

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



SUPERFICI DIFFERENZIABILI CON CURVATURA GAUSSIANA COSTANTE

Relatore: Chiar.mo prof. Alberto ALZATI

ELABORATO FINALE DI
Susanna VILLANI
Matr. 706707

ANNO ACCADEMICO 2009 - 2010

Ai miei Genitori

Indice

Introduzione	3
Notazioni usate	6
Richiami sulla teoria dei fogli semplici	8
1 Superfici differenziabili in \mathbb{E}^3	11
1.1 Definizione di superficie	11
1.2 Piano tangente	19
1.3 Orientabilità	20
2 Superfici differenziabili con curvatura Gaussiana costante	25
2.1 Superfici chiuse di curvatura Gaussiana costante positiva	25
2.2 Superfici di curvatura costante nulla	35
2.3 Superfici di curvatura costante negativa	44
3 Superfici con curvatura Gaussiana positiva o non negativa	53
3.1 Convessità	53
3.1.1 Compattezza	59
3.1.2 Non compattezza	60
3.2 Richiami sui rivestimenti	61
3.3 Superfici complete	66
Bibliografia	75

Introduzione

Questo lavoro intende fornire un utile complemento allo studio delle superfici immerse in \mathbb{E}^3 , rispetto alle questioni usualmente affrontate nei corsi di base di Geometria.

È noto infatti che, sia per esigenze di tempo, sia per il maggior interesse che tali argomenti suscitano presso altre discipline, lo studio viene di solito focalizzato solo sugli aspetti locali della teoria, tipicamente lo studio dei fogli semplici di superficie. Ciò è del tutto comprensibile, ma si rischia di perdere in questo modo l'approccio allo studio delle proprietà globali delle superfici di \mathbb{E}^3 , considerate come esempi di varietà differenziabili immerse di dimensione 2, approccio che, tra l'altro, è fra le peculiari caratteristiche della Geometria moderna.

Abbiamo quindi deciso, con questo lavoro, di colmare in parte tale lacuna concentrandoci per la verità solo su un singolo elemento della teoria, ma molto rilevante: la curvatura Gaussiana K .

Nei corsi di base essa è definita, in un punto p di una superficie, come il rapporto fra i determinanti delle matrici rappresentative delle forme quadratiche fondamentali sul piano tangente in p alla superficie. Il valore della funzione K in p fornisce utilissime informazioni sulla natura del punto p (supposto non piatto): ellittico, parabolico, iperbolico. Di conseguenza, in genere, essa fornisce informazioni sulla forma della superficie vicino a p , ma solo vicino a p . In questo contesto la curvatura di Gauss viene usata da un punto di vista strettamente locale.

Quando però K è costante su tutta la superficie le informazioni globali

che essa può fornire sono estremamente rilevanti.

Tuttavia, a parte un cenno al Teorema Egregium di Gauss, che riguarda comunque aspetti metrici e non topologici delle superfici per cui $K = 0$, solitamente nei corsi di Geometria di base non vengono approfonditi altri aspetti.

Nel nostro lavoro mostreremo invece che, in sostanza, nel caso K costante, una superficie chiusa è vincolata ad essere una sfera, un cilindro o un piano. Col termine “chiusa” noi intendiamo sempre “chiusa nella topologia euclidea di \mathbb{E}^3 ” e noi tratteremo quasi sempre di superfici chiuse perchè sono quelle su cui gli effetti della nostra ipotesi sono più rilevanti, tuttavia non mancheremo di occuparci anche di alcuni risultati per superfici non chiuse.

Per la trattazione ci siamo basati essenzialmente sul testo di M. Abate ed E. Tivena, opportunamente integrato ove necessario.

Il lavoro è strutturato come segue:

Nel primo capitolo sarà introdotto l’oggetto del nostro studio ovvero sarà indicata con precisione quale sarà la definizione di superficie da noi adottata (si veda pag. 12) e saranno richiamati alcuni concetti indispensabili per la comprensione del seguito, come quello di piano tangente a una superficie in un punto (si veda pag. 19) e quello di orientabilità (si veda pag. 20). Tali concetti saranno illustrati mediante alcuni esempi.

