10)$ ,  $v \in (0, 2\pi)$ ,

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(9, \pi/3),$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S$  tali che

$$\mathbf{a} : \quad \frac{du}{ds}(0) = -1, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 0,$$

$$\mathbf{b} : \quad \frac{du}{ds}(0) = -2, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 1.$$

La soluzione è data in Figura 3.5. Già da questo disegno si può capire che ogni curva geodetica del paraboloido ellittico di rotazione, che non sia un meridiano, interseca se stessa infinite volte.

2. **L'ellissoide:** Sia  $\mathbf{P}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$  con  $a = 2, b = 3, c = 1$ .

Si ottengono quindi le due equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \frac{\cos u \sin u (-32 + 5 \cos^2 v)}{5 \cos^2 u \cos^2 v - 32 \cos^2 u - 4 - 5 \cos^2 v} \dot{u}^2 + \\ + \frac{36 \cos u \sin u}{5 \cos^2 u \cos^2 v - 32 \cos^2 u - 4 - 5 \cos^2 v} \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} - \frac{5 \cos v \sin v}{5 \cos^2 u \cos^2 v - 32 \cos^2 u - 4 - 5 \cos^2 v} \dot{u}^2 + \\ + \frac{2 \cos u}{\sin u} \dot{u} \dot{v} - \frac{5 \cos v \sin v (\cos^2 u - 1)}{5 \cos^2 u \cos^2 v - 32 \cos^2 u - 4 - 5 \cos^2 v} \dot{v}^2 = 0. \end{aligned}$$

Scegliamo  $u \in (0, 2\pi), v \in (0, 2\pi)$ ,

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(\pi/2, \pi),$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S$  tali che

$$\mathbf{a} : \quad \frac{du}{ds}(0) = 4, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 1,$$

$$\mathbf{b} : \quad \frac{du}{ds}(0) = 1/2, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 1.$$

La soluzione è data in Figura 3.6.

3. **L'iperboloide ellittico:** Sia  $\mathbf{P}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$  con  $a = 1, b = 2, c = 3$ .

Si ottengono quindi le due equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \frac{\cosh u \sinh u (13 + 27 \cos^2 v)}{27 \cosh^2 u \cos^2 v + 13 \cosh^2 u - 9 - 27 \cos^2 v} \dot{u}^2 + \\ + \frac{4 \cosh u \sinh u}{27 \cosh^2 u \cos^2 v + 13 \cosh^2 u - 9 - 27 \cos^2 v} \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} - \frac{27 \cos v \sin v}{27 \cosh^2 u \cos^2 v + 13 \cosh^2 u - 9 - 27 \cos^2 v} \dot{u}^2 + \end{aligned}$$

$$+\frac{2 \cosh u}{\sinh u} \dot{u} \dot{v} - \frac{27 \cos v \sin v (\cosh^2 u - 1)}{27 \cosh^2 u \cos^2 v + 13 \cosh^2 u - 9 - 27 \cos^2 v} \dot{v}^2 = 0.$$

Scegliamo infine  $u \in (0, 2.1)$ ,  $v \in (0, 2\pi)$ ,

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(2, \pi/3),$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S$  tali che

$$\mathbf{a} : \quad \frac{du}{ds}(0) = -1, \quad \frac{dv}{ds}(0) = \frac{3}{2},$$

$$\mathbf{b} : \quad \frac{du}{ds}(0) = -1, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 0.$$

La soluzione è data in Figura 3.7.

4. **L'iperboloide iperbolico:** Sia  $\mathbf{P}(u, v) = ((-1 - u^2)/(2u) \cos v, (-1 - u^2)/(2u) \sin v, (-1 + u^2)/(2u))$  e poniamo infine  $u \in (-4, 4)$ ,  $v \in (0, 2\pi)$ .

Si ottiene quindi

$$\ddot{u} - \frac{2}{u(u^4 + 1)} \dot{u}^2 - \frac{u(u^4 - 1)}{2(u^4 + 1)} \dot{v}^2 = 0, \quad \ddot{v} + \frac{2(u^2 - 1)}{u(u^2 + 1)} \dot{u} \dot{v} = 0.$$

Scelti

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(1, \pi),$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{P}}{ds}(0)$$

con  $\frac{du}{ds}(0) = 0$ ,  $\frac{dv}{ds}(0) = 1$ , otteniamo l'unica geodetica chiusa della quadrica (Figura 2.8).

Come esempio di geodetica aperta prendiamo

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(3, \pi),$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{P}}{ds}(0)$$

con  $\frac{du}{ds}(0) = -3.2$ ,  $\frac{dv}{ds}(0) = 1$ . La soluzione è data in Figura 3.8.

5. **Il paraboloido iperbolico:** Sia  $\mathbf{P}(u, v) = (u, v, uv)$ .

Si ottiene quindi

$$\ddot{u} + \frac{2v}{1 + u^2 + v^2} \dot{u} \dot{v} = 0, \quad \ddot{v} + \frac{2u}{1 + u^2 + v^2} \dot{u} \dot{v} = 0.$$

Si noti che è la prima superficie la cui prima forma fondamentale non è diagonale:

$$\begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Negli esempi precedenti avremmo infatti potuto utilizzare il sistema (3.18) anzichè (1.11).

Infine poniamo  $u \in (-10, 10)$ ,  $v \in (-10, 10)$ ,

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(-9, -9),$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{P}}{ds}(0)$$

con  $\frac{du}{ds}(0) = 1$ ,  $\frac{dv}{ds}(0) = 1$ . La soluzione è data in Figura 3.9.

