

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



SUPERFICI MINIME

RELATORE:
Prof. Alberto ALZATI

ELABORATO FINALE DI
Lisa MILANESI
Matr. 708283

ANNO ACCADEMICO 2011 - 2012

Indice

Introduzione	iii
1 Richiami di geometria differenziale e analisi complessa	1
1.1 Superfici e curve in \mathbb{R}^3	1
1.2 Superfici di rotazione e superfici rigate	15
1.3 Isometrie e applicazioni conformi tra superfici	16
1.4 Forme differenziali lineari	21
1.5 Richiami di analisi complessa	23
2 Le superfici minime	26
2.1 Variazione prima del funzionale d'area	27
2.2 Equazione delle superfici minime	30
2.3 Coordinate isoterme	32
2.4 Superfici minime e funzioni analitiche di variabile complessa	36
2.5 Il teorema di Bernstein	39
2.6 La mappa di Gauss	43
3 Esempi di superfici minime	45
3.1 Il piano	45
3.2 Il catenoide	46
3.3 L'elicoide	49
3.4 Connessione tra catenoide ed elicoide	52
3.5 La superficie di Enneper	55
3.6 La superficie di Scherk	57
3.7 La superficie di Costa	60
3.8 Applicazioni della teoria delle superfici minime	61

Introduzione

La teoria delle superfici minime si è sviluppata a partire dal problema delle superfici di area minima, noto anche come problema di Plateau. Il problema può essere presentato in questo modo: data una curva regolare chiusa, non annodata, $C \subset \mathbb{R}^3$ cercare (se esiste) una superficie S di area minima tra quelle che hanno C come bordo. Tutte le superfici di area minima sono una soluzione di un qualche problema di Plateau.

Plateau nei suoi studi fece largo uso delle lamine saponate che si possono ottenere immergendo un reticolo di ferro in una soluzione di acqua e sapone, per poi estrarlo delicatamente. Se l'esperimento è ben eseguito si ottiene una lamina saponata che ha come bordo lo stesso reticolo. Questa lamina rappresenta la superficie di area minima per quel reticolo, questo perché la tensione superficiale della lamina saponata tende a ridurne il più possibile l'estensione, finché essa non si trova allo stato di energia minima.

Il nome superficie minima fu dato da Lagrange nel 1760 a quelle superfici che sono soluzioni di un problema variazionale e più precisamente punti critici del funzionale d'area. Grazie al suo lavoro Lagrange diede il primo esempio di superfici minime: il catenoide, che si ottiene facendo ruotare una catenaria intorno ad un asse che non la interseca e che sia perpendicolare all'asse di simmetria della catenaria.

Nel 1776 Meusnier diede una definizione più geometrica per le superfici minime: esse sono le superfici che hanno curvatura media nulla in ogni punto. Egli scoprì la seconda classica superficie minima: l'elicoide, ottenuta ruotando una retta attorno ad un asse a lei perpendicolare e traslandola contemporaneamente lungo l'asse.

L'utilità delle superfici minime in campi come la chimica, la biologia e l'architettura fece sì che nel secolo scorso molti matematici si interessassero al

problema e questo portò alla scoperta di moltissimi nuovi esempi di superfici minime. Tra i maggiori studiosi ricordiamo Scherk e Hoffman, che trovò intere famiglie di superfici minime periodiche.

In questo elaborato cercheremo di dare un quadro generale di ciò che sono le superfici minime e delle peculiarità che possiedono.

Nel primo capitolo esporremo alcuni concetti necessari per lo studio delle superfici minime. Si inizierà con richiami di geometria differenziale delle curve e delle superfici (§1.1). Dopo aver definito le superfici, ricorderemo i concetti di prima e seconda forma fondamentale e di curvatura di Gauss. Infatti molte importanti proprietà associate ad una superficie regolare dipendono solo dalla sua prima forma fondamentale. Verranno poi definite le isometrie, le applicazioni conformi e le coordinate isoterme.

Particolare attenzione (§1.2) sarà riservata a due classi particolari di superfici quelle di rotazione, generate facendo ruotare una curva attorno ad un asse che non la interseca, e quelle rigate, costituite da un insieme di rette (o intervalli di rette) variabili con continuità. Infine in §1.5 presenteremo le funzioni olomorfe ed enunceremo alcune proprietà che le riguardano, utili per il seguito.

Nel secondo capitolo analizzeremo le proprietà principali delle superfici minime.

Per prima cosa (§2.1) proveremo che la definizione di Meusnier, secondo cui una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ è detta minima se la sua curvatura media H è identicamente nulla, è equivalente a quella di Lagrange secondo cui una superficie minima è un punto critico del funzionale d'area. Dimostreremo che è sempre vero che una superficie che è un minimo per il funzionale d'area, quindi una superficie di area minima, è anche una superficie minima, ma non è detto che valga il viceversa. Ciò è vero, però, se una superficie può essere rappresentata come grafico di una funzione differenziabile. Il risultato principale di questo capitolo sarà il fatto che le superfici minime che sono anche il grafico di una funzione differenziale sono tutte e sole le soluzioni di una particolare equazione differenziale (2.2) chiamata, appunto, equazione delle superfici minime; mostreremo come si arriva alla formulazione di questa equazione. A questo riguardo dimostreremo il teorema di Bernstein (§2.5): se una soluzione della precedente equazione delle superfici minime è definita

su tutto \mathbb{R}^2 , la superficie è il piano.

L'ultima parte del capitolo sarà dedicata alla presentazione degli stretti rapporti che intercorrono tra le superfici minime e la teoria delle funzioni olomorfe. Tale legame è utilizzato spesso per la costruzione di nuovi esempi di tali superfici.

Nel terzo capitolo presenteremo alcuni esempi di superfici minime. Per prima cosa saranno descritte le prime due superfici storicamente scoperte: il catenoide e l'elicoide. Si dimostrerà che, oltre al piano, il catenoide è l'unica superficie minima di rotazione e che l'elicoide è l'unica superficie minima rigata. Verrà provato anche che l'elicoide e il catenoide sono superfici fra loro isometriche e tale isometria sarà descritta in dettaglio.

Il successivo esempio che verrà proposto sarà quello della superficie minima di Enneper che in realtà non è una superficie secondo la nostra definizione perché il suo supporto presenta delle autointersezioni, che verranno determinate.

Successivamente verrà presentata la superficie di Scherk che ha la caratteristica di essere una superficie doppiamente periodica.

Infine sarà introdotta una delle ultime superfici scoperte in ordine di tempo, precisamente nel 1983, ossia la superficie di Costa che è topologicamente equivalente ad una sfera con tre buchi ed un manico.

L'elaborato si concluderà accennando a come le superfici minime siano state sfruttate in diversi settori, ad esempio in architettura e in mineralogia.

Capitolo 1

Richiami di geometria differenziale e analisi complessa

1.1 Superfici e curve in \mathbb{R}^3

Iniziamo il nostro lavoro esponendo in breve alcuni concetti della teoria delle curve e delle superfici differenziali. Tutti gli oggetti che definiremo appartengono a \mathbb{E}^3 , ma, grazie ad un sistema di riferimento affine fissato $R(O, V)$ dove V è uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 su \mathbb{R} dotato della sua base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, lo si potrà identificare con \mathbb{R}^3 .

Definizione 1.1. Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^3$ è una curva regolare nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 se per ogni punto $p \in C$ esiste un intorno aperto di p omeomorfo ad una sfera aperta V in \mathbb{R}^3 e un'applicazione $\alpha : I = (a, b) \rightarrow V \cap C$ con $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tale che:

(i) α è differenziabile, cioè posto

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (t) \in I$$

le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ hanno derivate di ogni ordine in I (ovvero $\in C^\infty(a, b)$);

(ii) α è un omeomorfismo;

(iii) $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ dove

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

è il vettore tangente alla curva C nel punto $\alpha(t)$.

α è detta parametrizzazione locale regolare della curva C con parametro t .

Siano p, q due punti di C , siano V_p e V_q rispettivamente intorno aperti di p e q rispettivamente omeomorfi ad una sfera aperta tali che $V_p \cap V_q \neq \emptyset$. Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow C \cap V_p$ un'applicazione tale che $\alpha(t) = p$ e sia $\beta : (c, d) \rightarrow C \cap V_q$ un'applicazione tale che $\beta(t) = q$. Allora condizione perché la parametrizzazione sia regolare è che, ogni volta che si verifica la situazione precedente, l'applicazione $\phi : \alpha^{-1}(V_p \cap C \cap V_q) \rightarrow \beta^{-1}(V_q \cap C \cap V_p)$ sia biunivoca, bicontinua e bidifferenziabile.

Sia $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione locale regolare di una curva C , fissato un punto $t_0 \in I$ definiamo lunghezza d'arco la funzione

$$s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

dove la quantità $s(t)$ è detta lunghezza dell'arco di curva tra $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ e $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ è la lunghezza del vettore tangente (ovvero la sua norma). La lunghezza d'arco definisce un diffeomorfismo di un qualunque intervallo $[c, d] \subset (a, b)$ sull'immagine $s([c, d])$ che è un intervallo $J \subset \mathbb{R}$, infatti $s \in C^\infty$ e, poiché α è regolare, $s'(t) > 0 \forall t \in (a, b)$. Se scegliamo la lunghezza d'arco s come parametro sulla curva C , si ha

$$\|\alpha'(s)\| = \frac{\|\alpha'(t)\|}{s'(t)} = 1 \quad \forall s \in J.$$

Se $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$, α è detta parametrizzazione naturale.

Supponiamo α parametrizzazione naturale di una curva C , allora $\forall p = \alpha(s) \in C$, tale che $\alpha''(s) \neq 0$, sono ben definiti:

- * $\mathbf{T}(p) = \alpha'(s)$ il versore tangente della curva in p .
- * $\mathbf{N}(p) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ il versore normale principale in p , perpendicolare a $\mathbf{T}(p)$.
- * $\mathbf{B}(p) = \mathbf{T}(p) \wedge \mathbf{N}(p)$ il versore binormale, dove (\wedge) è l'usuale prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 .

Definizione 1.2. Sia α una parametrizzazione naturale della curva C . Si definiscono:

- (i) *vettore curvatura*, il campo vettoriale lungo C

$$\mathbf{K} = \nabla_{\mathbf{T}(p)}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{T} = k\mathbf{N},$$

dove $\forall p \in C \nabla_{\mathbf{T}(p)}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{T} \in T_p C$ è la derivata del campo di versori \mathbf{T} rispetto al parametro, che ci dice come varia il campo \mathbf{T} quando ci si muove lungo una curva α uscente da p con velocità $\mathbf{T}(p)$; in altre parole considerata la restrizione di \mathbf{T} alla curva α , $\nabla_{\mathbf{T}(p)}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{T} = \frac{d(\mathbf{T} \circ \alpha)}{ds} \Big|_{s=0}$, se il punto p corrisponde al valore $s = 0$ del parametro.

\mathbf{K} è sempre parallelo ed equiverso al versore \mathbf{N} in ogni punto $p \in C$;

(ii) *curvatura*, la funzione differenziabile su C

$$k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{N} = |\mathbf{K}|;$$

(iii) *torsione*, la funzione differenziabile su C

$$\tau = \nabla_{\mathbf{T}(p)}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}.$$

dove \cdot indica il prodotto scalare usuale.

Definizione 1.3. Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie differenziabile regolare se per ogni punto $p \in S$ esistono un intorno aperto di p , omeomorfo ad una sfera aperta V in \mathbb{R}^3 e un'applicazione $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ con U aperto in \mathbb{R}^2 omeomorfo ad un disco aperto tale che:

(i) \mathbf{x} è differenziabile, cioè posto

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

le funzioni $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ hanno derivate parziali continue di ogni ordine in U (cioè $\in \mathbf{C}^\infty(U)$);

(ii) \mathbf{x} è un omeomorfismo;

(iii) Detta J la matrice jacobiana di \mathbf{x}

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix},$$

J ha rango massimo (quindi uguale a 2) o equivalentemente

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0.$$

\mathbf{x} è detta parametrizzazione regolare della superficie S e le $(u, v) \in U$ sono le coordinate locali del punto $p = \mathbf{x}(u, v)$.

Siano p, q due punti di S , siano V_p e V_q rispettivamente intorno aperti di p e q rispettivamente omeomorfi ad una sfera aperta tali che $V_p \cap V_q \neq \emptyset$. Sia $\mathbf{x}_1 : U_p \rightarrow V_p \cap S$ un'applicazione, dove U_p è un aperto in \mathbb{R}^2 omeomorfo a un disco aperto, tale che $\mathbf{x}_1(u, v) = p$ e sia $\mathbf{x}_2 : U_q \rightarrow V_q \cap S$ un'applicazione, dove U_q è un aperto in \mathbb{R}^2 omeomorfo a un disco aperto, tale che $\mathbf{x}_2(u, v) = q$. Allora la condizione affinché la parametrizzazione sia regolare è che ogni volta che si verifica la situazione precedente l'applicazione $\psi : \mathbf{x}_1^{-1}(V_p \cap S \cap V_q) \rightarrow \mathbf{x}_2^{-1}(V_q \cap S \cap V_p)$ sia biunivoca, bicontinua e differenziabile.

Un importante concetto associabile ad una superficie è quello di bordo.

Sia S' una superficie secondo la definizione 1.3 e sia $S \subset S'$ un suo sottoinsieme tale che $S = \bar{S}$, ossia che S sia un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^3 . Sia poi $\mathbf{x} : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow R^3$ una parametrizzazione di S , in cui supponiamo ora che la regione R sia chiusa. Detto $A = \overset{\circ}{R}$ l'interno di R , consideriamo la sua immagine $\overset{\circ}{S}_{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(A)$ attraverso \mathbf{x} , che è un sottoinsieme di $S = \mathbf{x}(R)$. Possiamo introdurre l'insieme differenza

$$\partial S_{\mathbf{x}} = S \setminus \overset{\circ}{S}_{\mathbf{x}},$$

che chiamiamo bordo di S (relativo a \mathbf{x}). $\partial S_{\mathbf{x}}$ contiene tutti i punti che in termini puramente geometrici è naturale considerare punti di bordo S , ma può contenere anche punti che dipendono da come abbiamo parametrizzato la superficie; ciò spiega l'aggiunta del pedice \mathbf{x} nella notazione. È dunque naturale definire come bordo di S (come oggetto geometrico intrinseco della superficie) l'insieme

$$\partial S = \bigcap_{\mathbf{x}} \partial S_{\mathbf{x}}$$

dove l'intersezione è fatta su tutte le possibili parametrizzazioni (anche non regolari) di S .

Sia S una superficie di \mathbb{R}^3 assegnata mediante una parametrizzazione locale $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e sia $\beta : I \rightarrow U$ la parametrizzazione locale di una curva regolare nel piano, $\beta(t) = (u(t), v(t))$.

L'applicazione $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la parametrizzazione di una curva

regolare su S data da

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(\beta(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))), \quad t \in I$$

con vettore tangente in ogni punto $\beta(t_0)$ dato da

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

dove

$$\begin{aligned} x'(t_0) &= \frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{u(t_0), v(t_0)} u'(t_0) + \frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{u(t_0), v(t_0)} v'(t_0), \\ y'(t_0) &= \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{u(t_0), v(t_0)} u'(t_0) + \frac{\partial y}{\partial v} \Big|_{u(t_0), v(t_0)} v'(t_0), \\ z'(t_0) &= \frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{u(t_0), v(t_0)} u'(t_0) + \frac{\partial z}{\partial v} \Big|_{u(t_0), v(t_0)} v'(t_0). \end{aligned}$$

Quindi le curve regolari α su S possono essere viste come immagine mediante \mathbf{x} di una curva regolare in U . In particolare le immagini C_1, C_2 mediante \mathbf{x} delle curve definite da $u = \cos t$ e $v = \sin t$ sono dette linee coordinate con i vettori tangenti $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ rispettivamente.