Nel secondo capitolo saranno dimostrati i risultati principali sulla teoria delle superfici a curvatura Gaussiana K costante, precisamente:

- $K > 0$: le uniche superfici compatte di curvatura Gaussiana costante positiva sono le sfere (Teorema di Liebmann, si veda pag. 33);
- $K = 0$: le uniche superfici chiuse con curvatura Gaussiana costante nulla sono i piani e i cilindri (Teorema di Hartman-Nirenberg, si veda pag. 43).
- $K < 0$: non esistono superfici chiuse con curvatura Gaussiana costante negativa (Teorema di Hilbert, si veda pag. 49);

Nel terzo capitolo, a complemento della trattazione delle superfici a curvatura costante positiva, dimostreremo che le superfici chiuse di \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana positiva, non necessariamente costante, sono diffeomorfe o a una sfera, se compatte, o a un aperto convesso del piano, se non compatte (Teoremi di Hadamard e di Stoker, si vedano pag. 59-60).

A chiusura del lavoro dimostreremo poi alcune proprietà delle superfici a curvatura Gaussiana non positiva, non necessariamente costante. Prima di ciò faremo alcuni richiami sulla teoria dei rivestimenti ricordando in particolare che i rivestimenti lisci sono tutti e soli quei diffeomorfismi locali che hanno la proprietà del sollevamento C^1 (si veda pag. 65). Dopo aver introdotto i concetti di superficie semplicemente connessa (si veda pag. 65) e di superficie completa (si veda pag. 67), dimostreremo che ogni superficie completa con curvatura Gaussiana non positiva è rivestita da un piano (teorema di Cartan-Hadamard, si veda pag. 73), in particolare ogni superficie completa semplicemente connessa con curvatura Gaussiana non positiva è diffeomorfa a un piano.

Notazioni usate

- Lo spazio dove lavoriamo è \mathbb{E}^3 ; questo spazio, grazie ad un sistema di riferimento affine fissato $R(O, V)$, dove V è uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 su \mathbb{R} dotato della sua base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, sarà identificato con \mathbb{R}^3 ;
- il prodotto scalare è indicato da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (talvolta da \times), mentre quello vettoriale da \wedge ;
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$ indica l'insieme delle matrici con m righe e n colonne a coefficienti in \mathbb{R} ;
- per ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ indichiamo con (x_1, x_2) le coordinate di un punto di \mathbb{R}^2 , mentre con (x, y, z) quelle di un punto in \mathbb{R}^3 ; talvolta il generico punto di \mathbb{R}^2 sarà indicato anche con x ;
- S^2 è la sfera di \mathbb{E}^3 di centro $O = (0, 0, 0)$ e raggio 1;
- id rappresenta l'applicazione identica da un insieme X in se stesso tale che $id(x) = x$ per ogni $x \in X$;
- dato un sottospazio S di uno spazio topologico e fissato un sottoinsieme $E \subset S$ si indica con $\partial_S E$ il bordo di E in S ;
- s è un parametro arco di una curva differenziabile;
- ∇h indica il vettore gradiente della funzione h ;
- data una curva σ definita su $[s, s'] \subset \mathbb{R}$, $L(\sigma|_{[s, s']})$ indica la sua lunghezza;

- $K(p)$ indica la curvatura Gaussiana in un punto p di una superficie $S \subset \mathbb{E}^3$;
- $H(p)$ indica la curvatura media in un punto p di una superficie $S \subset \mathbb{E}^3$;
- per ogni funzione differenziabile $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ indichiamo con ∂_1 e ∂_2 , rispettivamente, i vettori $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_x$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \Big|_x$.

La matrice della prima forma fondamentale di un foglio semplice di superficie sarà indicata come $\begin{pmatrix} E(x) & F(x) \\ F(x) & G(x) \end{pmatrix}$ dove

$$E(x) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle|_x, \quad F(x) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle|_x, \quad G(x) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle|_x;$$

Il valore della prima forma fondamentale applicata a un vettore $v \in T_p S$ sarà indicato con $I_p(v)$;

- Q_p indica la seconda forma fondamentale valutata in un punto p di un foglio semplice φ dove $p = \varphi(x)$ e sarà rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} e(x) & f(x) \\ f(x) & g(x) \end{pmatrix}$.