### Esempio 3.3.6

**La versiera dell'Agnesi:** Sia  $S$  la superficie ottenuta ruotando la curva di Agnesi

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \sigma(u) = (2 \cos^2 u, 0, 2 \tan u)$$

attorno all'asse generato da  $\mathbf{e}_3$ . Come sua parametrizzazione locale scegliamo quindi (cfr. (3.2))

$$\mathbf{P}(u, v) = (2 \cos^2 u \cos v, 2 \cos^2 u \sin v, 2 \tan u),$$

e sia  $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $v \in (0, 2\pi)$ .

Come per tutte le superfici di rotazione, la matrice associata alla prima forma fondamentale risulta diagonale; il sistema di equazioni geodetiche, ricavato da (3.18), è:

$$\begin{cases} \ddot{u} - \frac{2 \sin u (4 \cos^8 u - 2 \cos^6 u + 1)}{\cos u (4 \cos^8 u - 4 \cos^6 u - 1)} \dot{u}^2 - \frac{\cos^7 u \sin u}{4 \cos^8 u - 4 \cos^6 u - 1} \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} - \frac{4 \sin u}{\cos u} \dot{u} \dot{v} = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo quindi la soluzione del sistema con dati iniziali

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(0, \pi/2)$$

e  $\mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S$  tale che  $\frac{du}{ds}(0) = 1, \frac{dv}{ds}(0) = 2$  e poi la soluzione con dati iniziali

$$R = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(-1/2, \pi/2),$$

$\mathbf{b} \in \mathbf{T}_R S$  tale che  $\frac{du}{ds}(0) = 1, \frac{dv}{ds}(0) = 1$ . Le due soluzioni sono date in Figura 3.10.

### Esempio 3.3.7

**Il catenoide:** Ricalcando quanto fatto nell'esempio precedente, sia  $S$  la superficie ottenuta ruotando la curva

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \sigma(u) = (3 \cosh(u/3), 0, u)$$

attorno all'asse generato da  $\mathbf{e}_3$ . Come sua parametrizzazione locale scegliamo quindi (cfr. (3.2))

$$\mathbf{P}(u, v) = (3 \cosh(u/3) \cos v, 3 \cosh(u/3) \sin v, u),$$

e sia  $u \in (-6, 6), v \in (-\pi, \pi)$ .

Il sistema di equazioni geodetiche associato a  $\mathbf{P}$  è:

$$\begin{cases} \ddot{u} - \frac{\sinh(u/3)}{3 \cosh(u/3)} \dot{u}^2 - \frac{3 \sinh(u/3)}{\cosh(u/3)} \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} + \frac{2 \sinh(u/3)}{3 \cosh(u/3)} \dot{u} \dot{v} = 0. \end{cases}$$

Poniamo allora

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(5, 0),$$

$$\mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S : \quad \frac{du}{ds}(0) = -15, \frac{dv}{ds}(0) = 1;$$

la curva geodetica che soddisfa il sistema di equazioni differenziali con questi dati iniziali è rappresentata in Figura 3.11.

### Esempio 3.3.8

**L'elicoide:** Sia  $\mathbf{P}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 8v)$  con  $u \in (-16, 16), v \in (0, 2\pi)$ . Sostituendo opportunamente in (1.11) si ottiene quindi il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{u} - u \dot{v}^2 = 0, \quad \ddot{v} + \frac{2u}{64 + u^2} \dot{u} \dot{v} = 0.$$

Siano ora

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(15, \pi/2),$$

$$\mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S : \quad \frac{du}{ds}(0) = -6, \frac{dv}{ds}(0) = 1/10,$$

i dati iniziali di una curva che soddisfa il precedente sistema. Tale curva è rappresentata in Figura 3.12.

### Esempio 3.3.9

**Altre superfici di rotazione:** Quanto svolto nel Paragrafo 2.1 ci consente di creare infiniti esempi di geodetiche su superfici  $S$  semplicemente ruotando delle curve lisce attorno all'asse generato da  $\mathbf{e}_3$ .

Qui di seguito ne sono presentati due; ricordiamo che il modo di procedere è il seguente:

a) scegliere la curva  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  da ruotare

$$\sigma(u) = (\alpha(u), 0, \beta(u));$$

b) scegliere il dominio della parametrizzazione  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{P}(u, v) = (\alpha(u) \cos v, \alpha(u) \sin v, \beta(u));$$

c) calcolare il sistema di equazioni delle curve geodetiche secondo la (3.18);

d) scegliere il punto iniziale  $Q$  e  $\mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S$  direzione iniziale della curva geodetica  $\gamma$  da determinare.

1. **Il vaso:** Si scelga  $\sigma(u) = (\sin u + 2, 0, u)$ , da cui si ricava

$$\mathbf{P}(u, v) = ((\sin u + 2) \cos v, (\sin u + 2) \sin v, u),$$

e si supponga  $u \in (0, 7\pi)$ ,  $v \in (-\pi, \pi)$ .

Le equazioni differenziali per le curve geodetiche sono:

$$\begin{cases} \ddot{u} - \frac{\cos u \sin u}{1 + \cos^2 u} \dot{u}^2 - \frac{\cos u (\sin u + 2)}{1 + \cos^2 u} \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} + \frac{2 \cos u}{\sin u + 2} \dot{u} \dot{v} = 0. \end{cases}$$

Siano ora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve geodetiche le cui equazioni sono soluzioni del sistema con dati iniziali rispettivamente  $Q$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S$  e  $R$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S$ . In particolare siano

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(3\pi, 0), \\ \mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S : \quad & \frac{du}{ds}(0) = 0, \frac{dv}{ds}(0) = 10, \\ R &= \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(\pi, 0), \\ \mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S : \quad & \frac{du}{ds}(0) = 5, \frac{dv}{ds}(0) = 2; \end{aligned}$$

Le soluzioni sono rappresentate in Figura 3.13.