Lemma 1.1.1 [Per una dimostrazione si veda [3]]

Sia p un punto regolare della superficie S ; se consideriamo l'insieme di tutte le curve su S che passano per p , allora la totalità di tutti i vettori tangenti in questo punto alla curva costituiscono uno spazio vettoriale bi-dimensionale sul campo \mathbb{R} .

Definizione 1.4. Lo spazio vettoriale descritto nel Lemma 1.1.1 viene chiamato spazio tangente della superficie S nel punto p e lo indicheremo con $T_p(S)$, lo spazio affine $L(p, T_p(S))$ è detto piano tangente a S in p .

Quindi una superficie S ha in ogni punto un piano tangente che, per come è stato definito, è indipendente dalla parametrizzazione usata.

Ad ogni parametrizzazione regolare \mathbf{x} di una superficie differenziabile $S \subset \mathbb{R}^3$ è possibile associare la seguente terna di campi vettoriali differenziabili:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ \mathbf{x}_v &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}.\end{aligned}$$

- Osservazione 1.** (i) \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v dipendono dalla parametrizzazione \mathbf{x} .
(ii) $\forall p = \mathbf{x}(u, v) \in S$ i vettori $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$ formano una base di $T_p(S)$, in generale non ortonormale.
(iii) \mathbf{N} è detto campo di versori normali lungo S , \mathbf{N} è univocamente determinato, dipende solo dall'orientazione scelta su S ; un'orientazione opposta determina un versore opposto (si veda il Lemma 1.1.2 e la definizione 1.7).
(iv) $\forall p = \mathbf{x}(u, v) \in S$ i vettori $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{N}(u, v)\}$ formano una base di $T_p\mathbb{R}^3$ positivamente orientata.

Lemma 1.1.2 [Per una dimostrazione si veda [3] p.105]

Assegnare su una superficie differenziabile S di \mathbb{R}^3 un campo di versori normali, è equivalente ad assegnare un'orientazione sulla superficie.

Una orientazione \mathbf{N} su S induce una orientazione in ogni spazio tangente $T_p(S)$, $p \in S$. Diremo che una base $\{v, w\} \in T_p(S)$ è positiva se il vettore $(v \wedge w)$ ha lo stesso verso di \mathbf{N} .

Il prodotto scalare naturale di \mathbb{R}^3 induce su ogni spazio tangente $T_p(S)$ di una superficie regolare S un prodotto scalare, che è denotato con $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$: se $w_1, w_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, allora $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ è uguale al prodotto scalare di w_1 e w_2 come vettori in \mathbb{R}^3 . A questo prodotto scalare, che è una applicazione bilineare simmetrica (i.e., $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_2, w_1 \rangle$ e $\langle w_1, w_2 \rangle$ è lineare sia in w_1 sia in w_2), corrisponde una forma quadratica $I_p(w) : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0. \quad (1.1)$$

Definizione 1.5. La forma quadratica I_p su $T_p(S)$ data dalla (1.1) è chiamata prima forma fondamentale della superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ in $p \in S$.

Vogliamo ora esprimere la prima forma fondamentale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, associata alla parametrizzazione $\mathbf{x}(u, v)$ in p . Un vettore tangente $w \in T_p(S)$ è un vettore tangente a una curva parametrizzata $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ (con $u_0 = u(0)$ e $v_0 = v(0)$), otteniamo

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

dove le funzioni u' e v' sono valutate in $t = 0$ e le quantità

$$\begin{aligned} g_{11} &= E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p \\ g_{12} &= g_{21} = F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ g_{22} &= G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned}$$

sono i coefficienti della prima forma fondamentale nella base $\{\mathbf{x}_u(p), \mathbf{x}_v(p)\}$ di $T_p(S)$.

La prima forma fondamentale ci permette di effettuare delle misure sulla superficie senza dover fare riferimento allo spazio ambiente \mathbb{R}^3 in cui si trova la superficie.

Prendiamo una curva $\alpha : I \rightarrow S$ con $0 \in I$; se $\forall t \in I$ $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ è contenuto in un aperto di S parametrizzato da $\mathbf{x}(u, v)$ possiamo calcolare la lunghezza d'arco tra $\alpha(0)$ e $\alpha(t)$ attraverso la formula

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

Inoltre il coseno dell'angolo ϑ tra due curve regolari su S con parametrizzazione α e β che si intersecano in un punto $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ è dato da

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

In particolare il coseno dell'angolo φ delle linee coordinate di una parametrizzazione $\mathbf{x}(u, v)$ è

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{\|\mathbf{x}_u\| \|\mathbf{x}_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Segue che le linee coordinate di una parametrizzazione sono ortogonali se e solo se $F(u, v) = 0$ per ogni (u, v) . Una tale parametrizzazione è chiamata parametrizzazione ortogonale.

La questione metrica che maggiormente ci interessa è il calcolo dell'area di una regione chiusa e limitata di una superficie regolare S .

Un dominio (regolare) di S è un sottoinsieme aperto e connesso di S tale che il bordo della sua chiusura è immagine di una circonferenza attraverso un omeomorfismo differenziabile che è regolare (cioè i differenziali delle applicazioni che lo definiscono sono diversi da zero) tranne che per un numero finito di punti della circonferenza.

Una regione di S è l'unione di un dominio con il bordo della sua chiusura.

Una regione di $S \subset \mathbb{R}^3$ è limitata se è contenuta in una qualche palla di \mathbb{R}^3 di raggio finito. Considereremo regioni limitate R che sono contenute in un intorno di coordinate $x(u, v)$ di una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. In altre parole R è l'immagine attraverso \mathbf{x} di una regione limitata $Q \subset U$.

La funzione $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|$, definita in U e valutata in $(u, v) \in U$, l'area del parallelogramma generata dai vettori $\mathbf{x}_u(u, v)$ e $\mathbf{x}_v(u, v)$. L'integrale

$$\iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv$$

non dipende dalla parametrizzazione \mathbf{x} .

Definizione 1.6. Sia $R \subset S$ una delimitata regione di una superficie regolare contenuta in un intorno di coordinate della parametrizzazione $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Il numero positivo

$$\iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv = A(R), \quad \text{dove } Q = \mathbf{x}^{(-1)}(R),$$

è chiamata area di R .

Osserviamo che

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2,$$

quindi la funzione integranda può essere riscritta come

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Torniamo a considerare il versore \mathbf{N} che avevamo definito come

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Così abbiamo una mappa differenziale $\mathbf{N} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni $(u, v) \in U$ un versore $\mathbf{N}(u, v)$, ovvero ad ogni punto $q = \mathbf{x}(u, v)$ di S la mappa associa un versore $\mathbf{N}(q)$.

Più in generale, se $V \subset S$ è un insieme aperto in S e $\mathbf{N} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una mappa differenziabile che associa ad ogni $q \in V$ un versore normale a q , diremo che \mathbf{N} è un campo differenziabile di versori normali su V .

Definizione 1.7. Una superficie regolare è orientabile se ammette un campo differenziabile di versori normali definiti su tutta la superficie; la scelta di tale campo \mathbf{N} è chiamata orientazione di S .

D'ora in poi S denoterà una superficie regolare orientata con orientazione \mathbf{N} .

Definizione 1.8. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una orientazione \mathbf{N} .

La mappa

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow \mathbf{S}^2 \\ p &\longmapsto \mathbf{N}(p) \end{aligned}$$

dove $\mathbf{N}(p)$ è il versore normale ad S in p e \mathbf{S}^2 è la sfera unitaria:

$$\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

è detta mappa di Gauss di S .

La mappa di Gauss N mette in relazione la geometria di S con quella della sfera \mathbf{S}^2 ; in generale N dà informazioni sulla geometria locale di S e su quanto questa si discosta localmente dall'essere una sfera.

Consideriamo il differenziale della mappa di Gauss:

$$d_p N : T_p(S) \longrightarrow T_{\mathbf{N}(p)}(\mathbf{S}^2),$$

poiché $\forall p \in S$ si ha

$$T_{\mathbf{N}(p)}(\mathbf{S}^2) = \mathbf{N}(p)^\perp = T_p(S)$$

$d_p N$ può essere visto come un operatore su $T_p(S)$:

$$\begin{aligned} d_p N : T_p(S) &\longrightarrow T_p(S) \\ v &\longmapsto d_p N(v) = \nabla_v^{\mathbb{R}^3} \mathbf{N} \in T_p(S). \end{aligned}$$

La mappa lineare $d_p N : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$ per ogni curva C su S parametrizzata con una funzione $\alpha(t)$ tale che $\alpha(0) = p$, agisce così: consideriamo la curva parametrizzata $N \circ \alpha(t) = N(t)$ sulla sfera \mathbf{S}^2 , cioè limitiamo il versore normale \mathbf{N} ai punti della curva C . Il vettore tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ è un vettore in $T_p(S)$ che misura il tasso di variazione del vettore normale \mathbf{N} , ristretto alla curva C in p , cioè per $t = 0$. Quindi $d_p N$ misura come N si allontana da $N(p)$ in un intorno di p . Nel caso delle curve questa misura è data da un numero: la curvatura; mentre nel caso delle superfici questa misura è caratterizzata dalla mappa lineare $d_p N$.

Proposizione 1.1 [Per una dimostrazione si veda [3] p.140]

Il differenziale $d_p N : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$ prima definito è una mappa lineare autoaggiunta rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ di $T_p(S)$.

Questa proposizione ci permette di associare a $d_p N$ una forma quadratica Q in $T_p(S)$, data da $Q(v) = \langle d_p N(v), v \rangle$, $v \in T_p(S)$.

Definizione 1.9. La forma quadratica \mathbf{II}_p definita in $T_p(S)$ da

$$\mathbf{II}_p(v) = -\langle d_p N(v), v \rangle$$

è chiamata seconda forma fondamentale di S in p .

Definizione 1.10. Sia C una curva regolare in S passante per $p \in S$, k la curvatura di C in p e $\cos \vartheta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$ dove \mathbf{n} è il versore normale principale a C in p e \mathbf{N} è il versore normale a S in p . Il numero $k_n = k \cos \vartheta$ è chiamato la curvatura normale di $C \in S$ in p .

In altre parole k_n è la misura della proiezione del vettore $k\mathbf{n}$ sulla normale della superficie in p e col segno dato dall'orientazione \mathbf{N} di S in p .

Per dare un'interpretazione della seconda forma fondamentale consideriamo una curva regolare $C \subset S$ parametrizzata da $\alpha(s)$, dove s è la lunghezza

d'arco di C , e con $\alpha(0) = p$. Se denotiamo con $\mathbf{N}(s)$ la restrizione di \mathbf{N} alla curva C , abbiamo $\langle \mathbf{N}(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. Dunque

$$\langle \mathbf{N}(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle \mathbf{N}'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_p(\alpha'(0)) &= -\langle \mathbf{N}_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle \mathbf{N}'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle \mathbf{N}(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle \mathbf{N}, k\mathbf{n} \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

In altre parole, il valore della seconda forma fondamentale per un versore $v \in T_p(S)$ è uguale alla curvatura normale di una curva regolare passante per p e ivi tangente al versore v .

Torniamo alla mappa lineare $d_p N$; il teorema spettrale reale ci dice che per ogni $p \in S$ esiste una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di $T_p(S)$ tale che $d_p N(e_1) = -k_1 e_1$, $d_p N(e_2) = -k_2 e_2$. Si può dimostrare che k_1 e k_2 ($k_1 \geq k_2$) sono il massimo e il minimo della seconda forma fondamentale \mathbf{II}_p ristretti alla circonferenza unitaria di $T_p(S)$ cioè sono i valori estremanti della curvatura normale in p .

Definizione 1.11. Il massimo della curvatura normale k_1 e il minimo della curvatura normale k_2 sono chiamate curvatures principali di S in p ; le direzioni corrispondenti, cioè quelle date dagli autovettori e_1, e_2 , sono chiamate direzioni principali di S in p .

Definizione 1.12. Sia $p \in S$ e sia $d_p N : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ il differenziale della mappa di Gauss. Il determinante di $d_p N$ è chiamata curvatura Gaussiana K di S in p . L'opposto della metà della traccia di $d_p N$ è chiamata curvatura media H di S in p .

Usando le curvatures principali possiamo scrivere

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Definizione 1.13. un punto $p \in S$ si dice:

- ★ Ellittico se $K(p) > 0$ (ombelicale se $k_1(p) = k_2(p)$)
- ★ Iperbolico se $K(p) < 0$
- ★ Parabolico se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$ (una delle due curvatures è diversa da zero)
- ★ Planare se $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$ (entrambe le curvatures sono nulle).

Vogliamo ora ottenere le espressioni della seconda forma fondamentale e del differenziale della mappa di Gauss in un sistema di coordinate.

Per comodità d'ora in poi useremo la convenzione che tutte le funzioni che appaiono siano calcolate in un punto $p = \mathbf{x}(u, v)$ di S .

Tutte le parametrizzazioni $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ considerate finora sono state assunte compatibili all'orientazione \mathbf{N} di S ; cioè in $\mathbf{x}(u, v)$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}.$$

Sia $\mathbf{x}(u, v)$ la parametrizzazione di una superficie S attorno ad un suo punto p e sia $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ la parametrizzazione di una curva su S , con $\alpha(0) = p$.

Il vettore tangente a $\alpha(t)$ in p è $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ e

$$dN(\alpha') = \mathbf{N}'(u(t), v(t)) = \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v'.$$

Dato che \mathbf{N}_u e \mathbf{N}_v appartengono a $T_p(S)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ \mathbf{N}_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{1.2}$$

e

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v;$$

quindi

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Questo mostra che nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ dN è dato dalla matrice (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$. Notiamo che la matrice non è necessariamente simmetrica, tranne nel caso in cui $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ sia una base ortonormale.

L'espressione della seconda forma fondamentale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

dove, poiché $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} e &= -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Ora vogliamo ottenere i valori di a_{ij} in termini dei coefficienti e, f, g . Dall'equazione (1.2), abbiamo

$$\begin{aligned} -f &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove E, F e G sono i coefficienti della prima forma fondamentale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Le relazioni (1.3) possono essere espresse in forma matriciale da

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}; \tag{1.4}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1};$$

dove $(\)^{-1}$ rappresenta l'inverso della matrice $(\)$, cioè

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

da cui seguono le espressioni per i coefficienti (a_{ij}) della matrice di $d\mathbf{N}$ nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Le equazioni dalla relazione (1.2) con i valori (1.5) sono conosciute come equazioni di Weingarten.

Dall'equazione (1.4) otteniamo immediatamente

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Per calcolare la curvatura media ricordiamo che $-k_1, -k_2$ sono gli autovalori di $d\mathbf{N}$. k_1 e k_2 soddisfano l'equazione

$$d\mathbf{N}(v) = -kv = -k\mathbf{I}v \quad \text{per qualche } v \in T_p(S), v \neq 0,$$

dove \mathbf{I} è la mappa identità. Segue che la mappa lineare $d\mathbf{N} + k\mathbf{I}$ non è invertibile; perciò il suo determinante è zero. Dunque,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

cioè

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Poiché k_1 e k_2 sono le radici dell'equazione sopra di secondo grado, concludiamo che

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right). \tag{1.6}$$

1.2 Superfici di rotazione e superfici rigate

In questa sezione prenderemo in esame due classi di superfici differenziabili in \mathbb{R}^3 : le superfici di rotazione e le superfici rigate e per ciascuna daremo un esempio particolare che ricorrerà spesso nella nostra trattazione.