Per la relazione di Weingarten abbiamo che $Q_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle = \langle L_p(v), v \rangle$ per ogni $v \in T_p S$;

I coefficienti della matrice della seconda forma fondamentale sono dati da

$$e(x) = Q_p(\partial_1) = -\langle dN_p(\partial_1), \partial_1 \rangle_p = h_{11},$$

$$f(x) = -\langle dN_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p = h_{12} = h_{21},$$

$$g(x) = Q_p(\partial_2) = -\langle dN_p(\partial_2), \partial_2 \rangle_p = h_{22};$$

- data $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $N : S \rightarrow S^2$ la rispettiva mappa di Gauss, allora $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ indica la trasformata sferica tale che $dN_p(v) = dN_p(v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2) = v_1 \frac{\partial N}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial N}{\partial x_2}$;

Richiami sulla teoria dei fogli semplici

- Data $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un foglio semplice di superficie cerchiamo di esprimere la matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ che rappresenta dN_p rispetto alla base $\{\partial_1, \partial_2\}$ tramite le funzioni E, F, G, e, f, g . Per ogni $v = v_1\partial_1 + v_2\partial_2$, $w = w_1\partial_1 + w_2\partial_2 \in T_pS$ abbiamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= -\langle dN_p(v), w \rangle_p = \\ &= -\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A.$$

Quindi

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

In particolare la curvatura Gaussiana è data da

$$K = \det(A) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (2)$$

la curvatura media è data da

$$H = -\frac{1}{2}\text{tr}(A) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}; \quad (3)$$

- sia $\varphi : U \rightarrow S$ un foglio semplice di superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Essendo la terna $\{\partial_1, \partial_2, N\}$ una base di \mathbb{R}^3 possiamo esprimere ogni vettore di \mathbb{R}^3 come una sua combinazione lineare. In particolare devono esistere delle funzioni $\Gamma_{ij}^q, h_{ij}, a_{ij} \in C^\infty(U)$ tali che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma_{ij}^1 \partial_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 + h_{ij} N, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_j} = a_{1j} \partial_1 + a_{2j} \partial_2. \quad (5)$$

Le funzioni Γ_{ij}^q sono dette *simboli di Christoffel* della parametrizzazione locale φ . Vogliamo ora calcolarli: moltiplichiamo scalarmente (4) per ∂_1 e per ∂_2 ottenendo

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \partial_1 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \partial_1, \partial_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_1}, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \partial_2 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \partial_1, \partial_2 \rangle - \left\langle \partial_1, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle = \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_2}. \end{cases} \quad (6)$$

Analogamente si trova

$$\begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_2}, \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_1}. \end{cases} \quad (7)$$

e

$$\begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_1}, \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_2}. \end{cases} \quad (8)$$

Osserviamo che se la parametrizzazione locale è ortogonale (cioè $F \equiv 0$) allora i simboli di Christoffel hanno un'espressione particolarmente

semplice:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x_1}, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x_2}, & \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial x_1}, \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial x_2}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_1}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_2}; \end{cases} \quad (9)$$

- per ogni foglio semplice sono soddisfatte le seguenti equazioni di Codazzi-Mainardi:

$$\sum_{q=1}^2 (\Gamma_{jk}^q h_{iq} - \Gamma_{ik}^q h_{jq}) = \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i}. \quad (10)$$

- per il teorema Egregium di Gauss abbiamo che

$$K = \frac{1}{G} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} + \sum_{q=1}^2 (\Gamma_{22}^q \Gamma_{1q}^1 - \Gamma_{12}^q \Gamma_{2q}^1) \right]. \quad (11)$$

Sostituendo Γ_{ij}^q della (9) otteniamo

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{G} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{4E^2} \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{\partial E}{\partial x_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4EG} \frac{\partial G}{\partial x_2} \frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{1}{4E^2} \left(\frac{\partial E}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{4EG} \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4E^2 G^2} \left(E \frac{\partial G}{\partial x_2} + G \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) \frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{1}{2EG} \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} + \\ &\quad + \frac{1}{4E^2 G^2} \left(G \frac{\partial E}{\partial x_1} + E \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \frac{\partial G}{\partial x_1} - \frac{1}{2EG} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Capitolo 1

Superfici differenziabili in \mathbb{E}^3

1.1 Definizione di superficie

La definizione di superficie differenziabile presenta, in generale, alcune differenze in base al contesto in cui si vuole considerarla. E' quindi opportuno iniziare questa trattazione dichiarando quale sarà quella da noi adattata. In generale si presentano quasi sempre due strade alternative: possiamo definire le superfici come sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 che godono di certe proprietà, o come applicazioni da un aperto di \mathbb{R}^2 a valori in \mathbb{R}^3 con opportune proprietà di regolarità. Questa seconda strada è utile per uno studio delle questioni locali (che però non sarà il nostro oggetto di studio). Poichè invece siamo interessati alle proprietà globali seguiremo l'altra strada. Ciò nonostante è necessario comunque iniziare con una definizione preliminare che generalizza il concetto di curva regolare:

Definizione 1.1.1. *Una superficie immersa (o parametrizzata) nello spazio è un'applicazione $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto qualsiasi, tale che il differenziale $d\varphi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia iniettivo (cioè abbia rango 2) in ogni punto $x \in U$. L'immagine $\varphi(U)$ di φ è il sostegno, o supporto, della superficie immersa.*

Osserviamo che se U è omeomorfo a un disco aperto e φ è iniettiva allora φ è un foglio semplice.