2. **L'albero:** Si scelga  $\sigma(u) = (u \sin u + 2u, 0, u)$ , da cui si ricava

$$\mathbf{P}(u, v) = (u \sin u + 2u) \cos v, (u \sin u + 2u) \sin v, u),$$

e si suppongano  $u \in (0, 8\pi)$ ,  $v \in (-\pi, \pi)$ .

Le equazioni differenziali per le curve geodetiche sono:

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \frac{u^2 \cos u \sin u - 2 \sin u \cos u + 2u \sin u - 3u \cos^2 u - 4 \cos u + u}{u^2 \cos^2 u + 2u \cos u \sin u + 4u \cos u + 6 - \cos^2 u + 4 \sin u} \dot{u}^2 + \\ - \frac{u(4 \sin u + u \sin u \cos u + 5 + 2u \cos u - \cos^2 u)}{u^2 \cos^2 u + 2u \cos u \sin u + 4u \cos u + 6 - \cos^2 u + 4 \sin u} \dot{v}^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\ddot{v} + \frac{2(u \cos u + \sin u + 2)}{u(\sin u + 2)} \dot{u} \dot{v} = 0.$$

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve geodetiche le cui equazioni sono soluzioni del sistema con dati iniziali rispettivamente  $Q$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S$  e  $R$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S$ .

In particolare siano

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(2\pi, 0), \\ \mathbf{a} \in \mathbf{T}_Q S : \quad & \frac{du}{ds}(0) = 0, \frac{dv}{ds}(0) = 5, \\ R &= \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(7\pi, 0), \\ \mathbf{b} \in \mathbf{T}_Q S : \quad & \frac{du}{ds}(0) = -1, \frac{dv}{ds}(0) = -1/10; \end{aligned}$$

Le soluzioni sono rappresentate in Figura 3.14.

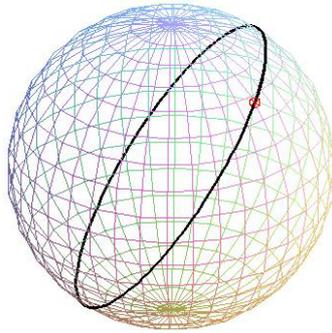


Figura 3.1: La Sfera: `plotgeod(P, -Pi/2, Pi/2, 0, 2*Pi, Pi/4, 0, 1/2, 1, [0, 150, 15], [20, 20]);`

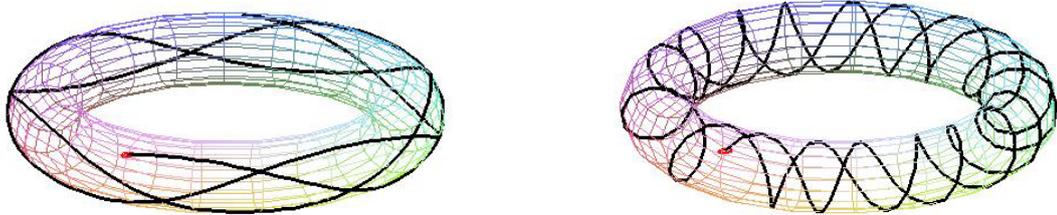


Figura 3.2: Il Toro: `plotgeod(P, 0, 2*Pi, -Pi, Pi, Pi/4, 0, 1, 1, [0, 250, 15], [20, 20]);`  
`plotgeod(P, 0, 2*Pi, -Pi, Pi, Pi/4, 0, 15, 1, [0, 200, 25], [20, 20]);`

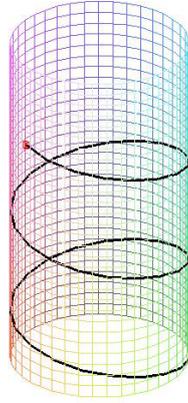


Figura 3.3: Il Cilindro: `plotgeod(P,0,4,0,2*Pi,3,0,-1,5,[0,45,15],[30,40]);`

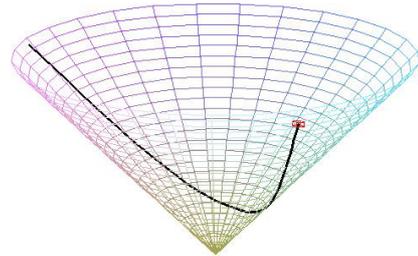
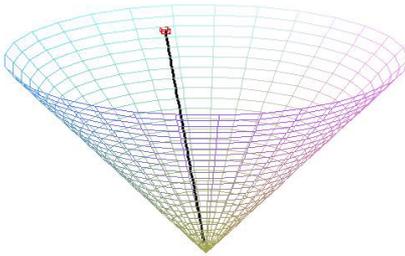


Figura 3.4: Il Cono: `plotgeod(P,0,10,0,2*Pi,9,Pi/2,-1,0,[0,30,3.5],[25,30]);`  
`plotgeod(P,0,10,0,2*Pi,9,Pi/2,-15,1/2,[0,30,25],[25,30]);`

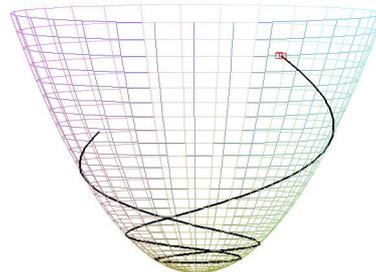
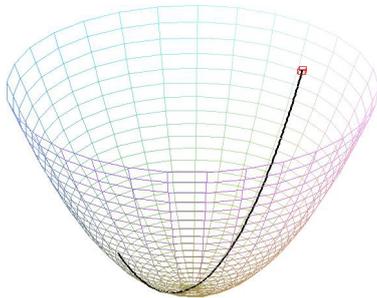