Siano $r, h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili definite in un intervallo aperto (a, b) di \mathbb{R} e supponiamo che r sia sempre positiva. Consideriamo la curva C nel piano xz data dalla parametrizzazione regolare

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\longmapsto (r(v), h(v)). \end{aligned}$$

Una rotazione di C intorno all'asse z origina una superficie S , detta superficie di rotazione, che può essere parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = (r(v) \cos u, r(v) \sin u, h(v))$$

dove $0 < u < 2\pi$ è l'angolo di rivoluzione e $a < v < b$. La curva C è detta generatrice della superficie S , l'asse z è l'asse di rotazione e i cerchi descritti dai punti di C durante la rotazione sono detti paralleli di S , mentre le varie posizioni di C su S sono dette meridiani di S .

Un esempio interessante di superficie di rotazione è fornito dal catenoide che si ottiene facendo ruotare attorno ad un asse opportuno che non la interseca (l'asse z) una catenaria. La catenaria è la curva descritta da una corda ideale, cioè perfettamente flessibile, inestensibile, senza spessore e di densità uniforme, appesa a due punti e lasciata libera di pendere sotto l'azione del proprio peso. L'equazione della catenaria è

$$x = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right) = a \frac{e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}}{2}$$

dove $(a, 0)$ è il punto di intersezione della catenaria con l'asse x . Pertanto per il catenoide abbiamo la seguente parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cos u, a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \sin u, v \right).$$

Chiameremo superficie rigata una superficie $S = \cup_{p \in C} R_p$ dove R_p è un intervallo di retta (eventualmente un'intera retta), detta generatrice, uscente da $p \in C$, con $C \subset \mathbb{R}^3$ curva differenziabile regolare, detta direttrice.

Esempi di superfici rigate sono tutti i cilindri, in cui le generatrici sono tutte parallele, e i coni dove le generatrici passano tutte per uno stesso punto; anche il piano è una superficie rigata dello stesso tipo dei coni e dei cilindri. Un esempio interessante di superfici di questo tipo è fornito dall'elicoide. L'elicoide è ottenuto tracciando da ogni punto di un'elica cilindrica (la direttrice) attorno all'asse z , rette parallele al piano xy e intersecanti l'asse z (le generatrici). Se l'elica è parametrizzata da

$$\alpha(v) = (\cos v, \sin v, bv) \quad 0 < v < 2\pi,$$

dove $2\pi b$ è il passo dell'elica (la distanza cioè tra i due punti successivi dell'elica che si trovano su una retta parallela all'asse z , e v misura l'angolo che si forma tra l'asse x e la retta congiungente l'origine degli assi con la proiezione, sul piano xy , del punto $\alpha(v)$), allora abbiamo la seguente parametrizzazione per l'elicoide

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv),$$

dove $0 < v < 2\pi$, $u \in \mathbb{R}$.

Oss. 1.1 Un piano può essere visto come un elicoide degenero di passo nullo.

1.3 Isometrie e applicazioni conformi tra superfici

In questo paragrafo mostreremo che molti importanti concetti associati ad una superficie regolare dipendono solo dalla sua prima forma fondamentale.

Definizione 1.14. Un diffeomorfismo ψ è una mappa $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$ differenziabile, invertibile e tale che la sua inversa $\psi^{-1} : \tilde{S} \rightarrow S$ sia anch'essa differenziabile.

Definizione 1.15. Un diffeomorfismo $\phi : S \rightarrow \tilde{S}$ è un'isometria se per ogni $p \in S$ e per tutte le coppie $w_1, w_2 \in T_p(S)$ abbiamo

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)}.$$

Le superfici S e \tilde{S} sono dette isometriche.

In altre parole, un diffeomorfismo ϕ è una isometria se il differenziale $d\phi$ preserva il prodotto interno. Infatti, se ϕ è una isometria,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\phi_p(w), d\phi_p(w) \rangle_{\phi(p)} = I_{\phi(p)}(d\phi_p(w))$$

per ogni $w \in T_p(S)$. Viceversa, se un diffeomorfismo ϕ preserva la prima forma fondamentale, cioè

$$I_p(w) = I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) \quad \text{per ogni } w \in T_p(S)$$

allora

$$\begin{aligned} 2\langle w_1, w_2 \rangle &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ &= I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_1 + w_2)) - I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_1)) - I_{\phi(p)}(d\phi_p(w_2)) \\ &= 2\langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle, \end{aligned}$$

e, dunque, ϕ è una isometria.

Definizione 1.16. Una mappa $\phi : V \rightarrow \tilde{S}$ di un intorno V di $p \in S$ è una isometria locale in p se esiste un intorno \tilde{V} di $\phi(p) \in \tilde{S}$ tale che $\phi : V \rightarrow \tilde{V}$ è un'isometria. Se esiste un'isometria locale come sopra $\forall p \in S$ la superficie S è detta localmente isometrica a \tilde{S} . S e \tilde{S} sono localmente isometriche se S è localmente isometrica a \tilde{S} e \tilde{S} è localmente isometrica a S .

È chiaro che se $\phi : S \rightarrow \tilde{S}$ è un diffeomorfismo e una isometria locale per ogni $p \in S$, allora ϕ è un'isometria (globale).

Vogliamo ora ottenere un criterio per determinare le isometrie locali in termini di coordinate locali.

Proposizione 1.2 *Si assuma l'esistenza di due parametrizzazioni $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ e $\tilde{\mathbf{x}} : U \rightarrow \tilde{S}$ tale che $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$, $G = \tilde{G}$ in U . Allora la mappa $\phi : \tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \tilde{S}$ è un'isometria locale.*

Dim. Sia $p \in \mathbf{x}(U)$ e $w \in T_p(S)$. Allora w è tangente a una curva $\mathbf{x}(\alpha(t))$ per $t = 0$, dove $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ è una curva in U ; così w può essere scritto per $t = 0$ come

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Per definizione il vettore $d\phi_p(w)$ è il vettore tangente alla curva $\tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t))$ per $t = 0$. Dunque

$$d\phi_p(w) = \tilde{\mathbf{x}}_u u' + \tilde{\mathbf{x}}_v v'.$$

Dunque

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \\ I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) &= \tilde{E}(u')^2 + 2\tilde{F}u'v' + \tilde{G}(v')^2, \end{aligned}$$

concludiamo che $I_p(w) = I_{\phi(p)}(d\phi_p(w))$ per ogni $p \in \mathbf{x}(U)$ e per tutti i $w \in T_p(S)$ dunque ϕ è una isometria locale. \square

Un altro tipo di equivalenza tra superfici è dato dalle trasformazioni conformi, che hanno la proprietà di conservare la misura degli angoli.

Definizione 1.17. Siano S e \tilde{S} due superfici differenziabili in \mathbb{R}^3 . Un diffeomorfismo $\psi : S \rightarrow \tilde{S}$ è una applicazione conforme se esiste una funzione differenziabile non nulla λ tale che per ogni $p \in S$ e per ogni coppia $w_1, w_2 \in T_p(S)$ si ha

$$\langle d\psi(w_1), d\psi(w_2) \rangle_{\psi(p)} = \lambda^2(p) \langle w_1, w_2 \rangle.$$

La funzione differenziabile λ su S è detta fattore conforme.

Le superfici S e \tilde{S} si dicono conformi.

Si noti che:

$$\forall w \in T_p(S) \quad \|d\psi(w)\| = |\lambda(p)| \|w\|.$$

Definizione 1.18. Una mappa $\psi : V \rightarrow \tilde{S}$ di un intorno V di $p \in S$ è una applicazione conforme locale in p se esiste un intorno \tilde{V} di $\psi(p)$ in \tilde{S} tale che $\psi : V \rightarrow \tilde{V}$ è un'applicazione conforme. Se $\forall p \in S$ esiste un'applicazione conforme locale in p come sopra, la superficie S è detta localmente conforme a \tilde{S} .

Notiamo che la conformità locale è una relazione di equivalenza.

Dimostriamo ora quanto anticipato a inizio paragrafo, cioè che le applicazioni conformi preservano la misura degli angoli tra vettori tangenti.

Siano $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ due curve su S che si intersecano in un dato punto $p = \alpha(t) = \beta(t)$ di S , per un certo $t \in I$, formando un angolo ϑ tale che:

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle_p}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|}.$$

Supponiamo che S sia conforme ad un'altra superficie \tilde{S} tramite un diffeomorfismo ψ e consideriamo le curve $\psi \circ \alpha$ e $\psi \circ \beta$ su \tilde{S} , che si intersecano formando un angolo $\tilde{\vartheta}$ tale che:

$$\cos \tilde{\vartheta} = \frac{\langle d\psi(\alpha'(t)), d\psi(\beta'(t)) \rangle_{\psi(p)}}{\|d\psi(\alpha'(t))\| \|d\psi(\beta'(t))\|}$$

ma per le proprietà di ψ abbiamo che

$$\cos \tilde{\vartheta} = \frac{\lambda^2(p) \langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle_p}{\lambda^2 \|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} = \cos \vartheta.$$

Per le applicazioni conformi vale la seguente:

Proposizione 1.3 [Per una dimostrazione si veda [3] p.227]

Siano $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ e $\tilde{\mathbf{x}} : U \rightarrow \tilde{S}$ due parametrizzazioni regolari definite su uno stesso aperto $U \subset \mathbb{R}^2$ tali che:

$$E = \lambda^2 \tilde{E}, \quad F = \lambda^2 \tilde{F}, \quad G = \lambda^2 \tilde{G}$$

in U dove λ^2 è una funzione differenziabile in U non nulla. Allora l'applicazione $\phi = \tilde{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \tilde{S}$ è una applicazione conforme locale.

Consideriamo $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare per una superficie S .

Definizione 1.19. La coppia di coordinate locali (u, v) su $U \subset \mathbb{R}^2$ per S sono chiamate isoterme se i coefficienti della prima forma fondamentale di S in U sono:

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = G = \lambda^2(u, v) \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

dove λ è una funzione differenziale in U non nulla.

Teorema 1.4 (Esistenza delle coordinate isoterme). [Per una dimostrazione si veda [14]]

Sia S una superficie regolare in \mathbb{R}^3 . Allora ogni punto $p \in S$ ammette un intorno aperto V per cui esiste una riparametrizzazione di S con coordinate isoterme.

Nel prossimo capitolo daremo una dimostrazione di questo teorema nel caso particolare in cui S è una superficie minima.

Il calcolo di molte funzioni importanti nella teoria delle superfici si semplifica quando si lavora con le coordinate isoterme. Per esempio abbiamo

$$\det g_{ij} = EG - F^2 = \lambda^4$$

quindi la formula della curvatura Gaussiana diventa

$$K = \frac{eg - f^2}{\lambda^4}$$

e quella della curvatura media

$$H = \frac{e + g}{2\lambda^2}. \quad (1.8)$$

Dimostriamo ora un lemma che ci sarà utile nel prosieguo del lavoro.

Definizione 1.20. L'operatore di Laplace o Laplaciano è un operatore differenziale del secondo ordine. L'operatore di Laplace può operare da due fino a n dimensioni e può essere applicato sia a campi scalari che vettoriali. In coordinate cartesiane è definito come la somma delle derivate parziali seconde non miste rispetto alle coordinate. Ad esempio l'operatore di Laplace in due dimensioni e nelle coordinate cartesiane x, y è dato da:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

In tre dimensioni e in coordinate cartesiane x, y, z è:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Lemma 1.3.1 *Sia S una superficie regolare avente come parametrizzazione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ dove u, v sono coordinate isoterme.*

Allora

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}$$

dove \mathbf{H} è il vettore curvatura media così definito:

$$\mathbf{H} = H \mathbf{N}$$

e Δ denota il Laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ e $\lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = E = G$.

Dim. Derivando la prima delle equazioni (1.7) rispetto a u e la seconda rispetto a v otteniamo

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle$$

dunque

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{x}_u \rangle = 0.$$

In modo simile, derivando la prima delle equazioni (1.7) rispetto a v e la seconda rispetto a u otteniamo

$$\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$$

Quindi $\Delta \mathbf{x}$ è un vettore perpendicolare al piano tangente di S . Sia \mathbf{N} il versore normale a S , da (1.8) abbiamo

$$\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N} \rangle = g + e = 2\lambda^2 H$$

e questo prova la tesi. □

1.4 Forme differenziali lineari

Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + F_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + F_3(x, y, z)\mathbf{e}_3$ un campo vettoriale di classe $C^1(E)$, con E aperto connesso di \mathbb{R}^3 .

Ad \mathbf{F} associamo l'espressione formale

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

che chiameremo forma differenziale lineare con coefficienti F_1, F_2, F_3 .

Definizione 1.21. Se, data una forma differenziale ω di classe $C^1(E)$, esiste una funzione $\Omega: E \rightarrow \mathbb{R}$, di classe $C^2(E)$, tale che $d\Omega = \omega$ in E allora ω si dice esatta e Ω si chiama funzione potenziale.

Più esplicitamente, $d\Omega = \omega$ significa che

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = F_3 \quad \text{in } E$$

o, più sinteticamente, $\Delta\Omega = \mathbf{F}$ in E . Se ω è esatta il campo associato è uguale al gradiente di un potenziale, in tal caso il campo vettoriale si dice conservativo.

Definizione 1.22. Dato un campo vettoriale $\mathbf{F}: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ si definisce rotore di \mathbf{F} il vettore di componenti

$$\text{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Proposizione 1.5 [Per una dimostrazione si veda [12] p.50]

Se ω è esatta in E ed \mathbf{F} è il campo vettoriale associato allora $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in E , ovvero \mathbf{F} è irrotazionale in E .

Più esplicitamente devono essere verificate in ogni punto di E le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Per una forma differenziale in \mathbb{R}^2 , $\omega = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$ le equazioni sopra si riducono alla seguente

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Introduciamo ora la nozione di semplice connessione.

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se E è connesso e ogni curva semplice e chiusa contenuta in E è frontiera di un insieme interamente contenuto in E . In sostanza significa che due curve qualunque, contenute in E , aventi gli stessi punti estremi sono deformabili con continuità l'una nell'altra senza uscire da E . La definizione rigorosa usa il concetto di omotopia che illustriamo qui di seguito.

Siano γ_1 e γ_2 curve contenute in un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o $E \subseteq \mathbb{R}^3$ di equazione rispettivamente $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$, $t \in [a, b]$ e tali che $r_1(a) = r_2(a) = p_a$, $r_1(b) = r_2(b) = p_b$.

Definizione 1.23. Le due curve γ_1 e γ_2 si dicono omotope in E se esiste una funzione continua $\phi = \phi(t, \lambda)$, $(t, \lambda) \in [a, b] \times [0, 1]$ tale che:

$$\text{i) } \phi(t, 0) = r_1(t), \phi(t, 1) = r_2(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\text{ii) } \phi(a, \lambda) = p_a, \phi(b, \lambda) = p_b \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

ed infine per ogni $\lambda \in [0, 1]$, la curva γ_λ di equazione $\phi = \phi(t, \lambda)$ sia contenuta in E .