Osservazione 1.1.1. Il differenziale $d\varphi_x$ di $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ in $x = (x_1, x_2) \in U$ è rappresentato dalla matrice Jacobiana

$$Jac(\varphi(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}).$$

La definizione di superficie che storicamente si è imposta come quella più efficace, sia per trattare tematiche locali sia per studiare problemi globali, dà enfasi al sostegno, cioè al sottoinsieme di \mathbb{R}^3 considerato come tale, tuttavia le superfici immerse sono lo strumento tramite il quale si concretizza e formalizza l'idea che una superficie dev'essere un insieme localmente fatto come un aperto del piano.

Definizione 1.1.2. *Un sottoinsieme connesso $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie (regolare) nello spazio se per ogni $p \in S$ esiste un'applicazione $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, tale che (Fig. 1.1):*

1. $\varphi(U) \subseteq S$ sia un intorno aperto di p in S (ovvero, equivalentemente, esiste un intorno aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di p in \mathbb{R}^3 tale che $\varphi(U) = W \cap S$);
2. φ sia un omeomorfismo con l'immagine;
3. il differenziale $d\varphi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia iniettivo (cioè abbia rango massimo, uguale a 2) per ogni $x \in U$.

Diremo che una superficie S è chiusa se e solo se è chiusa nella topologia di \mathbb{E}^3 .

Ogni applicazione φ che soddisfi (1)-(3) è detta *parametrizzazione locale* (o *regolare*) in p ; se $O \in U$ e $\varphi(O) = p$ diremo che la parametrizzazione locale è *centrata* in p ; l'intorno $\varphi(U)$ di p in S è detto *intorno coordinato*. Richiedere che φ sia di classe C^∞ è naturale se pensiamo che vogliamo fare della geometria differenziale su S . L' iniettività della condizione (2) garantisce il fatto che la superficie non si autointersechi mai. Questo è necessario se vogliamo parlare di piano tangente ad ogni punto $p \in S$ (Fig. 1.2(a)). La continuità dell'inversa è necessaria per provare che certi oggetti definiti in termini di parametrizzazione non dipendono da questa parametrizzazione

ma solo dall'insieme S . Infine la condizione (3) garantisce l'esistenza di un piano tangente in ogni punto di S . Nella Fig. 1.2(b) si vede un tipico caso in cui ciò non succede.

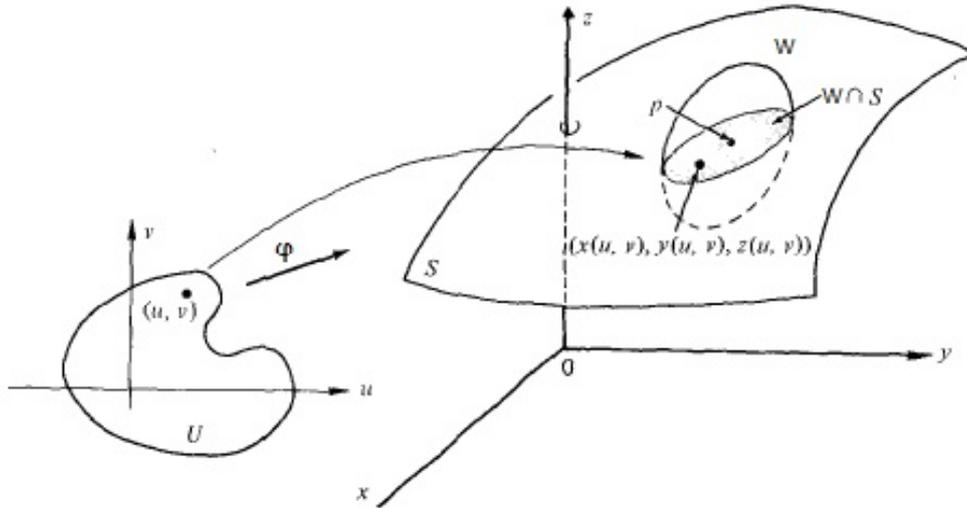


Figura 1.1:

Osservazione 1.1.2. Una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di una superficie S trasporta la topologia dell'aperto U del piano nella topologia dell'aperto $\varphi(U)$ di S , in quanto φ è un omeomorfismo fra U e $\varphi(U)$. Ma φ trasporta un'altra cosa fondamentale da U a S : un sistema di coordinate. La parametrizzazione locale φ permette di associare a ogni punto $p \in \varphi(U)$ una coppia di numeri reali $(x_1, x_2) = \varphi^{-1}(p) \in U$, che svolgeranno il ruolo di coordinate di p in S analogo al ruolo svolto dalle usuali coordinate cartesiane per i punti del piano.

La filosofia che regola lo studio delle superfici è usare le parametrizzazioni locali per trasferire concetti, proprietà e dimostrazioni dagli aperti del piano ad aperti delle superfici, e viceversa. Vediamo ora alcuni esempi di superfici:

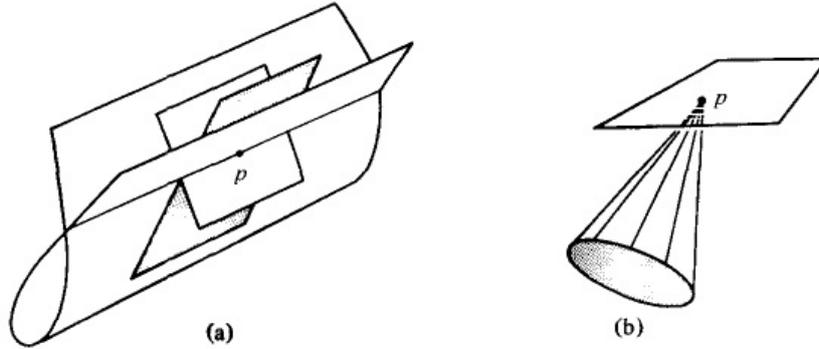


Figura 1.2:

Esempio 1.1.1

Il piano $S \subset \mathbb{R}^3$ passante per $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e parallelo ai vettori linearmente indipendenti $v, w \in \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare dove $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è data da $\varphi(x_1, x_2) = p_0 + x_1v + x_2w$.

Esempio 1.1.2

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ qualsiasi di classe $C^\infty(U)$. Allora il grafico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in U\}$ di f è una superficie regolare dove $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è data da $\varphi(x) = (x, f(x))$. Infatti la condizione (1) della definizione di superficie è chiaramente soddisfatta. La restrizione a Γ_f della proiezione delle prime due coordinate è l'inversa (continua) di φ , per cui anche la condizione (2) è soddisfatta. Infine,

$$Jac\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

ha rango 2 in ogni punto.

Esempio 1.1.3

Vogliamo dimostrare che la sfera

$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$$

di centro l'origine e raggio 1 è una superficie regolare.

Sia $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ il disco unitario aperto nel piano, e definiamo $\varphi_1, \dots, \varphi_6 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) & \varphi_2(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}), \\ \varphi_3(x_1, x_2) &= (x_1, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_2) & \varphi_4(x_1, x_2) &= (x_1, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_2), \\ \varphi_5(x_1, x_2) &= (\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_1, x_2) & \varphi_6(x_1, x_2) &= (-\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Ragionando come nell'esempio 1.1.2 è facile vedere come le φ_j sono tutte parametrizzazioni locali di S^2 , e che $S^2 = \varphi_1(U) \cup \dots \cup \varphi_6(U)$ (Fig. 1.3), per cui $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ è un atlante di S^2 , dove per atlante intendiamo

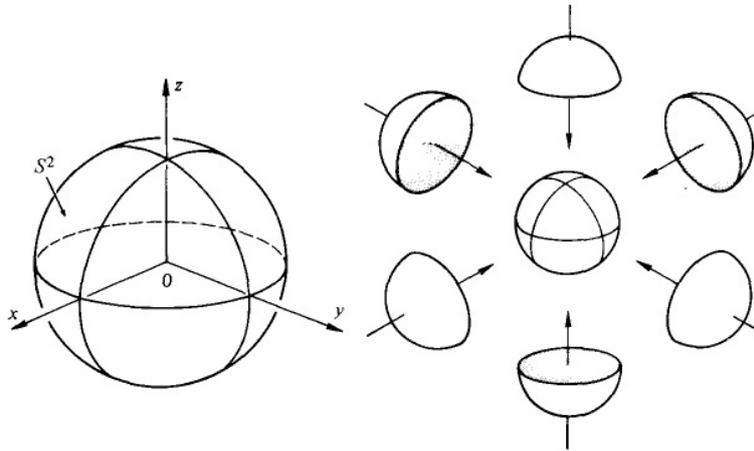


Figura 1.3:

Definizione 1.1.3. Un atlante di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è una famiglia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ di parametrizzazioni $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ tali che $S = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Osserviamo che omettendo anche una sola di queste parametrizzazioni locali non si copre tutta la sfera.