Figura 3.5: Il Paraboloide ellittico: `plotgeod(P,0,10,0,2*Pi,9,Pi/3,-1,0,[0,100,15],[30,30]);`  
`plotgeod(P,0,10,0,2*Pi,9,Pi/3,-2,1,[0,100,25],[30,30]);`

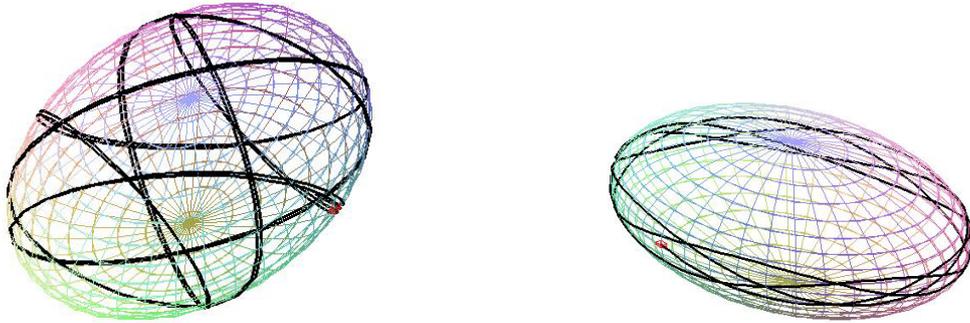


Figura 3.6: L'ellissoide: `plotgeod(P,0,2*Pi,0,2*Pi, Pi/2, Pi, 4, 1, [0, 300, 15], [40, 20]);`  
`plotgeod(P,0,2*Pi,0,2*Pi, Pi/2, Pi, 1/2, 1, [0, 300, 15], [40, 20]);`

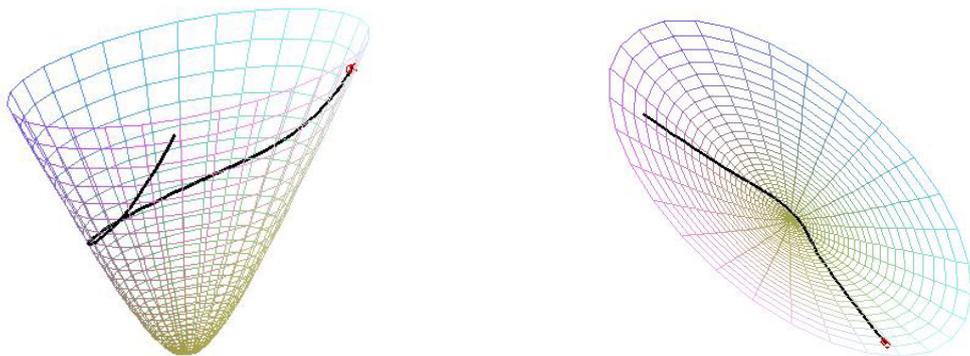


Figura 3.7: L'iperboloide ellittico: `plotgeod(P,0,2.1,0,2*Pi, 2, Pi/3, -1, 1.5, [0, 40, 25], [30, 30]);`  
`plotgeod(P,0,2.1,0,2*Pi, 2, Pi/3, -1, 0, [0, 40, 25], [30, 30]);`

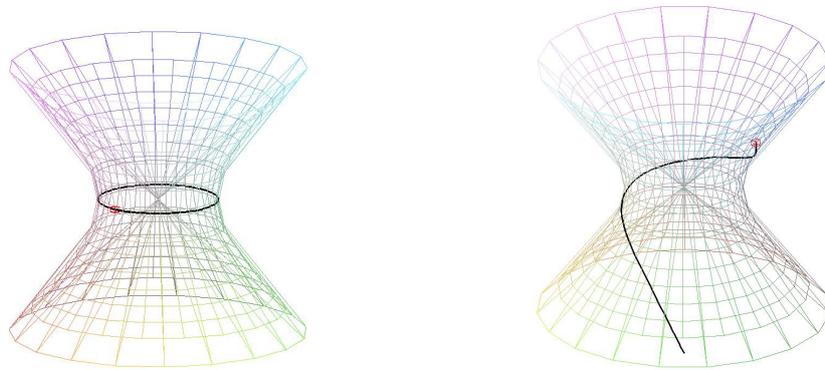


Figura 3.8: L'iperboloide iperbolico: `plotgeod(P, -4, 4, 0, 2*Pi, 1, Pi, 0, 1, [0, 100, 15], [20, 20]);`  
`plotgeod(P, -4, 4, 0, 2*Pi, 3, Pi, -3.2, 1, [0, 70, 25], [20, 20]);`

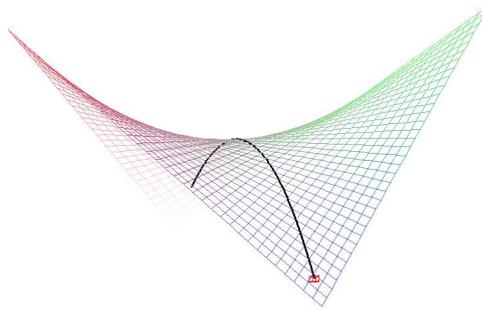


Figura 3.9: Il Paraboloido iperbolico: `plotgeod(P, -10, 10, -10, 10, -9, -9, 1, 1, [0, 160, 20], [35, 35]);`