Se γ_1 e γ_2 sono chiuse la ii) è sostituita dalla condizione

$$\text{ii) } \phi(a, \lambda) = \phi(b, \lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Definizione 1.24. Un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice semplicemente connesso se due curve qualsiasi contenute in E aventi gli stessi estremi sono omotope.

Il teorema seguente, che è quello che useremo in alcune dimostrazioni del capitolo 2, afferma che in un aperto semplicemente connesso E condizione necessaria e sufficiente perché ω sia esatta in E è che $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Teorema 1.6 [Per una dimostrazione si veda [12] p.59]

Siano $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3$ con $\mathbf{F} \in C^1(E)$, dove E è un aperto semplicemente connesso in \mathbb{R}^3 . Allora ω è esatta in E se e solo se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in E .

1.5 Richiami di analisi complessa

Per risolvere numerosi problemi di geometria è comodo utilizzare la teoria dei numeri complessi.

È possibile identificare \mathbb{R}^2 con il piano complesso \mathbb{C} mediante l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto \xi = u + iv. \end{aligned}$$

In questo paragrafo U sarà sempre un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ e f una funzione $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$f(u, v) = \phi(u, v) + i\psi(u, v),$$

dove $\phi, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}$. ϕ e ψ sono dette rispettivamente parte reale e parte immaginaria di f .

Definizione 1.25. Diremo che $f = \phi + i\psi$ è di classe $C^k(U)$ se tali sono la ϕ e la ψ .

Sia $f \in C^1(U)$ definiamo gli operatori differenziali complessi

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \quad (1.9)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \quad (1.10)$$

Sono operatori lineari e vale la regola di Leibnitz per la derivazione del prodotto di funzioni.

Definizione 1.26. Una funzione $f \in C^1$ definita in un aperto $U \subset \mathbb{C}$ a valori in \mathbb{C} si dice olomorfa, o analitica, se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} = 0$$

in ogni punto di U .

Proposizione 1.7 [Per una dimostrazione si veda [13] p.226]

Siano $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni olomorfe su U . Allora la somma $f + g$ e il prodotto fg , definiti nel modo naturale, sono ancora funzioni olomorfe su U . Anche f/g è olomorfo sull'insieme aperto $\{\xi \in U : g(\xi) \neq 0\}$. Inoltre, dato $V \subset \mathbb{C}$ aperto, se $g : U \rightarrow V$ è olomorfa e $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora $f \circ g$ è olomorfa.

Se $f(\xi)$ è olomorfa soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -i \frac{\partial f}{\partial v}$$

riconducibile alle equazioni reali

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u} \quad (1.11)$$

in ogni punto di U (e viceversa). Le (1.11) sono note come equazioni di Cauchy-Riemann. Ogni coppia di funzioni reali ϕ e ψ soddisfacenti le (1.11) sono dette funzioni coniugate.

Proposizione 1.8 [Per una dimostrazione si veda [5] p.14]

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in C^1(U)$, olomorfa, allora

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial f}{\partial u} \equiv -i \frac{\partial f}{\partial v}$$

su U .

Definizione 1.27. Sia $U \subset \mathbb{C}$ e $\phi \in C^2(U)$. ϕ si dice armonica se

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} \equiv 0,$$

dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ rappresenta l'operatore Laplaciano.

Proposizione 1.9 Sia $f = \phi + i\psi$ una funzione olomorfa su $U \subset \mathbb{C}$, allora la parte reale e la parte immaginaria di f sono funzioni armoniche.

Vediamo ora un teorema che useremo nel corso del lavoro. Iniziamo con una definizione:

Definizione 1.28. Una funzione f è detta intera se è definita e olomorfa su tutto \mathbb{C} , per esempio se f è della forma

$$f(\xi) = a\xi + b \quad \xi \in \mathbb{C}$$

dove a e b sono numeri complessi con $a \neq 0$.

Teorema 1.10 di Liouville [Per una dimostrazione si veda [5] p.86]

Una funzione f intera e limitata è costante.

Capitolo 2

Le superfici minime

In questo capitolo analizzeremo alcune delle più importanti proprietà che caratterizzano le superfici minime in \mathbb{R}^3 .

Definizione 2.1. Una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ è detta minima se la sua curvatura media H è identicamente nulla.

Fissata una parametrizzazione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ per S , in termini di prima e seconda forma fondamentale ciò significa (si veda la relazione (1.6))

$$eG - 2fF + gE = 0.$$

Osserviamo che una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ è minima se la sua curvatura media è nulla in una sua qualunque parametrizzazione. Infatti, a differenza dei coefficienti della prima e seconda forma fondamentale, il valore assoluto della curvatura media non dipende dalla parametrizzazione locale scelta, in quanto può essere definito direttamente a partire dalla mappa di Gauss senza utilizzare parametrizzazioni locali si veda la definizione 1.12. Ne segue che una superficie è minima se ogni sua parametrizzazione è minima.

Dalle definizione è chiaro che le superfici minime S sono caratterizzate dal fatto che tutti i loro punti o sono iperbolici o planari. Infatti se $H = 0$, allora le due curvatures principali in ogni punto di S sono opposte: $k_1 = -k_2$. Pertanto la curvatura Gaussiana $K = k_1 k_2$ è sempre minore o uguale a zero.

2.1 Variazione prima del funzionale d'area

La Definizione 2.1 di superficie minima venne data solo nel 1776 da Meusnier. Egli provò che la sua definizione era equivalente alla definizione originaria data dal matematico Lagrange nel 1760, che designava minime quelle superfici che sono soluzioni di un problema variazionale e più precisamente punti critici del funzionale d'area. La definizione originaria di superficie minima è dunque quella di superficie che rende stazionaria l'area rispetto a variazioni della superficie stessa. Questo significa che data una curva chiusa, non annodata, una superficie di questo tipo avente quella curva come bordo non può modificarsi senza aumentare la sua area.

Mostremo che le definizioni di Meusnier e di Lagrange sono equivalenti.

Sia $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una superficie regolare. Scegliamo ora un dominio limitato $D \subset U$ (D è un sottoinsieme aperto e connesso di U) e una funzione differenziabile $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, dove \overline{D} è l'unione del dominio D con il suo bordo ∂D .

Definizione 2.2. La variazione normale determinata da h di $\mathbf{x}(\overline{D})$ è la mappa data da

$$\begin{aligned} \phi : \overline{D} \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \phi(u, v, t) &= \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)\mathbf{N}(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D}, t \in (-\epsilon, \epsilon). \end{aligned}$$

Per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definiamo la mappa $\mathbf{x}^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}^t(u, v) = \phi(u, v, t).$$

Vista la regolarità di h ed \mathbf{N} , risulta che, se ϵ è sufficientemente piccolo, \mathbf{x}^t parametrizza ancora una regione di superficie regolare, che è modificata ortogonalmente rispetto a $\mathbf{x}(\overline{D})$. In tal modo è possibile considerare la funzione

$$A(t) = \iint_{\overline{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, du \, dv, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

essendo E^t , F^t e G^t i corrispondenti coefficienti della prima forma fondamentale di ogni parametrizzazione \mathbf{x}^t .

Ora determiniamo la funzione

$$\sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u^t &= \mathbf{x}_u + th\mathbf{N}_u + th_u\mathbf{N} \\ \mathbf{x}_v^t &= \mathbf{x}_v + th\mathbf{N}_v + th_v\mathbf{N}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}E^t &= E + th(\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle) + t^2h^2\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u \rangle + t^2h_uh_u, \\ F^t &= F + th(\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u \rangle) + t^2h^2\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle + t^2h_uh_v, \\ G^t &= G + th(\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_v \rangle) + t^2h^2\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v \rangle + t^2h_vh_v.\end{aligned}$$

Usando il fatto che

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle = -e, \quad \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u \rangle = -2f, \quad \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_v \rangle = -g$$

e che la curvatura media H è

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

otteniamo

$$\begin{aligned}E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(eG - 2Ff + gE) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R,\end{aligned}$$

dove $R(t)$ è una funzione derivabile con $R(t)/t \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$. Dunque si ha

$$A(t) = \iint_D \sqrt{(1 - 4thH) + \bar{R}(t)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

dove $\bar{R}(t) = R(t)/(EG - F^2)$.

Ne segue che se ϵ è piccolo, A è una funzione differenziabile. Derivando rispetto a t per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha

$$A'(t) = \iint_D \frac{\sqrt{EG - F^2}(-4hH + \bar{R}'(t))}{2\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}(t)}} \, du \, dv.$$

Avendosi $R(t)/t \rightarrow 0$, per $t \rightarrow 0$, si ha pure $R'(0) = 0$ e quindi anche $\bar{R}'(0) = 0$; dunque

$$A'(0) = - \iint_D 2hH\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (2.1)$$

Da qui possiamo giustificare l'equivalenza delle due definizioni di superficie minima prima citate con la seguente

Proposizione 2.1 *Con riferimento alle notazioni prima introdotte, sia $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una superficie regolare S e sia $D \subset U$ un dominio limitato in U . Allora S è minima (cioè $H = 0$) se e solo se $A'(0) = 0$ per tutti i D e per tutte le variazioni normali di $\mathbf{x}(\overline{D})$.*

Dim. " \implies " S minima $\implies H = 0 \implies A'(0) = 0$ per la (2.1).

" \impliedby " Supponiamo per assurdo che esista un punto $q \in D$ con $H(q) \neq 0$. Allora possiamo costruire una funzione differenziabile $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(q) = H(q)$ e che sia identicamente 0 al di fuori di un piccolo intorno contenente q . Usando la variazione normale determinata da h si avrebbe $A'(0) < 0$, che è un assurdo perché per ipotesi $A'(0) = 0$. Quindi deve essere $H(q) = 0$ per ogni q □

Dunque ogni regione limitata $\mathbf{x}(\overline{D})$ di una superficie minima \mathbf{x} è un punto critico del funzionale dell'area per ogni variazione normale di $\mathbf{x}(\overline{D})$ ma, in generale, non necessariamente questo è un punto di minimo e ciò rende l'aggettivo minima della definizione di Lagrange non del tutto corretto.

Le superfici minime sono spesso associate alle lamine saponate che si possono ottenere immergendo un reticolo di ferro in una soluzione di acqua e sapone per poi estrarlo delicatamente. Se l'esperimento è ben eseguito si ottiene una lamina saponata che ha come bordo lo stesso reticolo. Attraverso considerazioni fisiche si può dimostrare che la lamina assume una conformazione tale che nei suoi punti regolari la curvatura media della superficie corrispondente sia uguale a zero.

La connessione tra le superfici minime e le lamine saponate sta alla base del famoso problema di Plateau. Il problema può essere presentato in questo modo: provare che per ogni curva regolare chiusa non annodata $C \subset \mathbb{R}^3$ esiste una superficie S di area minima tra quelle che hanno C come bordo.

Ripercorrendo il ragionamento fatto finora possiamo osservare che tutte le superfici di area minima sono anche superfici minime. Infatti esse sono dei minimi per il funzionale dell'area e quindi annulleranno la sua derivata prima il che corrisponde ad affermare che avranno curvatura media $H = 0$. Non è però detto che una superficie minima sia anche una superficie di area minima perché, come abbiamo già osservato, esse non corrispondono necessariamente a minimi del funzionale.

2.2 Equazione delle superfici minime

Supponiamo ora che la parametrizzazione di una superficie minima S in \mathbb{R}^3 venga data sotto forma del grafico di una funzione $z = f(u, v)$ su un dominio $U \subset \mathbb{R}^2$. È possibile descrivere tutte queste funzioni f ? Si dimostra il seguente teorema:

Teorema 2.2 *Tutte le funzioni f i cui grafici definiscono superfici minime sono soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine:*

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_{uv}f_u f_v + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0 \quad (2.2)$$

dove

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_v = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad f_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \quad f_{vv} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

La (2.2) è nota come equazione delle superfici minime o equazione di Lagrange. Prima di provare il teorema dimostriamo la seguente proposizione che ci permette di dire che è sempre possibile assegnare una parametrizzazione (locale) di una superficie S come grafico di una funzione differenziabile:

Proposizione 2.3 *Sia S una superficie regolare con parametrizzazione $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e sia $p \in U$. Allora esiste un intorno aperto V di p in S tale che la parametrizzazione della superficie Σ , ottenuta restringendo \mathbf{x} in modo che il suo codominio sia V , sia il grafico di una funzione differenziabile che ha una delle seguenti tre forme:*

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad z = h(y, z).$$

Dim. Per la condizione (iii) della 1.3 uno dei determinanti della Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

è diverso da zero in $\mathbf{x}^{-1}(p) = q$.

Supponiamo, ad esempio, sia $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$.

Consideriamo la mappa $\pi \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, dove π è la proiezione $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Allora $\pi \circ \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ e, poiché $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$, possiamo applicare il teorema della funzione inversa e dire che esistono due intorni V_1 di q , V_2 di $\pi \circ \mathbf{x}(q)$ tale che $\pi \circ \mathbf{x}(V_1) \rightarrow V_2$ è un diffeomorfismo. Segue che π ristretto a $\mathbf{x}(V_1) = V$ è iniettiva e che esiste una mappa differenziale inversa $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$. Osserviamo che, poiché \mathbf{x} è un omeomorfismo, V è un intorno di p in S . Se componiamo $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ con la funzione $(u, v) \mapsto z(u, v)$, si ha che V è il grafico di una funzione differenziabile $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$ e questo dimostra la proposizione quando $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$. Negli altri casi si ha una dimostrazione analoga. \square

Dim. del Teorema 2.2. Sia

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \forall (u, v) \in U$$

una parametrizzazione locale di una superficie minima S . Abbiamo

$$\begin{aligned} x_u &= (1, 0, f_u) \\ x_v &= (0, 1, f_v) \\ \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}(-f_u, -f_v, 1) \end{aligned}$$

otteniamo perciò

$$\begin{aligned} E &= (1 + f_u^2), & F &= f_u f_v, & G &= (1 + f_v^2), \\ e &= \frac{1}{1 + f_u^2 + f_v^2} f_{uu}, & f &= \frac{1}{1 + f_u^2 + f_v^2} f_{uv}, & g &= \frac{1}{1 + f_u^2 + f_v^2} f_{vv}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella formula di H otteniamo

$$H = \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_{uv}f_u f_v + (1 + f_u^2)f_{vv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

Poiché deve essere $H = 0$ abbiamo

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_{uv}f_u f_v + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0$$

ciò che stavamo cercando. \square

Nel caso di superfici che sono grafici di funzioni differenziabili, vale quello che non vale in generale: l'essere superficie minima è sufficiente a garantire che la superficie risolve il problema dell'area minima per qualche curva chiusa e semplice (ossia che non si autointerseca) nello spazio. Questa relazione tra superfici minime e superfici di area minima venne scoperta da Monge: data una curva chiusa e semplice dello spazio, se una superficie che ha come bordo la curva data è anche il grafico di una funzione differenziabile, allora per questa superficie l'essere minima è condizione necessaria e anche sufficiente a garantire che la sua area è minore dell'area di qualunque altra superficie avente la curva data come bordo.

2.3 Coordinate isoterme

Riprendiamo il teorema dell'esistenza delle coordinate isoterme e dimostriamolo nel caso in cui S è una superficie minima.