Esempio 1.1.4

Se C è la circonferenza di centro $(x_0, 0, z_0)$ e raggio $0 < r_0 < |x_0|$ nel piano xz , allora ciò che si ottiene ruotando C rispetto all'asse z è il sostegno di una superficie immersa $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(t, \theta) = ((r \cos t + x_0) \cos \theta, (r \cos t + x_0) \sin \theta, r \sin t + z_0);$$

tale superficie è chiamata toro.

E' importante osservare che in generale le superfici immerse non sono omeomorfismi con l'immagine:

Esempio 1.1.5

Posto $U = (-1, +\infty) \times \mathbb{R}^3$, sia $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{3x_1}{1+x_1^3}, \frac{3x_1^2}{1+x_1^3}, x_2 \right).$$

Allora φ è una superficie immersa iniettiva, ma non è un omeomorfismo con l'immagine in quanto $\varphi((-1, 1) \times (-1, 1))$ non è un aperto in $\varphi(U)$ (Fig. 1.4).



Figura 1.4:

Gli esempi di superficie regolare fino ad ora presentati sono tutti insiemi di \mathbb{R}^3 formati da un'unica componente connessa. Prima di mostrare un esempio di insieme di \mathbb{R}^3 che non è una superficie regolare secondo la Definizione 1.1.2 (perchè non connessa), ma è formata da due componenti connesse (ciascuna delle quali è una superficie), enunciamo il seguente risultato utile per la costruzione di superfici:

Proposizione 1.1.1. *Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile e $a \in f(U)$ è un punto regolare di f (cioè un punto in cui df è suriettivo), allora ogni componente connessa dell'insieme di livello $f^{-1}(a) = \{p \in U \mid f(p) = a\}$ è una superficie regolare in \mathbb{R}^3 .*

Dimostrazione. Sia $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$. Essendo a un punto regolare di f , il gradiente di f non si annulla in p_0 per cui, a meno di permutare le coordinate, possiamo supporre che $\partial f / \partial z(p_0) \neq 0$. Sia allora $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. Il differenziale di F in p_0 è dato da

$$dF(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial f / \partial x(p_0) & \partial f / \partial y(p_0) & \partial f / \partial z(p_0) \end{pmatrix},$$

quindi

$$\det JacF(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0.$$

Possiamo quindi applicare il teorema della funzione inversa e trovare intorno $\tilde{V} \subseteq V$ di p_0 e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di $F(p_0)$ tali che $F|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow W$ sia un diffeomorfismo. Posto $G = (g_1, g_2, g_3) = F^{-1}$ abbiamo

$$(u, v, w) = F \circ G(u, v, w) = (g_1(u, v, w), g_2(u, v, w), f(G(u, v, w)))$$

per cui $g_1(u, v, w) \equiv u$, $g_2(u, v, w) \equiv v$, e

$$\forall (u, v, w) \in W \quad f(G(u, v, w)) \equiv w. \quad (1.1)$$

L'insieme $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v, a) \in W\}$ è un aperto di \mathbb{R}^2 e possiamo definire $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\varphi(u, v) = G(u, v, a)$. La (1.1) ci dice che $\varphi(U) = f^{-1}(a) \cap \tilde{V}$; per quello che abbiamo visto nell'Esempio 1.1.2, $f^{-1}(a) \cap \tilde{V}$ è un intorno coordinato di p_0 . Quindi ogni punto $p \in f^{-1}(a)$ può essere coperto da un intorno coordinato, perciò $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare. \square

Esempio 1.1.6

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$. Ogni componente connessa dell'insieme $S = f^{-1}(0)$, per la proposizione precedente, è una superficie regolare. Essa prende il nome di iperboloidi a due falde (o ellittico). S non è una superficie connessa, infatti presi due punti distinti tali che uno abbia $z > 0$ e l'altro $z < 0$, non esiste una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ contenuta in S che li colleghi; se esistesse avremmo che z cambia segno e quindi esisterebbe un punto t_0 in cui $z(t_0) = 0$, ma $\alpha(t_0) \notin S$.