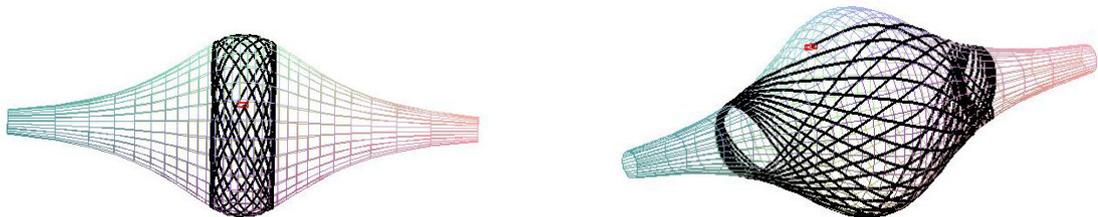


Figura 3.10: La versiera dell'Agnesi: `plotgeod(P, -1.2, 1.2, 0, 2*Pi, 0, Pi/2, 1, 2, [0, 400, 15], [30, 30]);`  
`plotgeod(P, -1.2, 1.2, 0, 2*Pi, -1/2, Pi/2, 1, 1, [0, 1000, 15], [30, 30]);`

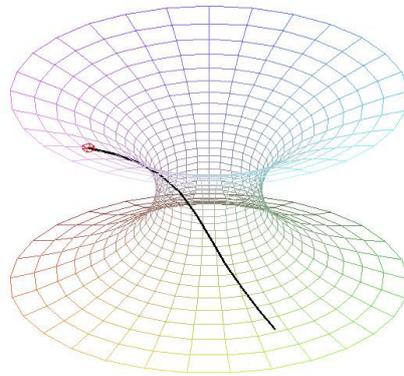


Figura 3.11: Il Catenoide: `plotgeod(P, -6, 6, -Pi, Pi, 5, 0, -15, 1, [0, 10, 25], [30, 30]);`

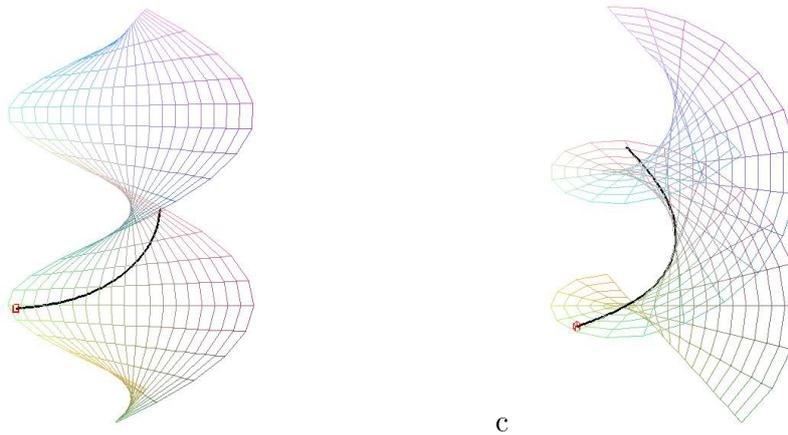


Figura 3.12: L'Elicoide: `plotgeod(P, -16, 16, 0, 2*Pi, 15, Pi/2, -6, 1/10, [0, 80, 15], [20, 20]);`

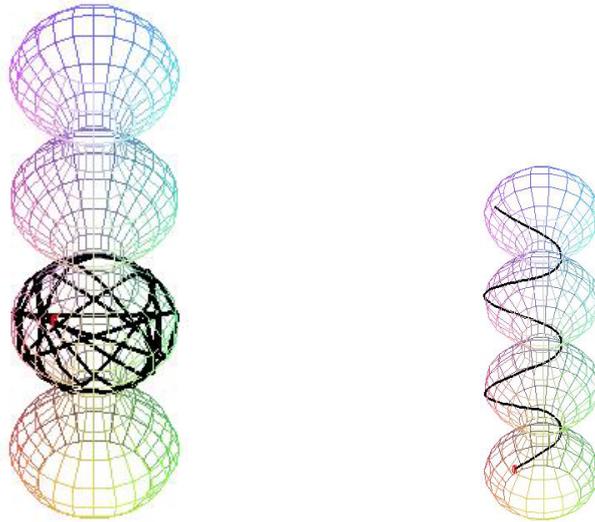


Figura 3.13: Il vaso: `plotgeod(P,0,7*Pi,-Pi,Pi,3*Pi,0,0,10,[0,100,15],[30,25]);`  
`plotgeod(P,0,7*Pi,-Pi,Pi,Pi,0,5,2,[0,100,20],[30,20]);`

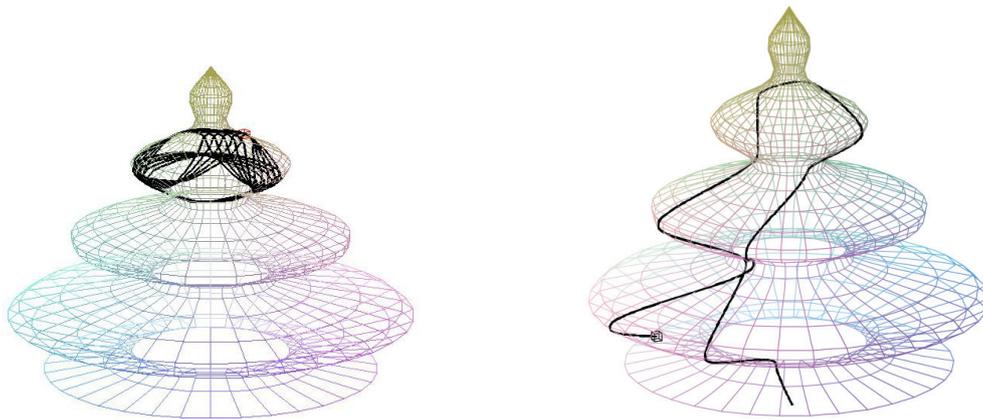


Figura 3.14: L'albero: `plotgeod(P,0,8*Pi,-Pi,Pi,2*Pi,0,0,5,[0,500,25],[35,35]);`  
`plotgeod(P,0,8*Pi,-Pi,Pi,7*Pi,0,-1,-1/10,[0,500,27],[35,35]);`