Proposizione 2.4 [4] *Sia S una superficie minima. Ogni punto di S ha un intorno per cui esiste una riparametrizzazione di S con coordinate isoterme.*

Dim. Sia $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di S , sia $a \in U$ e $m = \mathbf{x}(a)$, allora per la proposizione 2.3 esiste un intorno V di m e un intorno $V' \subset U$ di a tale che $\Sigma = S \cap V$ può essere vista come il grafico di una funzione differenziabile definita su V' . A meno di riordinare le coordinate possiamo supporre

$$\Sigma = \{(x, y, z = f(x, y)) : (x, y) \in V'\}.$$

Poniamo per comodità $f_x = p$, $f_y = q$, $f_{xx} = r$, $f_{xy} = s$, $f_{yy} = t$ e $W = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$.

Introduciamo due funzioni ausiliarie $L, M : V' \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{1 + p^2}{W}, & \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{pq}{W}, \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{pq}{W}, & \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1 + q^2}{W}. \end{aligned}$$

Queste funzioni esistono per il teorema 1.6 in quanto si può assumere V' semplicemente connesso e perché, valendo l'equazione (2.2), si ha l'uguaglianza

delle derivate in croce cioè:

$$\left(\frac{1+p^2}{W}\right)_y = \left(\frac{pq}{W}\right)_x, \quad \left(\frac{1+q^2}{W}\right)_x = \left(\frac{pq}{W}\right)_y. \quad (2.3)$$

Verifichiamo queste due relazioni:

$$\left(\frac{1+p^2}{W}\right)_y - \left(\frac{pq}{W}\right)_x = \frac{2psW - (1+p^2)W_y}{W^2} - \frac{(rq+ps)W - pqW_x}{W^2}.$$

Poiché:

$$\begin{aligned} W_x &= W^{-1}(pr+qs) \\ W_y &= W^{-1}(ps+qt) \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{2psW - (1+p^2)W^{-1}(ps+qt)}{W^2} - \frac{(rq+ps)W - pqW^{-1}(ps+qt)}{W^2} \\ &= \frac{1}{W^3} (2psW^2 - (1+p^2)(ps+qt) - (rq+ps)W^2 + pq(pr+qs)) \\ &= \frac{1}{W^3} ((ps-rq)(1+p^2+q^2) - (1+p^2)(ps+qt) + pq(pr+qs)) \\ &= -\frac{q}{W^3} ((1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t) \end{aligned}$$

Da cui poiché vale l'equazione (2.2) si ha prima relazione.

Con calcoli analoghi si otterrà

$$\left(\frac{1+q^2}{W}\right)_x - \left(\frac{pq}{W}\right)_y = -\frac{p}{W^3} ((1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t)$$

da cui la seconda relazione.

Consideriamo il cambiamento di coordinate $\Xi : (x, y) \mapsto (u, v)$ così definito

$$u = x + L(x, y), \quad v = y + M(x, y). \quad (2.4)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 + \frac{1+p^2}{W}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{pq}{W}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{pq}{W}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 1 + \frac{1+q^2}{W}. \end{aligned}$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione Ξ è

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = 2 + \frac{2 + p^2 + q^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{(W + 1)^2}{W} > 0,$$

pertanto Ξ è un diffeomorfismo con inversa locale $\Xi^{-1} : (u, v) \mapsto (x, y)$ tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1 + W + q^2}{JW}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{pq}{JW}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{pq}{JW}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1 + W + p^2}{JW}. \end{aligned}$$

Nelle coordinate (u, v) la superficie Σ sarà data da

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v))).$$

Calcoliamo ora i coefficienti della prima forma fondamentale della superficie Σ . Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1 + W + q^2}{JW} = \frac{1 + W + q^2}{(1 + W)^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{pq}{JW} = \frac{-pq}{(1 + W)^2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = p \left(\frac{1 + W + q^2}{(1 + W)^2} \right) + q \left(\frac{-pq}{(1 + W)^2} \right) = \frac{p(1 + W)}{(1 + W)^2} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{pq}{JW} = \frac{-pq}{(1 + W)^2} \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1 + W + p^2}{JW} = \frac{1 + W + p^2}{(1 + W)^2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = p \left(\frac{-pq}{(1 + W)^2} \right) + q \left(\frac{1 + W + p^2}{(1 + W)^2} \right) = \frac{q(1 + W)}{(1 + W)^2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_u\|^2 &= \frac{(1+W+q^2)^2}{(1+W)^4} + \frac{p^2q^2}{(1+W)^4} + \frac{p^2(1+W)^2}{(1+W)^4} \\
&= \frac{1+W^2+q^2(q^2+p^2+1)+q^2+2W(1+q^2+p^2)+p^2+p^2W^2}{(1+W)^4} \\
&= \frac{W^2(1+W^2+2W)}{(1+W)^4} = \frac{W^2}{(1+W)^2} \\
\|\mathbf{x}_v\|^2 &= \frac{p^2q^2}{(1+W)^4} + \frac{(1+W+p^2)^2}{(1+W)^4} + \frac{q^2(1+W)^2}{(1+W)^4} \\
&= \frac{1+W^2+p^2(q^2+p^2+1)+p^2+2W(1+q^2+p^2)+q^2+q^2W^2}{(1+W)^4} \\
&= \frac{W^2(1+W^2+2W)}{(1+W)^4} = \frac{W^2}{(1+W)^2} \\
\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= \frac{(1+W+q^2)(-pq)}{(1+W)^4} + \frac{(-pq)(1+W+p^2)}{(1+W)^4} + \frac{pq(1+W)^2}{(1+W)^4} \\
&= \frac{-pq(1+W+q^2+1+W+p^2-1-W^2-2W)}{(1+W)^4} = 0
\end{aligned}$$

Riassumendo abbiamo

$$\begin{aligned}
E = G = \|\mathbf{x}_u\|^2 = \|\mathbf{x}_v\|^2 &= \frac{W^2}{(W+1)^2} \\
F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Quindi le coordinate (u, v) sono isoterme con fattore conforme

$$\lambda^2(u, v) = \left(\frac{W}{1+W} \right)^2$$

□

Poiché è sempre possibile definire localmente una superficie minima mediante delle coordinate isoterme senza perdita di generalità potremo spesso supporre nel resto del lavoro che la superficie che considereremo abbia una parametrizzazione isoterma.

2.4 Superfici minime e funzioni analitiche di variabile complessa

Ora analizzeremo le relazioni che esistono tra le superfici minime e le funzioni analitiche di una variabile complessa.

Lemma 2.4.1 *Sia $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una parametrizzazione regolare isoterma di una superficie S .*

S è minima $\iff \Delta \mathbf{x} = 0$ cioè le sue funzioni x, y, z sono tutte armoniche (in altre parole $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$).

Dim. Discende dal lemma 1.3.1 che affermava che $\Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 H \mathbf{N}$. \square

Sia S una superficie di \mathbb{R}^3 data mediante la parametrizzazione $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con $(u, v) \in U$ dominio semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 . Abbiamo visto che è possibile identificare \mathbb{R}^2 con il piano complesso \mathbb{C} considerando la coordinata complessa

$$\xi = u + iv,$$

e quindi vedere U come dominio di \mathbb{C} . Con tali ipotesi x, y e z sono funzioni della variabile complessa ξ : $x = x(\xi, \bar{\xi})$, $y = y(\xi, \bar{\xi})$, $z = z(\xi, \bar{\xi})$.

Definiamo le seguenti funzioni complesse

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \phi_2(\xi) &= 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \phi_3(\xi) &= 2 \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Denoteremo $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Vediamo che:

$$\begin{aligned}\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right) + \\ &\quad - 2i \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right) \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 - \|\mathbf{x}_v\|^2 - 2i \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= E - G - 2iF\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 + \|\mathbf{x}_v\|^2 \\ &= E + G \end{aligned}$$

Proposizione 2.5 (i) (u, v) sono coordinate isoterme per $S \iff$

$$\iff \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \equiv 0;$$

se la condizione (i) è verificata, allora si ha:

(ii) x (equiv. y, z) è armonica in $(u, v) \iff \phi_1$ (equiv. ϕ_2, ϕ_3) è olomorfa in ξ ;

(iii) S è regolare $\iff |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$

Dim. Per provare (i) basta osservare che $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = E - G - 2iF$ quindi

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \iff \begin{cases} E = G \\ F = 0 \end{cases}$$

Per provare (ii), osserviamo che

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) = 2 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi^2}$$

e, dall'equazione (1.10),

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} \right) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}.$$

Ricordando il lemma 2.4.1 e le definizioni 1.19 e 1.26 abbiamo la tesi.

Per il punto (iii) osserviamo che imporre che $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$ significa dire che \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v sono linearmente indipendenti e questa è la condizione di regolarità. \square

Usando un sistema di coordinate isoterme abbiamo dunque dimostrato che ad ogni superficie minima S parametrizzata con una parametrizzazione isoterma \mathbf{x} , è possibile associare una funzione $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ tale che le $\phi_1(\xi)$, $\phi_2(\xi)$ e $\phi_3(\xi)$ definite dall'equazione (2.5) siano analitiche complesse e soddisfino $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \equiv 0$ e $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$; ϕ è detto raggio vettore

olomorfo associato a \mathbf{x} . Ma vale anche il viceversa: sia $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ una funzione analitica di ξ che soddisfa $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \equiv 0$ e $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$ in un dominio semplicemente connesso $U \subset \mathbb{C}$, allora esiste una superficie regolare minima \mathbf{x} definita su $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che le equazioni (2.5) siano valide. Basta infatti definire, fissato $(u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_1(\xi) d(\xi), \\ y &= \operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_2(\xi) d(\xi), \\ z &= \operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_3(\xi) d(\xi) \end{aligned}$$

dove γ è una qualsiasi curva regolare differenziale su U che congiunge il punto (u_0, v_0) al generico punto $(u, v) \in U$. Allora le x, y, z risultano armoniche e applicando (i), (ii), (iii) in direzione opposta il risultato seguirà dal lemma 2.4.1.

Quindi un'altra conseguenza dell'esistenza di coordinate isoterme è che localmente possiamo ricondurre lo studio di una superficie minima allo studio del raggio vettore olomorfo ϕ associato. Questo ci permette di estendere molte proprietà delle funzioni armoniche e olomorfe alle superfici minime.

Diamo ora un corollario del teorema di esistenza delle coordinate isoterme.

Corollario 2.4.2 *Tutte le soluzioni $f \in C^\infty(U)$ dell'equazione delle superfici minime (2.2) sono reali analitiche.*

Dim. Sia $z = f(x, y)$ una superficie minima. Abbiamo visto che in un intorno di ogni punto è possibile definire le equazioni 2.4 che danno le coordinate locali isoterme (u, v) per la superficie. Dal lemma 2.4.1 x e y sono armoniche, dunque funzioni reali analitiche in u, v . Così la mappa $h : (x, y) \rightarrow (u, v)$ è anch'essa reale analitica. Inoltre $z = f(x(u, v), y(u, v))$ è armonica, sempre per 2.4.1. Dunque è una funzione reale analitica di u, v . Quindi abbiamo

$$\left. \begin{array}{l} h \text{ analitica} \\ z = f(x(u, v), y(u, v)) \text{ analitica} \end{array} \right\} \implies f \text{ analitica.}$$

□

2.5 Il teorema di Bernstein

In questo paragrafo soffermeremo la nostra attenzione sulle soluzioni dell'equazione (2.2). Finora non abbiamo mai specificato il dominio di queste funzioni, tuttavia osserviamo che queste non sono definite per tutti i valori di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Intorno al 1910 Bernstein dimostrò il seguente teorema.

Teorema 2.6 di Bernstein [9] *Se $f(x, y)$ risolve l'equazione delle superfici minime in tutto \mathbb{R}^2 , cioè se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e vale*

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

dove $f_x = p$, $f_y = q$, $f_{xx} = r$, $f_{xy} = s$, $f_{yy} = t$, allora p e q sono costanti.

Noi non presenteremo la dimostrazione originale di Bernstein ma una dimostrazione degli anni '50 ricavata dai lavori di Jorgens [8], Heinz [6] e Nitsche [10].

Nel 1954 Jorgens dimostrò il seguente teorema.

Teorema 2.7 *Sia $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 per la quale*

$$\det Hf(x, y) = 1$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dove con Hf indicheremo la matrice Hessiana di f data da:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice Hessiana è costante e quindi f è un polinomio di secondo grado.

Dim. La dimostrazione che qui presentiamo fu ottenuta da Nitsche utilizzando un diffeomorfismo di \mathbb{R}^2 in se stesso e ci permetterà di ricavare la tesi dal teorema di Liouville.

Abbiamo che per la funzione f vale $rt - s^2 = 1$, quindi $rt > 0$ e possiamo supporre che r e t siano entrambi maggiori di zero. Le ipotesi fatte implicano che la matrice Hessiana di f è definita positiva in ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

cioè che f è una funzione strettamente convessa. Quindi per ogni coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, si ha che

$$(x_2 - x_1)(p(x_2, y_2) - p(x_1, y_1)) + (y_2 - y_1)(q(x_2, y_2) - q(x_1, y_1)) \geq 0. \quad (2.6)$$

Introduciamo il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi(x, y) = x + p(x, y), \\ \eta(x, y) = y + q(x, y). \end{cases} \quad (2.7)$$

Il determinante della matrice Jacobiana J di tale cambiamento di variabili, ricordando che $rt - s^2 = 1$, è

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix} = (1+r)(1+t) - s^2 = 2+r+t > 2$$

avendo supposto che $r, t > 0$. Quindi

$$(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$$

definisce una mappa aperta da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 .

Inoltre, sostituendo (2.7) in (2.6) si ottiene che, posto $\xi_i = \xi(x_i, y_i)$ e $\eta_i = \eta(x_i, y_i)$:

$$\begin{aligned} \|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &\leq (x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) + (y_2 - y_1)(\eta_2 - \eta_1). \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene dunque che

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2$$

da cui segue che la trasformazione 2.7 ha la proprietà che le distanze tra i punti di \mathbb{R}^2 vengono dilatate. Tale trasformazione è una mappa chiusa; infatti supponiamo che $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sia un'applicazione biunivoca non chiusa che, quindi, non manda chiusi in chiusi; esisterebbero un insieme chiuso $E \subset \mathbb{R}^2$ e un punto $q \in \mathbb{R}^2$ tale che $q \in \overline{h(E)}$ ma $q \notin h(E)$. Se $q = h(\tilde{q})$ per un certo $\tilde{q} \in \mathbb{R}^2$ avremmo $\text{dist}(E, \tilde{q}) \leq \text{dist}(h(E), q) = 0$, ma abbiamo dimostrato che per la nostra mappa le distanze tra due punti di \mathbb{R}^2 si dilatano quindi la

nostra mappa è chiusa.

Se ne deduce che il cambio di variabili $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ definisce un diffeomorfismo di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 .

Introducendo la variabile complessa $z = \xi + i\eta$, definiamo la funzione $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:

$$g(z) = (x - p) - i(y - q);$$

tale funzione risulta essere olomorfa. Infatti l'inversa della Jacobiana J è

$$J^{-1} = \left(\frac{1}{2+r+t} \right) \begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1+t}{2+r+t} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{s}{2+r+t} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{s}{2+r+t} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1+r}{2+r+t}. \end{cases}$$

Da queste relazioni si ricava che

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= \frac{\partial x}{\partial \xi} - r \frac{\partial x}{\partial \xi} - s \frac{\partial y}{\partial \xi} - i \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} - s \frac{\partial x}{\partial \xi} - t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ &= (1-r) \frac{\partial x}{\partial \xi} - s \frac{\partial y}{\partial \xi} - i \left((1-t) \frac{\partial y}{\partial \xi} - s \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{t-r}{2+r+t} + i \frac{2s}{2+r+t}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi, \eta) &= \frac{\partial x}{\partial \eta} - r \frac{\partial x}{\partial \eta} - s \frac{\partial y}{\partial \eta} - i \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} - s \frac{\partial x}{\partial \eta} - t \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\ &= (1-r) \frac{\partial x}{\partial \eta} - s \frac{\partial y}{\partial \eta} - i \left((1-t) \frac{\partial y}{\partial \eta} - s \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \\ &= -\frac{2s}{2+r+t} + i \frac{t-r}{2+r+t}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \eta) = -i \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi, \eta),$$

cioè g è olomorfa.