D'ora in poi col nome “superficie” intenderemo sempre una superficie di \mathbb{R}^3 secondo la Definizione 1.1.2.

Concludiamo questo capitolo con un risultato generale, del quale però omettiamo la dimostrazione:

Proposizione 1.1.2. ¹ *Ogni superficie regolare è localmente un grafico. In altre parole, se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare e $p \in S$, allora esiste una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$ in p che ha una delle seguenti tre forme:*

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1, x_2, f(x_1, x_2)), & \text{oppure} \\ (x_1, f(x_1, x_2), x_2), & \text{oppure} \\ (f(x_1, x_2), x_1, x_2), \end{cases}$$

per un'opportuna $f \in C^\infty(U)$. In particolare, esiste sempre un intorno aperto di p , $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ di S , tale che S sia chiusa in Ω .

Vale anche il viceversa di questo risultato: ogni insieme che è localmente un grafico è una superficie regolare.

Esempio 1.1.7

Il cono a una falda $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ non è una superficie regolare. Se lo fosse, dovrebbe essere il grafico di una funzione C^∞ nell'intorno di $(0, 0, 0)$. Siccome le proiezioni sul piano xz e yz non sono iniettive, dovrebbe essere un grafico sul piano xy ; ma allora dovrebbe essere il grafico della funzione $\sqrt{x^2 + y^2}$, che non è di classe C^∞ .

¹Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 130

1.2 Piano tangente

In questo paragrafo vogliamo definire il concetto di vettore tangente a una superficie in un punto. Il modo geometricamente più semplice è il seguente:

Definizione 1.2.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ un insieme e $p \in S$. Un vettore tangente a S in p è un vettore della forma $\sigma'(0)$, dove $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^∞ con sostegno contenuto in S e tale che $\sigma(0) = p$. L'insieme di tutti i possibili vettori tangenti a S in p è il cono tangente $T_p S$ a S in p .*

Se S è una superficie, però, l'intuizione geometrica ci suggerisce che $T_p S$ dovrebbe essere un piano, e non semplicemente un cono. Per ottenere questo risultato dobbiamo sfruttare a fondo la definizione di superficie cioè usare le parametrizzazioni locali. Seguendo la filosofia che le parametrizzazioni locali ci permettono di trasportare nozioni dagli aperti del piano alle superfici otteniamo allora la seguente:

Proposizione 1.2.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$ e $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale in p con $\varphi(x_0) = p$. Allora $d\varphi_{x_0}$ è un isomorfismo fra \mathbb{R}^2 e $T_p S$. In particolare, $T_p S = d\varphi(\mathbb{R}^2)$ è sempre uno spazio vettoriale di dimensione 2, e $d\varphi(\mathbb{R}^2)$ non dipende da φ ma solo da S e p .*

Dimostrazione. Dato $v \in \mathbb{R}^2$, possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che $x_0 + tv \in U$ per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$; quindi la curva $\sigma_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ data da $\sigma_v(t) = \varphi(x_0 + tv)$ è ben definita. Siccome $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma_v'(0) = d\varphi_{x_0}(v)$, segue che $d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2) \subseteq T_p S$.

Viceversa, sia $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una curva con $\sigma(0) = p$; a meno di diminuire ϵ possiamo supporre che il sostegno di σ sia contenuto in $\varphi(U)$. La composizione $\sigma_0 = \varphi^{-1} \circ \sigma$ è una curva di classe C^∞ in U tale che $\sigma_0(0) = x_0$; poniamo $v = \sigma_0'(0) \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$d\varphi_{x_0}(v) = \frac{d(\varphi \circ \sigma_0)}{dt}(0) = \sigma'(0),$$

per cui $T_p S \subseteq d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$. Quindi $d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2) \rightarrow T_p S$ è suriettivo; essendo anche iniettivo è un isomorfismo fra \mathbb{R}^2 e $T_p S$. \square

Definizione 1.2.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Lo spazio vettoriale $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ è detto piano tangente a S in p .*

Osservazione 1.2.1. Il piano tangente così definito è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 e quindi passa per l'origine indipendentemente da quale sia il punto $p \in S$. Quando si disegna il piano tangente come un piano appoggiato alla superficie, non si sta disegnando T_pS ma il suo traslato $p + T_pS$, che è il *piano tangente affine* passante per p .