# Appendice A

## Geodetiche con Maple

### A.1 Il programma plotgeod

Come visto nel terzo capitolo, abbiamo utilizzato Maple per scrivere le equazioni delle curve geodetiche su una superficie e per disegnarne il relativo grafico. Sia quindi  $S$  una superficie e  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una sua parametrizzazione locale. Per semplicità abbiamo denotato le variabili curvilinee  $(u^1, u^2)$  con la coppia  $(u, v)$ . Il programma calcola, a partire dal vettore  $\mathbf{P}$ , le equazioni del sistema (1.11) e le risolve in  $u(s), v(s)$  con  $s$  parametro arco o multiplo di un parametro arco (cfr. Proposizione 2.1.3) utilizzando come dati iniziali le coordinate  $(u(0), v(0))$  di un punto  $Q$  e le derivate  $(\frac{du}{ds}(0), \frac{dv}{ds}(0))$ . Si ha così una geodetica  $\gamma$  che ha il punto base e il vettore tangente richiesti. Quindi il programma disegna il supporto del foglio semplice  $\mathbf{P}$  facendo variare  $u$  e  $v$  nei due intervalli specificati e su di esso traccia la curva  $\gamma$  lasciando variare  $s$  nell'intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  richiesto in input.

Definiamo innanzitutto una procedura che calcoli il prodotto scalare tra due vettori e una che, dato il vettore  $\mathbf{P}$ , calcoli  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$ :

```
dp:=proc(X,Y)
  X[1]*Y[1]+X[2]*Y[2]+X[3]*Y[3];
end;
```

```

base:=proc(P)
  local P1,P2;
  P1:=[diff(P[1],u),diff(P[2],u),diff(P[3],u)];
  P2:=[diff(P[1],v),diff(P[2],v),diff(P[3],v)];
  simplify([P1,P2]);
end:

```

Quindi scriviamo una procedura che calcoli la prima forma fondamentale  $\mathbf{G}$  del foglio  $\mathbf{P}$  dato in input. L'output per semplicità è un vettore tridimensionale del tipo  $[g_{11}, g_{12}, g_{22}]$ .

```

frst:=proc(P)
  local g11,g12,g22,J;
  J:=base(P);
  g11:=dp(J[1],J[1]);
  g12:=dp(J[1],J[2]);
  g22:=dp(J[2],J[2]);
  simplify([g11,g12,g22]);
end:

```

Affinchè la prima forma fondamentale  $G$  appaia in forma matriciale, usiamo invece il seguente programma, che viene richiamato poi per calcolare la matrice  $\mathbf{G}^{-1}$  e i simboli di Christoffel.

L'input richiesto è sempre il vettore  $\mathbf{P}$

```

matrixG:=proc(P)
  local G,X;
  X:=frst(P);
  G:=«X[1]|X[2]», <X[2]|X[3]»;
end:

```

```

inversaG:=proc(P)
  local G,X,V;
  G:=matrixG(P);

```

```

X:=(G)^(-1);
V:=[X[1,1],X[1,2],X[2,2]];
end:

Krstoffel:=proc(P)
local G,X,C111,C112,C122,C1,C211,C212,C222,C2;
G:=frst(P);
X:=inversaG(P);
C111:=1/2*X[1]*(diff(G[1],u)+diff(G[1],u)-diff(G[1],u))+
+1/2*X[2]*(diff(G[2],u)+diff(G[2],u)-diff(G[1],v));
C112:=1/2*X[1]*(diff(G[2],u)+diff(G[1],v)-diff(G[2],u))+
+1/2*X[2]*(diff(G[3],u)+diff(G[2],v)-diff(G[2],v));
C122:=1/2*X[1]*(diff(G[2],v)+diff(G[2],v)-diff(G[3],u))+
+1/2*X[2]*(diff(G[3],v)+diff(G[3],v)-diff(G[3],v));
C1:=simplify([C111,C112,C122]);
C211:=1/2*X[2]*(diff(G[1],u)+diff(G[1],u)-diff(G[1],u))+
+1/2*X[3]*(diff(G[2],u)+diff(G[2],u)-diff(G[1],v));
C212:=1/2*X[2]*(diff(G[2],u)+diff(G[1],v)-diff(G[2],u))+
+1/2*X[3]*(diff(G[3],u)+diff(G[2],v)-diff(G[2],v));
C222:=1/2*X[2]*(diff(G[2],v)+diff(G[2],v)-diff(G[3],u))+
+1/2*X[3]*(diff(G[3],v)+diff(G[3],v)-diff(G[3],v));
C2:=simplify([C211,C212,C222]);
return([op(C1),op(C2)]);
end:

```

Siamo pronti per chiedere le equazioni geodetiche, cioè il sistema (1.11), dove  $s$  è parametro naturale o un suo multiplo:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \frac{du^1}{ds} \frac{du^1}{ds} + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + \Gamma_{22}^1 \frac{du^2}{ds} \frac{du^2}{ds} = 0, \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \frac{du^1}{ds} \frac{du^1}{ds} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + \Gamma_{22}^2 \frac{du^2}{ds} \frac{du^2}{ds} = 0. \end{cases}$$

```

equazioni:=proc(P)
local G,eq1,eq2,K;
G:=frst(P);

```

```

K:=Krstoffel(P);
eq1:=diff(u(s),s$2)+subs({u=u(s),v=v(s)},K[1])*diff(u(s),s)^2+
+subs({u=u(s),v=v(s)},2*K[2])*diff(u(s),s)*diff(v(s),s)+
+subs({u=u(s),v=v(s)},K[3])*diff(v(s),s)^2=0;
eq2:=diff(v(s),s$2)+subs({u=u(s),v=v(s)},K[4])*diff(u(s),s)^2+
+subs({u=u(s),v=v(s)},2*K[5])*diff(u(s),s)*diff(v(s),s)+
+subs({u=u(s),v=v(s)},K[6])*diff(v(s),s)^2=0;
eq1,eq2;
end:

```

Ecco infine come far disegnare il grafico delle curve sulla superficie  $S$ :

```

plotgeod:=proc(P,ustart,uend,vstart,vend,u0,v0,Du0,Dv0,n,gr)
local sys,desys,dequ,deqv,listp,j,geo,plotP,punto,plotpunto;
punto:=subs({u=u0,v=v0},P);
sys:=equazioni(P);
desys:=dsolve({sys,u(0)=u0,v(0)=v0,D(u)(0)=Du0,D(v)(0)=Dv0},
{u(s),v(s)},type=numeric,output=listprocedure);
dequ:=subs(desys,u(s));
deqv:=subs(desys,v(s));
listp:=[seq(subs({u=dequ(j/n[3]),v=deqv(j/n[3])},P),j=n[1]..n[2])];
geo:=spacecurve({listp},color=black,thickness=2);
plotP:=plot3d(P,u=ustart..uend,v=vstart..vend,grid=[gr[1],gr[2]]);
plotpunto:=pointplot3d(punto,color=red,symbol=box);
display({geo,plotP,plotpunto},style=wireframe,scaling=constrained);
end:

```

Come input sono richiesti nell'ordine:  $P$  parametrizzazione della superficie;  $(ustart, uend, vstart, vend)$  estremi dell'intervallo in cui sono definite  $u$  e  $v$ ;  $(u0, v0, Du0, Dv0)$  dati iniziali delle equazioni differenziali;  $n$  vettore le cui prime due componenti determinano gli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ , dominio della curva geodetica  $\gamma$ , in cui è definito  $s$  e la cui terza componente individua la partizione di  $[a, b]$  e che quindi rende la curva più liscia man mano che cresce;  $gr$  vettore che stabilisce la distanza tra le linee coordinate.

### Esempio A.1.1

Sia dato come vettore  $\mathbf{P}$  il foglio semplice

```
esempio:=[(sin(u)/u+2/u)*cos(v), (sin(u)/u+2/u)*sin(v), u];
```

e supponiamo che ci interessi  $u \in (-6\pi, 8\pi)$ ,  $v \in (0, 2\pi)$ .

Per calcolare le equazioni geodetiche scriviamo

```
equazioni(esempio);
```

Supponiamo ora di voler vedere la curva geodetica uscente dal punto

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}(2\pi, \pi)$$

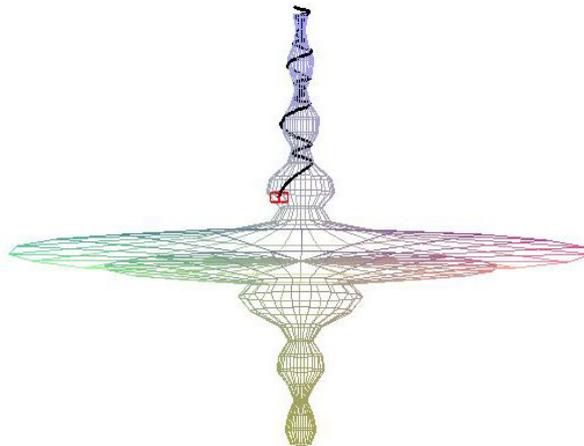
con direzione

$$\frac{du}{ds}(0) = 2.5, \quad \frac{dv}{ds}(0) = 1,$$

e imponiamo  $s \in [0, 110/15]$ . Scriviamo allora

```
plotgeod(esempio, -6*Pi, 8*Pi, 0, 2*Pi, 2*Pi, Pi, 2.5, 1, [0, 110, 15], [30, 20]);
```

e otteniamo la seguente figura in cui il punto  $Q$  viene evidenziato in un rettangolino rosso.



## A.2 Il programma plotgeodpunti

Abbiamo visto nel Teorema 2.2.2 di Hopf-Rinow che, dati due punti  $Q, R$  sul supporto di un foglio semplice di superficie  $\mathbf{P} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva che minimizza il cammino  $\overline{QR}$  è da cercarsi tra le curve geodetiche.

Abbiamo allora creato un programma che, similmente a quanto fatto nel precedente paragrafo, calcola l'equazione della curva geodetica passante per due punti e restituisce una visualizzazione grafica.

```
plotgeodpunti:=proc(P, ustart, uend, vstart, vend, u0, v0, u1, v1, gr)
  local n, sys, desys, dequ, deqv, listp, j, geo, plotP,
    knot1, knot2, plotknot1, plotknot2;
  n:= [0, 150, 15];
  knot1:=subs({u=u0, v=v0}, P);
  knot2:=subs({u=u1, v=v1}, P);
  sys:=equazioni(P);
  desys:=dsolve({sys, u(0)=u0, v(0)=v0, u(10)=u1, v(10)=v1}, {u(s), v(s)},
    type=numeric, maxmesh=8192, output=listprocedure);
  dequ:=subs(desys, u(s));
  deqv:=subs(desys, v(s));
  listp:= [seq(subs({u=dequ(j/n[3]), v=deqv(j/n[3])}, P), j=n[1]..n[2])];
  geo:=spacecurve({listp}, color=black, thickness=2);
  plotP:=plot3d(P, u=ustart..uend, v=vstart..vend, grid=[gr[1], gr[2]]);
  plotknot1:=pointplot3d(knot1, color=red, symbol=box);
  plotknot2:=pointplot3d(knot2, color=blue, symbol=box);
  display({geo, plotP, plotknot1, plotknot2},
    style=wireframe, scaling=constrained);
end;
```

Come input sono richiesti nell'ordine:  $P$  parametrizzazione della superficie;  $(ustart, uend, vstart, vend)$  estremi dell'intervallo in cui sono definite  $u$  e  $v$ ;  $(u0, v0)$  e  $(u1, v1)$  coordinate curvilinee dei due punti tra cui calcolare la curva;  $gr$  vettore che stabilisce la distanza tra le linee coordinate.