Inoltre

$$g'(z) = \frac{t-r}{2+r+t} + i \frac{2s}{2+r+t} \quad (2.8)$$

e

$$1 - |g'(z)|^2 = \frac{4}{2+r+t} > 0,$$

dunque si ricava che $|g'(z)| < 1$. Grazie al teorema di Liouville 1.10, g' deve essere costante ed in particolare deve essere costante la quantità

$$\frac{4}{2+r+t}$$

da cui $r+t$ è costante. Dalla (2.8) otteniamo quindi che s è costante e $t-r$ è costante, perciò in definitiva sono costanti r , s e t da cui la tesi del teorema. \square

Nel 1955 Heinz [6] dimostrò che la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{pmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{pmatrix}$$

è una matrice Hessiana a cui è possibile applicare il Teorema 2.7.

Infatti A ha determinante ovunque uguale ad 1. Inoltre, dalla dimostrazione della proposizione 2.4 sappiamo che esistono due funzioni L e M , questa volta definite su tutto \mathbb{R}^2 , tali che:

$$A = \begin{pmatrix} L_x & L_y \\ M_x & M_y \end{pmatrix}.$$

Per dimostrare che A è una matrice Hessiana serve mostrare l'esistenza di una funzione $\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $(L, M) = \nabla\Omega$. Per il teorema 1.6 è necessario e sufficiente che $L_y = M_x$, ma per come è definita la matrice A ciò è vero.

Perciò A è una matrice Hessiana con determinante uguale a 1 a cui si può applicare il Teorema 2.7, quindi A è costante. Da ciò segue che p e q sono costanti ossia la tesi del teorema 2.6 di Bernstein.

Osserviamo che il teorema di Bernstein equivale a dire che in \mathbb{R}^3 una superficie minima che è grafico di una funzione differenziabile definita su

tutto il piano \mathbb{R}^2 deve essere il piano stesso. Infatti abbiamo che

$$p = \alpha_1 \quad \text{e} \quad q = \alpha_2$$

per qualche coppia di numeri reali α_1 e α_2 e quindi $f(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$.

2.6 La mappa di Gauss

Un'altra importante proprietà che caratterizza le superfici minime è che la mappa di Gauss associata è un'applicazione conforme.

Proposizione 2.8

Sia S una superficie minima in \mathbb{R}^3 e sia $N : S \rightarrow \mathcal{S}^2$ la sua mappa di Gauss. Allora N è un'applicazione conforme; inoltre se S è orientata rispetto alla normale N e scegliamo su \mathcal{S}^2 un'orientazione positiva rispetto alla normale diretta verso l'interno, allora N conserva anche l'orientazione.

Osservazione 2. Di solito \mathcal{S}^2 è orientata rispetto alla normale diretta verso l'esterno, in tal caso la mappa di Gauss inverte l'orientazione ed è detta anticonforme.

Dim. Sia \mathbf{x} una parametrizzazione regolare isoterma di S . Per ogni $p \in S$ consideriamo il differenziale della mappa di Gauss N in p :

$$\begin{aligned} dN : T_p(S) &\longrightarrow T_p(S) \\ \mathbf{x}_i &\longmapsto \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathbf{N} = \mathbf{N}_i \quad i = u, v. \end{aligned}$$

Per dimostrare che N è un'applicazione conforme, poiché \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v sono perpendicolari e hanno la stessa lunghezza, è sufficiente provare che \mathbf{N}_u e \mathbf{N}_v sono perpendicolari e che hanno la stessa lunghezza perché da ciò segue che la matrice che rappresenta dN è diagonale e quindi la mappa di Gauss conserva le misure degli angoli.

Tenendo conto del fatto che $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N} \rangle = 0$ $\langle \mathbf{N}_{ij}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j \rangle = 0 \quad \forall i, j = u, v$ si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}_u\|^2 &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u \rangle = \langle \mathbf{N}_{uu}, \mathbf{N} \rangle, \\ \|\mathbf{N}_v\|^2 &= \langle \mathbf{N}_{vv}, \mathbf{N} \rangle, \\ \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle &= -\langle \mathbf{N}_{uv}, \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

Ricordando le equazioni (1.2) e (1.5)

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v = \frac{fF - eG}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2}\mathbf{x}_v\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}\|\mathbf{N}_u\|^2 &= \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2}\right)^2 + \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2}\right)^2 \\ \|\mathbf{N}_v\|^2 &= \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2}\right)^2 + \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2}\right)^2 \\ \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle &= \frac{(fF - eG)(gF - fG)}{(EG - F^2)^2} + \frac{(eF - fE)(fF - gE)}{(EG - F^2)^2}.\end{aligned}$$

Poiché S è minima, quindi $H = 0 \Rightarrow eG - 2fF + gE = 0$ e (u, v) sono isoterme ($E = G$ e $F = 0$), abbiamo:

$$\|\mathbf{N}_u\|^2 = \|\mathbf{N}_v\|^2 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle = 0.$$

Questo prova che la mappa di Gauss conserva le misure degli angoli.

Proviamo ora che se \mathbf{S}^2 è orientata rispetto alla normale diretta verso l'interno allora la mappa di Gauss conserva l'orientazione. Osserviamo che \mathbf{N} è anche la normale diretta verso l'esterno della sfera \mathbf{S}^2 . Abbiamo già visto nel capitolo 1 che la matrice di transizione della base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ alla base $\{\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v\}$ è uguale a

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

e che il suo determinante è uguale alla curvatura gaussiana K . Se S è minima $K \leq 0$ quindi le basi $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e $\{\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v\}$ hanno orientazioni opposte. Pertanto $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ coincide con $\{\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v, -\mathbf{N}\}$ dove $-\mathbf{N}$ è la normale diretta verso l'interno della sfera \mathbf{S}^2 \square

Capitolo 3

Esempi di superfici minime

Le prime superfici minime che furono scoperte, oltre al piano, furono l'elicoide e il catenoide che vennero introdotte da Lagrange e da Meusnier. Per molto tempo esse furono gli unici esempi di superfici minime conosciuti. Solo nel 1835 Scherk riuscì a provare l'esistenza di nuove superfici minime, una delle quali verrà descritta nel §3.6. Intorno alla metà del XIX secolo Plateau propose il suo famoso problema: data una curva regolare (non intrecciata) C , chiusa, determinare quali superfici a bordo, di area minima, hanno C come bordo. Data la stretta connessione tra le superfici minime e le superfici di area minima, in quegli anni si sviluppò la teoria delle superfici minime che portò alla scoperta di intere famiglie di superfici caratterizzate dall'aver curvatura media uguale a zero.

3.1 Il piano

Un esempio banale di superficie minima è fornito dal piano. Infatti se $f(x, y)$ è una funzione lineare, cioè

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

essa verifica ovviamente l'equazione (2.2) delle superfici minime.

3.2 Il catenoide

Nel § 1.2 abbiamo introdotto come esempio di superficie di rotazione il catenoide. Abbiamo visto che se la catenaria giace nel piano xz e ruota attorno all'asse z possiamo parametrizzare il catenoide con:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cos u, a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \sin u, v \right)$$

dove $a > 0$ è un parametro reale e con $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in (-\infty, +\infty)$.

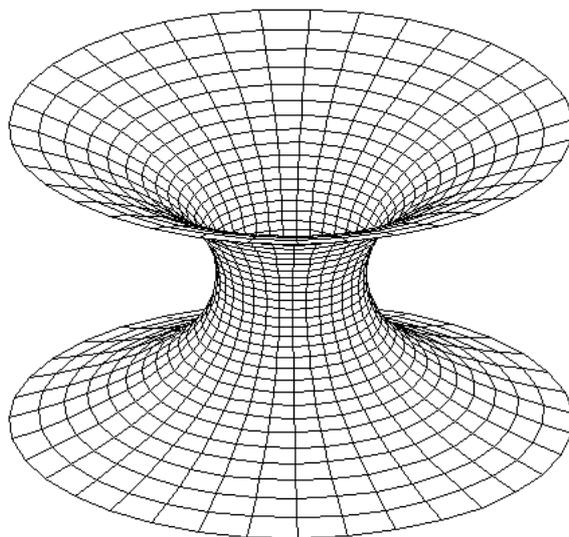


Figura 3.1: Catenoide [2]

Vogliamo mostrare che il catenoide è una superficie minima.

Poniamo per semplicità di calcolo $a = 1$, abbiamo

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v),$$

calcoli diretti mostrano che

$$\mathbf{x}_u = (-\cosh v \sin u, \cosh v \cos u, 0)$$

$$\mathbf{x}_v = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, 1)$$

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, -\frac{\sinh v}{\cosh v} \right);$$

dunque

$$\begin{aligned} E = G = \cosh^2 v & & F = 0 \\ -e = g = 1 & & f = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sostituendo questi valori nella (1.6) si ottiene $H = 0$, dunque il catenoide è una superficie minima.

In più possiamo vedere che questa parametrizzazione è data in coordinate isoterme.

Nel caso del catenoide la soluzione della (2.2) è data da

$$f(x, y) = \cosh^{-1} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

o

$$x^2 + y^2 = (\cosh z)^2.$$

Dimostriamo ora un'importante proprietà del catenoide.

Proposizione 3.1 [3] *Il catenoide è l'unica superficie minima, a meno di similitudini, che sia di rotazione (oltre il piano).*

Dim. Vogliamo trovare una curva $y = f(x)$ tale che, quando viene ruotata attorno all'asse x , descriva una superficie minima S . Poiché i paralleli e i meridiani di una superficie di rotazione sono linee di curvatura per S , si ha che in ogni punto $(x, f(x))$ della superficie S per cui $f(x) > 0$, la curvatura della curva $y = f(x)$ è l'opposto della curvatura del cerchio generato dal punto $f(x)$ (in quanto entrambe le curvature sono le due curvature principali di S in $(x, f(x))$). Poiché la curvatura di $y = f(x)$ è

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e la curvatura normale di S lungo il cerchio è la proiezione del suo vettore curvatura $\frac{1}{y} \mathbf{n}$ lungo la normale N alla superficie, otteniamo

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y} \cos \phi.$$

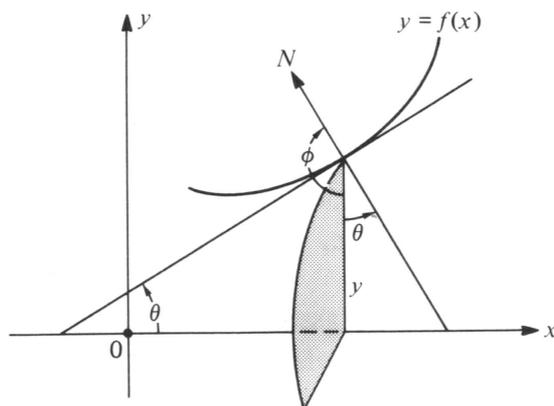


Figura 3.2: [3]

Ma dalla figura 3.2 si vede che $-\cos \phi = \cos \theta$ e poiché $\tan \theta = y'$, otteniamo, ricordando alcune relazioni trigonometriche,

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}}$$

equazione che deve essere soddisfatta dalla curva $y = f(x)$.

Di certo esisterà un punto x in cui $f'(x) \neq 0$. Consideriamo dunque un intorno di questo punto. Moltiplicando entrambi i membri della precedente equazione per $2y'$ otteniamo

$$\frac{2y'y''}{1 + (y')^2} = \frac{2y'}{y}.$$

Poniamo $z = 1 + (y')^2$, dunque $2y'y'' = z'$, abbiamo

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y},$$

ed integrando si ottiene

$$\log z = \log y^2 + \log k^2 = \log (yk)^2$$

o

$$1 + (y')^2 = z = (yk)^2$$

dove k è una costante non nulla.

L'ultima espressione può essere riscritta come

$$\frac{k dy}{\sqrt{(yk)^2 - 1}} = k dx,$$

che, integrando di nuovo, dà

$$\cosh^{-1}(yk) = kx + c$$

o

$$y = \frac{1}{k} \cosh(kx + c)$$

dove c è una costante qualunque.

Dunque, in un intorno di ogni punto della curva $y = f(x)$ in cui $f'(x) \neq 0$, la curva $y = f(x)$ è una catenaria e per una catenaria $f'(x)$ non è mai nulla. Per continuità $f'(x)$ non è mai nulla e quindi la superficie è un catenoide. \square

Il catenoide può anche essere descritto localmente come il grafico di una funzione differenziabile, dunque esso è anche una superficie di area minima, e quindi è la soluzione di un qualche problema di Plateau. Per questo si può costruire facilmente un modello materiale di catenoide: basta immergere un telaio formato da due cerchi tenuti tra loro paralleli in una soluzione di acqua e sapone quando si estraggono, se i due anelli sono posti ad una distanza abbastanza ravvicinata, la forma della lamina saponata che li congiunge è un catenoide.

3.3 L'elicoide

Parlando delle superfici rigate nel §1.2 abbiamo introdotto l'elicoide che si ottiene ruotando una retta attorno ad un asse a lei perpendicolare e traslandola contemporaneamente lungo l'asse. Abbiamo visto che una sua parametrizzazione è data da

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) &= (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, b\bar{u}) \\ 0 &< \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < +\infty \end{aligned}$$

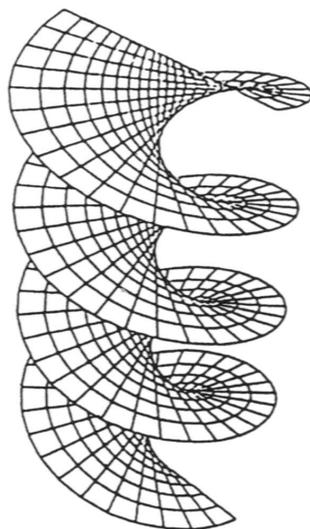


Figura 3.3: Elicoide [2]

e b è un numero reale non nullo.

Poichè

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-\bar{v} \sin \bar{u}, \bar{v} \cos \bar{u}, b) \\ \mathbf{x}_v &= (\cos \bar{u}, \sin \bar{u}, 0) \\ \mathbf{N} &= \left(-\frac{b \sin \bar{u}}{\sqrt{b^2 + v^2}}, \frac{b \cos \bar{u}}{\sqrt{b^2 + v^2}}, -\frac{\bar{v}}{\sqrt{b^2 + \bar{v}^2}} \right); \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} E &= \bar{v}^2 + b^2 & F &= 0 & G &= 1 \\ e &= g = 0 & f &= \frac{b}{\sqrt{b^2 + \bar{v}^2}} \end{aligned}$$

si ha che $H = 0$ dunque l'elicoide è una superficie minima.

La soluzione dell'equazione delle superfici minime (2.2) è

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

valida per ogni $x \neq 0$, o, equivalentemente,

$$\tan z = \frac{y}{x}.$$

Cerchiamo ora una parametrizzazione in coordinate isoterme. Consideriamo il seguente cambio di parametri:

$$\bar{u} = u - \frac{\pi}{2}, \quad \bar{v} = \sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty$$

che è possibile in quanto la mappa è biunivoca e il determinante della matrice Jacobiana J

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \cosh v$$

è sempre diverso da zero.

Quindi, ponendo per comodità $b = 1$, una nuova parametrizzazione dell'elicoide è

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, \left(u - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

per la quale i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = G = \cosh^2 v, \quad F = 0 \tag{3.3}$$

dunque questa parametrizzazione è isoterma.

Come il catenoide anche l'elicoide ha un'importante proprietà: quella di essere l'unica superficie minima che sia anche rigata (oltre al piano che, come abbiamo visto in §1.2, può essere considerato un elicoide degenero di passo nullo), vale a dire che per ogni suo punto passa una retta interamente contenuta nella superficie.

Possiamo provare questa ultima affermazione se assumiamo che gli zeri della curvatura Gaussiana di una superficie minimale siano isolati¹. Garantito questo, procediamo in questo modo.

Partiremo da una superficie rigata minima e dimostreremo che questa deve essere obbligatoriamente un elicoide.

Assumiamo che la superficie non sia un piano. Allora in un qualche intorno W della superficie la curvatura Gaussiana K sarà strettamente negativa. Poiché la curvatura media è zero, W è coperto da due famiglie di curve asintotiche che si intersecano ortogonalmente (si possono usare coordinate

¹Per una dimostrazione si veda [11] p.76

isoterme). Poiché le rette della superficie sono curve asintotiche e la superficie non è un piano, possiamo scegliere un punto $q \in W$ tale che una delle curve asintotiche che passano attraverso q abbia torsione diversa da zero in q . Poiché il piano osculatore in un punto di una curva asintotica è il piano tangente della superficie, esiste un intorno $V \subset W$ tale che le rette (o i segmenti) contenute in V sono dirette come le normali principali ad ogni curva asintotica di V (che non sia una retta). Si può provare che si verifica la situazione sopra descritta se e solo se le curve in questione sono delle eliche cilindriche. Dunque V è una parte di un elicoide. Poiché la torsione di un'elica circolare è costante, si mostra che l'intera superficie è parte di un elicoide, che è proprio ciò che volevamo provare.

3.4 Connessione tra catenoide ed elicoide

Nei paragrafi §1.2 e §1.3 abbiamo studiato le due superfici minime classiche, il catenoide e l'elicoide.

Ricordiamo le loro parametrizzazioni isoterme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v)_C &= (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v), \\ \mathbf{x}(u, v)_E &= \left(\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, \left(u - \frac{\pi}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Di queste superfici abbiamo anche calcolato i coefficienti della prima forma fondamentale trovando che

$$E_C = G_C = E_E = G_E = \cosh^2 v \quad F_C = F_E = 0.$$

Dunque per la proposizione 1.2 abbiamo che il catenoide e l'elicoide sono due superfici localmente isometriche; esse sono dette superfici minime coniugate.

Cerchiamo di chiarire il concetto di questa terminologia. Poiché \mathbf{x}_C e \mathbf{x}_E sono le parametrizzazioni di due superfici minime, per il lemma 2.4.1 le loro funzioni coordinate sono armoniche. Inoltre nel paragrafo §1.4 abbiamo ricordato che due funzioni reali che soddisfano le funzioni di Cauchy (1.11) sono dette funzioni coniugate e noi osserviamo che

$$\frac{\partial \mathbf{x}_C}{\partial u} = (-\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, 0) = -\frac{\partial \mathbf{x}_E}{\partial v}$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{x}_C}{\partial v} = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, 1) = \frac{\partial \mathbf{x}_E}{\partial u}$$

quindi le parametrizzazioni dell'elicoide e del catenoide sono coniugate. Ecco spiegato il motivo della definizione.

Possiamo fare un'ulteriore osservazione sul legame che esiste tra queste due superfici. Poniamo

$$\mathbf{x}(u, v, t) = \cos t \mathbf{x}_C + \sin t \mathbf{x}_E,$$

e, al variare di t in \mathbb{R} , otteniamo un famiglia ad un parametro di superfici minime associate tale che $\mathbf{x}(u, v, 0) = \mathbf{x}_C$ e $\mathbf{x}(u, v, \frac{\pi}{2}) = \mathbf{x}_E$, che hanno la stessa prima forma fondamentale. Infatti

$$\mathbf{x}_u = \cos t \mathbf{x}_{C,u} + \sin t \mathbf{x}_{E,u}$$

e

$$\mathbf{x}_v = \cos t \mathbf{x}_{C,v} + \sin t \mathbf{x}_{E,v}$$

quindi

$$E = \|\mathbf{x}_u\|^2 = \cos^2 t E_C + \sin^2 t E_E + 2 \sin t \cos t \langle \mathbf{x}_{C,u}, \mathbf{x}_{E,u} \rangle = E_C = E_E$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$$

$$G = \|\mathbf{x}_v\|^2 = G_C = G_E.$$

Quindi in generale due superfici minime coniugate possono essere trasformate l'una nell'altra attraverso una famiglia ad un parametro di superfici minime e la prima forma fondamentale di questa famiglia è indipendente dal parametro.

Nella figura 3.4 viene mostrata la deformazione del catenoide nell'elicoide che si ottiene tagliando una porzione di catenoide verticalmente e avvitandolo poi su se stesso lungo un meridiano. Le superfici intermedie sono ancora superfici minime tutte localmente isometriche fra loro.

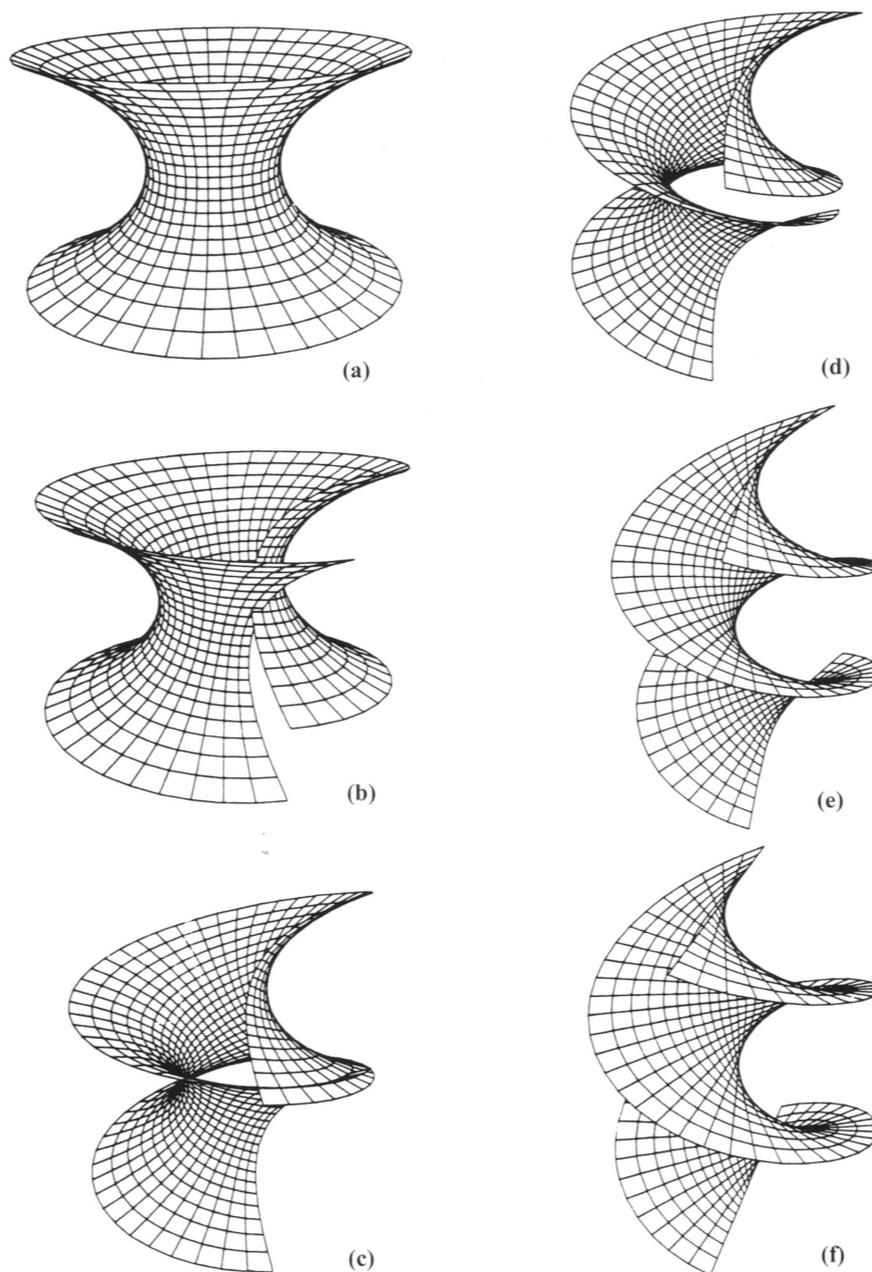


Figura 3.4: Trasformazione di un catenoide in un elicoide [2]

3.5 La superficie di Enneper

Nel 1863 Alfred Enneper, un matematico tedesco, scoprì una nuova superficie minima, che prese poi il suo nome, e che può essere rappresentata secondo la seguente parametrizzazione:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

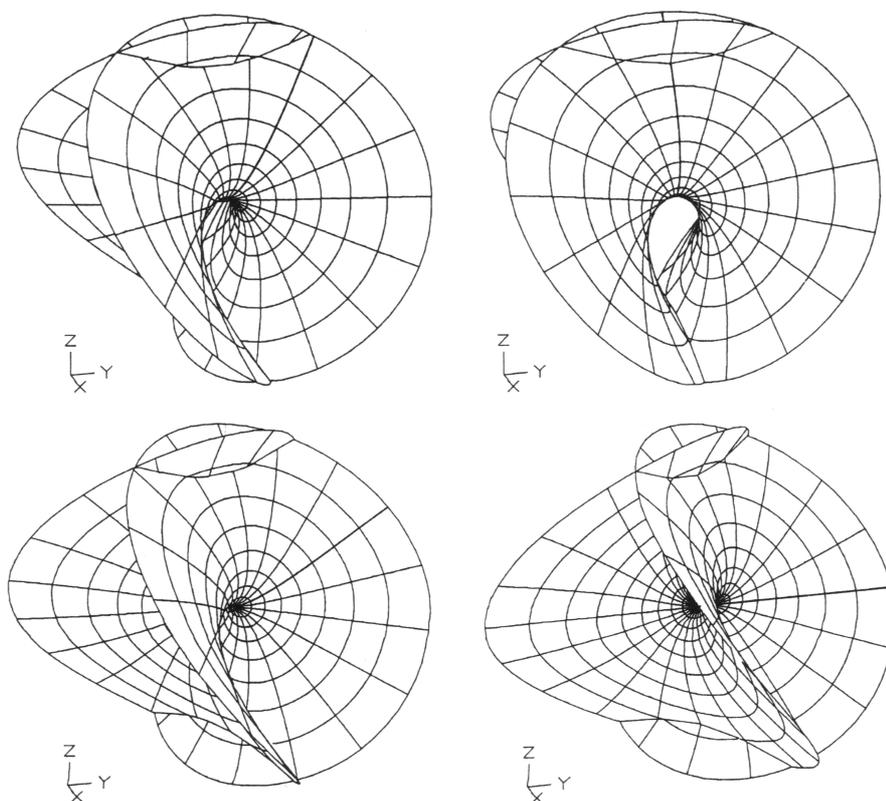


Figura 3.5: Superficie di Enneper [2]

Poiché

$$\mathbf{x}_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$$

$$\mathbf{x}_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (-2u, 2v, 2)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (2u, -2v, -2)$$

abbiamo

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2 \quad F = 0$$

quindi la parametrizzazione è isoterma e $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = \mathbf{0}$ da cui, per il lemma 2.4.1, la superficie è minima.

Osserviamo che sostituendo $(-v, u)$ a (u, v) cambiamo, sulla superficie, (x, y, z) in $(-y, x, -z)$. Questo significa che se effettuiamo una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ positiva attorno all'asse z e poi eseguiamo una simmetria rispetto al piano xy , la superficie rimane invariata.

La peculiarità della superficie di Enneper è che, nonostante la relativa funzione $\mathbf{x}(u, v)$ sia abbastanza semplice, il supporto di $\mathbf{x}(u, v)$ presenta delle autointersezioni e questo non dà luogo ad una superficie secondo la definizione 1.3. Infatti, come si può vedere dalla figura 3.3, in un intorno dell'origine, il supporto ha la forma di una sella e allargando il dominio i due lati esterni della figura ad un certo punto si intersecheranno. Possiamo dimostrare questo fatto ponendo $u = \rho \cos \vartheta, v = \rho \sin \vartheta$ con $\rho > 0$, si ottiene

$$\mathbf{x}(\rho, \vartheta) = \left(\rho \cos \vartheta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\vartheta, \rho \sin \vartheta - \frac{\rho^3}{3} \sin 3\vartheta, \rho^2 \cos 2\vartheta \right).$$

Se $\mathbf{x}(\rho_1, \vartheta_1) = \mathbf{x}(\rho_2, \vartheta_2)$, ricordando alcune relazioni di trigonometria, otteniamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} - \cos 4\vartheta \frac{2\rho^4}{3} \\ &= \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} (\rho_1^2 \cos 2\vartheta_1)^2 \\ &= \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} (\rho_2^2 \cos 2\vartheta_2)^2. \end{aligned}$$

Dunque, poiché $\rho_1^2 \cos 2\vartheta_1 = \rho_2^2 \cos 2\vartheta_2$ (questo perché le terze coordinate delle due parametrizzazioni sono uguali), otteniamo

$$\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} = \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3},$$

che implica $\rho_1 = \rho_2$; segue che $\cos 2\vartheta_1 = \cos 2\vartheta_2$.

Abbiamo ora due casi:

- 1) $\rho_1 = \rho_2$ e $\vartheta_1 = 2\pi - \vartheta_2$;
- 2) $\rho_1 = \rho_2$ e $\vartheta_1 = \pi - \vartheta_2$.

Nel caso 1) da

$$y(\rho_1, \vartheta_1) = y(\rho_2, \vartheta_2)$$

otteniamo che $y = -y$, dunque $y = 0$, cioè i punti (ρ_1, ϑ_1) e (ρ_2, ϑ_2) appartengono alla curva $\sin \vartheta - \frac{\rho^2}{3} \sin 3\vartheta = 0$. Inoltre, per ogni punto (ρ, ϑ) appartenente a questa curva, anche il punto $(\rho, 2\pi - \vartheta)$ appartiene ad essa, e

$$x(\rho, \vartheta) = x(\rho, 2\pi - \vartheta)$$

$$z(\rho, \vartheta) = z(\rho, 2\pi - \vartheta).$$

Dunque, l'intersezione della superficie con il piano $y = 0$ è una curva lungo la quale la superficie si autointerseca.

In modo simile e con calcoli analoghi, nel caso 2), si mostra che l'intersezione della superficie con il piano $x = 0$ è anch'essa una curva di autointersezione.

Queste sono le uniche autointersezioni della superficie di Enneper.