Non viene più richiesto l'intervallo  $[a, b]$  dominio della curva geodetica, in

quanto nel programma si è scelto di assegnare al punto  $Q$  il valore  $s = 0$  e a  $R$  il valore  $s = 10$ .

Prima di dare un esempio di come funziona il programma, è giusto fare due osservazioni:

**Osservazione A.2.1.** Nel programma viene utilizzato il sistema (1.11) che sappiamo essere valido solo per  $s$  parametro naturale. Imponendo sempre che il punto iniziale corrisponda al valore  $s = 0$  e il punto finale a  $s = 10$ , e tenendo conto che la distanza tra questi due punti cambia ogni volta, non è però assolutamente detto che  $s$  sia parametro d'arco. Come già detto anche nel paragrafo A.1, possiamo ragionevolmente supporre che  $s$  sia un multiplo di un parametro d'arco, e questa scelta lascia invariato il sistema (cfr. Proposizione 2.1.3).

**Osservazione A.2.2.** Il programma, contrariamente a quello illustrato nel precedente paragrafo, non sempre restituisce quanto richiesto. Infatti Maple usa un metodo numerico di risoluzione che non sempre converge. In questo caso l'errore viene segnalato tramite l'output:

Error, (in dsolve/numeric/bvp) initial Newton iteration is not converging.

### Esempio A.2.1

Sia dato come vettore  $\mathbf{P}$  il foglio semplice

```
eempio:=[(sqrt(u))*cos(v),(sqrt(u))*sin(v),(0.5)^u];
```

e supponiamo che ci interessi  $u \in (0, 5)$ ,  $v \in (0, 2\pi)$ .

Per calcolare le equazioni geodetiche scriviamo come prima

```
equazioni(eempio);
```

Supponiamo ora di voler vedere la curva geodetica che unisce il punto

$$Q = \mathbf{P}(u(0), v(0)) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$$

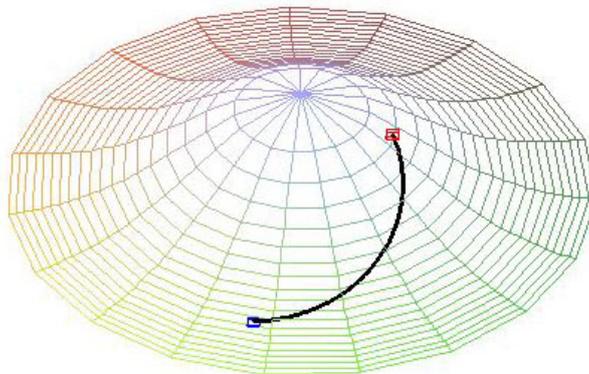
con il punto

$$R = \mathbf{P}(u(10), v(10)) = \mathbf{P}\left(3, \frac{\pi}{2}\right).$$

Scriviamo allora

```
plotgeodpunti(eempio,0,5,0,2*Pi,1/2,pi,3,pi/2,[20,20]);
```

e otteniamo la seguente figura in cui il punto  $Q$  viene evidenziato in un rettangolino rosso e il punto  $R$  in uno blu.



# Bibliografia

- [Car76] Manfredo Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [Dup93] Johan Dupont. *Differential Geometry*. Aarhus Matematisk Institut, 1993.
- [GG95] Edoardo Vesentini Graziano Gentili, Fabio Podestà. *Lezioni di geometria differenziale*. Programma di matematica, fisica, elettronica. Torino Bollati Boringhieri, 1995.
- [Goe70] Abraham Goetz. *Introduction to differential geometry*. Reading, Massachusetts Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [MA06] Francesca Tovena Marco Abate. *Curve e superfici*. Springer Verlag, 2006.
- [Opr97] John Oprea. *Differential geometry and its applications*. Upper Daddle River Prentice Hall, 1997.

Chi mi conosce bene lo sa, in questo lavoro ho dato tutta me stessa, o almeno ci ho provato, con impegno e dedizione. E' solo una tesina triennale, ma tutto sommato è la mia prima laurea (!!!) e soprattutto, per come li ho vissuti, questi mesi di tesi sintetizzano bene la bellezza, la fatica la confusione e l'avventura di questi tre anni (e mezzo) di università.

Voglio allora ringraziare coloro che hanno reso possibile tutto questo: il professor Alzati e la professoressa Acchiappati, che hanno sopportato pazientemente tutti i miei sbagli (gec!), quindi i miei compagni d'avventura, mamma Ila, la Carla che finalmente si è fatta scoprire, le tenerissime Francy A&P, e Naldi, e Pise, e Sergio! Quindi (come dimenticare!) la Betta, Roger, la Ire, Pietro, la Laura, Skeggione, Ale, la Bea, il Marco, Cata, Gio, Salvo, ... insomma, non c'è bisogno che scriva oltre, ringrazio di cuore tutte le persone dell'Auletta di mate che mi hanno sostenuto e sopportato! Grazie! Ancora, non posso dimenticare la Elena, la Sissina (csf!) e la Vale (e Maurissimo!) che mi hanno più volte raccolto col cucchiaino (del tablè!) nei numerosi momenti di sconforto! Ancora, ringrazio la Sara e Matteo, Erica, tutte le pallavoliste e la Kangourou!

Infine ringrazio con tutto il cuore le persone più importanti, che non si cureranno di essere citate per ultime perché sanno di essere le prime: i miei genitori (ai quali questa tesi è dedicata), Andrea e i miei fratelli Simone, Elisa e Jessica!