3.6 La superficie di Scherk

Il matematico tedesco Heinrich Ferdinand Scherk negli anni che vanno dal 1831 al 1835 scoprì nuovi esempi di superfici minime, una delle più famose è la cosiddetta superficie di Scherk che verrà presentata qui di seguito. Questa superficie è una superficie doppiamente periodica, cioè è periodica sia nella direzione di x che in quella di y .

La superficie di Scherk è la superficie parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i}, \arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| \right),$$

con $\zeta \neq \pm 1$, $\zeta \neq \pm i$, dove $\zeta = u + iv$, e $\arg \zeta$ è l'angolo che l'asse reale forma con ζ .

Grazie alla definizione di argomento di un numero complesso si ottiene:

$$\begin{aligned} \arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i} &= \tan^{-1} \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}, \\ \arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} &= \tan^{-1} \frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1}, \\ \log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| &= \frac{1}{2} \log \frac{(u^2 - v^2 + 1) + 4u^2v^2}{(u^2 - v^2 - 1) + 4u^2v^2} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2}{1 + \zeta^2}, \\ \phi_2 &= \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{2i}{1 - \zeta^2}, \\ \phi_3 &= \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{4\zeta}{1 - \zeta^4}.\end{aligned}$$

Poiché $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \equiv 0$ e ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 sono olomorfe, per la proposizione 2.5, \mathbf{x} è una parametrizzazione isoterma di una superficie minima.

L'unica soluzione non banale dell'equazione delle superfici minime (2.2) per la superficie di Scherk è data da

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

o, equivalentemente, da

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}.$$

La superficie di Scherk è, dunque, una superficie minima definita sull'insieme $0 < \frac{\cos y}{\cos x} < +\infty$ (dove $\cos x \neq 0$), che è costituita dai quadrati neri della scacchiera infinita che è mostrata nella figura 3.6 (nella parte sinistra della figura 3.6 è mostrata la superficie di Scherk vista da $z = +\infty$).

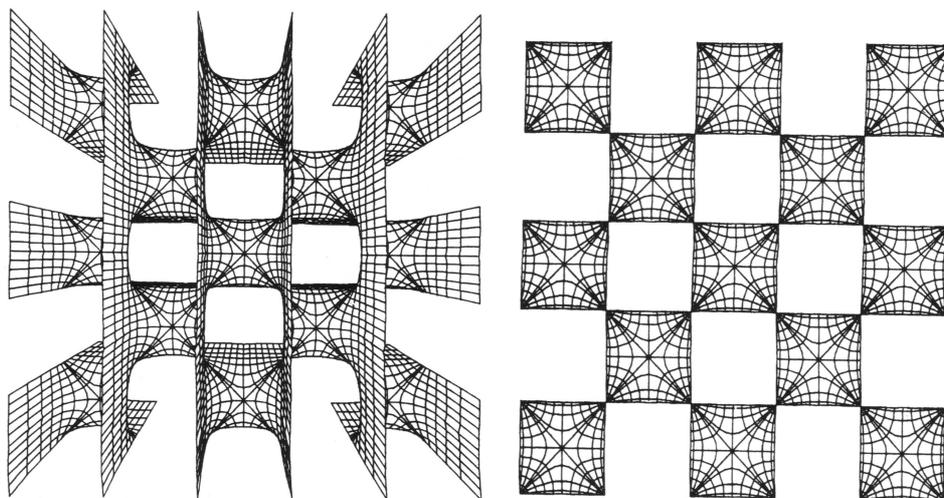


Figura 3.6: Superficie di Scherk [2]

Vogliamo ora dimostrare che $z = \log \frac{\cos y}{\cos x}$ è l'unica soluzione non banale dell'equazione (2.2) nel caso in cui $f(x, y)$ sia una funzione a variabili separabili ossia quando $f(x, y)$ è della forma

$$f(x, y) = g(x) + h(y).$$

In tal caso l'equazione (2.2) assume la forma

$$\left(1 + (g'(x))^2\right) h''(y) + \left(1 + (h'(y))^2\right) g''(x) = 0$$

cioè

$$-\frac{g''(x)}{1 + (g'(x))^2} = \frac{h''(y)}{1 + (h'(y))^2}$$

e, poiché x e y sono variabili indipendenti, ogni membro di questa equazione deve essere una costante.

Sia k il valore di questa costante.

Se $k = 0$ avremo $g(x) = ax + b$ e $h(y) = cy + d$ in altre parole entrambe le funzioni sono lineari quindi la superficie un piano.

Se $k \neq 0$ risolvendo le due equazioni differenziali del secondo ordine

$$-\frac{g''(x)}{1 + (g'(x))^2} = k \quad \frac{h''(y)}{1 + (h'(y))^2} = k$$

si ottiene

$$g(x) = \frac{1}{k} \log [\cos (kx + a)] + b$$

e

$$h(y) = -\frac{1}{k} \log [\cos (ky + c)] + d.$$

quindi

$$f(x, y) = z = \frac{1}{k} \log \frac{\cos (kx + a)}{\cos (ky + c)} + e$$

che è il risultato cercato (k, a, b, c, d ed e sono dei numeri reali).

Quindi abbiamo ottenuto una famiglia ad un parametro di grafici, ciascuno dei quali definiti su una scacchiera del piano xy , tutti equivalenti a meno di traslazioni e omotetie.

3.7 La superficie di Costa

Il piano e il catenoide sono superfici minime regolari illimitate che hanno anche curvatura totale finita, dove la curvatura totale è definita come l'integrale sulla superficie della curvatura Gaussiana; in simboli, sia A una regione di S la curvatura totale di A è

$$\int_A K dS$$

e per essere finita deve essere uguale ad un numero reale. Nel caso del piano e del catenoide quell'integrale è un numero reale per $A = S$.

Fino al 1984 non si conoscevano altre superfici minime con curvatura totale finita oltre al piano e al catenoide e, poiché nessun matematico era riuscito, nonostante gli sforzi, a trovare un nuovo esempio di una superficie di questo tipo si pensava che non esistessero.

Nel novembre del 1983 uno studente brasiliano, Celso Costa [1], presentò nella sua tesi di dottorato una nuova superficie. La superficie trovata da Costa era una superficie minima illimitata di curvatura totale finita, ma poiché le equazioni che la definivano erano troppo complicate non si riusciva a capire se il supporto di questa superficie fosse privo o meno di autointersezioni, quindi se questa superficie poteva essere una superficie nel senso dato dalla definizione 1.3.

Un matematico americano, Hoffman [7], grazie ad un programma di grafica computerizzata sviluppato da lui, analizzandone le simmetrie, riuscì a dimostrare che la superficie di Costa era priva di autointersezioni.

Qualche mese dopo sempre Hoffman dimostrò, con l'aiuto di Meeks, che esisteva un'intera famiglia di superfici minime con tali proprietà.

La superficie di Costa è topologicamente equivalente ad una sfera con un manico e tre buchi e dall'immagine 3.7 si vede che assomiglia all'unione di un piano e di un catenoide.

Va notato che la superficie di Costa e tutte le altre superfici scoperte da Hoffman, non sono ottenibili con le lamine saponate, infatti il liquido della soluzione saponata tende a chiudere immediatamente i possibili buchi e quindi è impossibile ottenere una superficie con un manico.

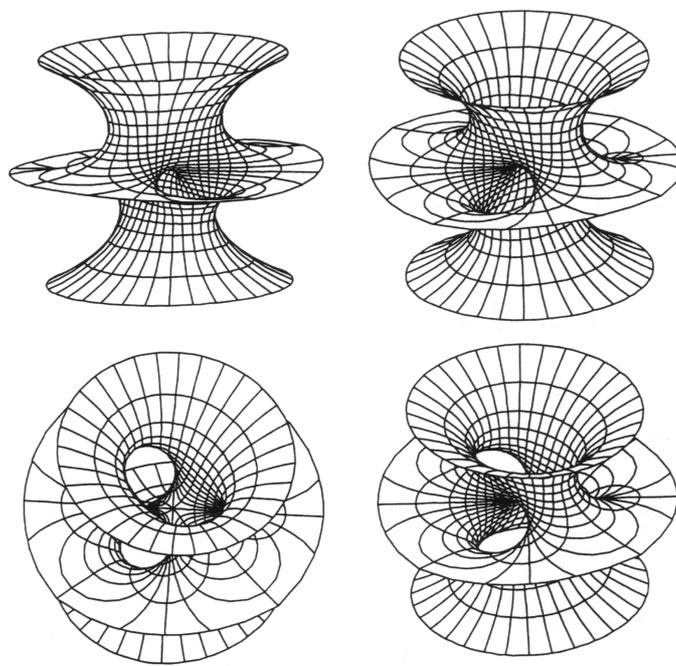


Figura 3.7: Superficie di Costa [2]

3.8 Applicazioni della teoria delle superfici minime

Alla fine di questa trattazione la domanda che sorge spontanea è: come mai questo interesse da parte dei matematici verso lo studio della teoria delle superfici minime? La ricerca viene svolta solo per il puro desiderio di conoscenza oppure è possibile utilizzare queste scoperte per fini più pratici?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo ricordare il legame, presentato nel capitolo 2, tra le superfici minime e le superfici di area minima.

Abbiamo detto che le superfici minime sono, almeno localmente, delle superfici di area minima e che se una superficie minima è descrivibile sotto forma di grafico di una funzione differenziabile è anche di area minima.

Quindi i matematici sono interessati al problema delle superfici minime anche perché strettamente legato alla questione dell'area minima di una superficie.

Ma la domanda rimane la stessa: qual è l'interesse delle superfici di area

minima? La risposta in questo caso è molto più evidente.

Enunciando il problema di Plateau si è detto che una superficie di area minima può essere ricreata, almeno localmente, sotto forma di bolla di sapone, che si ottiene immergendo un reticolo metallico in una soluzione di acqua e sapone ed estraendolo delicatamente. Le bolle di sapone si dispongono spontaneamente sulle superfici minimali perché la tensione superficiale della lamina saponata tende a ridurre il più possibile l'estensione finché essa non si trova allo stato di energia minima.

Questo avviene per il principio fisico di energia minima che afferma: *un sistema fisico può esistere in una determinata configurazione solo se esso non può evolvere verso una configurazione a minor contenuto energetico rispetto alla prima.*

La natura, dunque, agisce sempre nel modo più economico possibile ed è proprio da questo che discende l'utilità dello studio delle superfici minime nell'ambito della chimica e della biologia, infatti molte strutture naturali seguendo il principio fisico di minima energia si dispongono su superfici minime.

Ad esempio uno dei campi in cui si utilizzano i risultati della teoria delle superfici minime è la cristallografia matematica, cioè quella parte della mineralogia che studia i cristalli, che utilizza i metodi matematici per risolvere problemi cristallografici e che dà dei modelli geometrici per classificare le strutture cristalline.

Il cristallo è una formazione minerale solida caratterizzata da una disposizione periodica e ordinata di atomi, vertici di una struttura reticolare che prende il nome di reticolo cristallino. Senza entrare in dettagli tecnici, possiamo però dire che nei reticoli cristallini le molecole sono sistematicamente distanziate in modo da presentare nel loro insieme una sorta di configurazione regolare e si è visto che tale configurazione è spesso associabile ad una superficie minima tre-periodica.

Un altro ambito in cui le superfici minime sono molto usate è quello architettonico. In architettura, infatti, la fabbricazione di edifici che ottimizzassero i costi, i materiali ma soprattutto gli spazi, costituiva un problema nel periodo di grande crescita demografica dovuta al boom economico. L'ar-

chitetto che più di altri utilizzò la teoria delle superfici minime a tale scopo fu il tedesco Otto Frei.

Per i suoi studi Frei utilizzava davvero dei modelli di lamine saponate; costruiva, infatti, dei modellini formati da aghi di diversa altezza inseriti in una placca di plexiglas e alle estremità di questi aghi attaccava dei fili sottilissimi, immergeva poi questo modellino in acqua e sapone e lo estraeva. La pellicola di sapone che si formava su questo contorno, era una superficie di area minima avente la forma di una tenda. Attraverso delle precise misurazioni creava poi un modellino metallico.

Nelle costruzioni reali i fili sottili venivano sostituiti con dei cavi d'acciaio molto resistenti e la pellicola di sapone diventava la copertura dell'edificio: una tenda di materiale trasparente molto resistente. Il risultato finale era un edificio coperto da tetti a forma di sella, da cui il nome architettonico di questi edifici: volte sottese presollecitate a forma di sella.

La stabilità di queste coperture dipende essenzialmente dalla loro forma. Infatti l'armatura metallica è costituita da cavi presollecitati disposti secondo le due direzioni di curvatura principali e, poiché i punti dove si incrociano i cavi hanno curvature opposte, essi si scambiano il peso da sorreggere determinando in ogni punto la condizione di stabilità.

Una delle opere più importanti di Otto Frei costruita secondo questi principi è lo stadio olimpico di Monaco di Baviera, eretto nel 1972.

Per concludere la nostra trattazione diamo un esempio di come le superfici minime siano state usate nell'arte. Ci stiamo riferendo però ad un'arte particolare, quella di creare delle gigantesche sculture di ghiaccio.

In Colorado, nella città di Breckenridge, si svolge ogni anno il Campionato internazionale di Scultura in Ghiaccio, i partecipanti devono creare con tonnellate di neve artificiale compattata delle splendide sculture purtroppo non eterne.

Nel 1999 a questa competizione partecipò una squadra di matematici capeggiata da uno scultore: Helaman Ferguson. Essi costruirono una enorme superficie di Costa; si partì da un blocco di 20 tonnellate di ghiaccio, e si cominciò a scavare le aperture della superficie, il famoso manico. Vennero rimosse più di 14 tonnellate ghiaccio per arrivare alla forma finale.

È interessante notare che la scultura di questo gruppo di matematici fu una di quelle che durarono di più senza sciogliersi, mantenendo i vari dettagli; questo sempre grazie alle proprietà fisiche delle superfici minime, infatti essendo la scultura molto stabile riusciva a non cadere anche dopo essersi ridotta con pareti molto più sottili.

Per dovere di cronaca i matematici arrivarono secondi!

Bibliografia

- [1] Celso J. Costa. Example of a complete minimal immersion in \mathbf{R}^3 of genus one and three embedded ends. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 15(1-2):47–54, 1984.
- [2] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, and Friedrich Sauvigny. *Minimal surfaces*, volume 339 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, second edition, 2010. With assistance and contributions by A. Küster and R. Jakob.
- [3] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.
- [4] A. T. Fomenko and A. A. Tuzhilin. *Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space*, volume 93 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. Translated from the Russian by E. J. F. Primrose.
- [5] Robert E. Greene and Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variable*, volume 40 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, third edition, 2006.
- [6] Erhard Heinz. Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt.*, 1952:51–56, 1952.
- [7] David Hoffman and William H. Meeks, III. Minimal surfaces based on the catenoid. *Amer. Math. Monthly*, 97(8):702–730, 1990.

-
- [8] Konrad Jörgens. Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. *Math. Ann.*, 127:130–134, 1954.
- [9] Mario Miranda. *Superfici minime e il problema di Plateau*. Università di Lecce, Coordinamento SIBA, Lecce, 2006.
- [10] Johannes C. C. Nitsche. Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 66:543–544, 1957.
- [11] Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969.
- [12] C.D. Pagani and S. Salsa. *Analisi matematica vol.2*. Masson, Milan, 1991.
- [13] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, second edition, 1974. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.
- [14] I. N. Vekua. *Generalized analytic functions*. Pergamon Press, London, 1962.