L'isomorfismo fra \mathbb{R}^2 e T_pS fornito dalle parametrizzazioni locali ci permette di introdurre particolari basi del piano tangente:

Definizione 1.2.3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Se $\varphi : U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale centrata in p , $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^2 e $O = \varphi^{-1}(p)$ allora definiamo i vettori tangenti $\partial/\partial x_1|_p, \partial/\partial x_2|_p \in T_pS$ ponendo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = d\varphi_O(\mathbf{e}_j) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(O) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(O) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}(O) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_j}(O) \end{pmatrix}.$$

Scriveremo spesso $\partial_j|_p$ invece di $\partial/\partial x_j|_p$. Chiaramente $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}$ è una base di T_pS , la base *indotta* dalla parametrizzazione locale φ . Osserviamo che $\partial_1|_p$ e $\partial_2|_p$ non sono altro che le due colonne della matrice Jacobiana di φ calcolata in $O = \varphi^{-1}(p)$.

1.3 Orientabilità

Un concetto importante in teoria delle superfici è quello di orientabilità. Detto in parole povere, una superficie è orientabile se ha due facce, una interna e una esterna, come la sfera; una superficie non è orientabile se invece, come il nastro di Möebius (vedi Esempio 1.3.3), ha una sola faccia e non ha un interno e un esterno ben definiti. Ci sono (almeno) due modi per definire precisamente il concetto di orientabilità: uno intrinseco e l'altro legato all'immersione della superficie in \mathbb{R}^3 . Per definire il primo cominciamo col ricordare che orientare un piano equivale a scegliere una base orientata (cioè a fissare un verso di rotazione preferito per gli angoli); due basi determinano la stessa orientazione se e solo se la matrice di cambiamento di base ha determinante positivo. L'idea allora è che una superficie è orientabile se

possiamo orientare in maniera coerente tutti i piani tangenti alla superficie. Localmente non è un problema: scegliamo una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$ e orientiamo ciascun piano tangente in un punto p del sostegno prendendo come orientazione quella data dalla base $\{\partial_1, \partial_2\}$ (ordinata) indotta dalla parametrizzazione. Poichè i vettori ∂_1 e ∂_2 variano in modo C^∞ , possiamo dire di aver orientato in maniera coerente tutti i piani tangenti nel sostegno della parametrizzazione. Un'altra parametrizzazione induce la stessa orientazione se e solo se la matrice di cambiamento di base (cioè la matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate) ha determinante positivo. Quindi ha senso la seguente

Definizione 1.3.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Diremo che due parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ e $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow S$ determinano la stessa orientazione (o sono equiorientate) se $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = \emptyset$ oppure $\det Jac(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) > 0$ ove definito, cioè su $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$. Se invece $\det Jac(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) < 0$ ove definito diremo che le due parametrizzazioni locali determinano l'orientazione opposta. La superficie S è detta orientabile se esiste un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ di S composto da carte a due a due equiorientate (e diremo che l'atlante è orientato). Se fissiamo un tale atlante \mathcal{A} diremo che la superficie S è orientata dall'atlante \mathcal{A} .*

Osservazione 1.3.1. Possono esistere coppie di parametrizzazioni locali che non determinano nè la stessa orientazione nè quella opposta. Per esempio può succedere che $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ abbia due componenti connesse con $\det Jac(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ positivo su una e negativo sull'altra; un esempio di ciò è il nastro di Möebius.

Quindi una superficie S è orientabile se e solo se possiamo orientare contemporaneamente tutti i suoi piani tangenti in maniera coerente.

Esempio 1.3.1

Una superficie che possiede un atlante costituito da una sola parametrizzazione locale è orientabile. Per esempio i grafici sono tutti orientabili.

Esempio 1.3.2

Se una superficie ha un atlante costituito da due parametrizzazioni locali

le cui immagini abbiano intersezione connessa, allora è orientabile. Infatti il determinante dello jacobiano del cambiamento di coordinate deve avere segno costante sull'intersezione, e quindi a meno di scambiare le coordinate del dominio di una parametrizzazione (operazione che cambia il segno del determinante dello jacobiano del cambiamento di coordinate), possiamo fare in modo che le due parametrizzazioni determinino la stessa orientazione. Un esempio è la sfera.

Osservazione 1.3.2. L'orientabilità è una proprietà globale: non possiamo verificare se una superficie è orientabile controllando solo cosa succede su una parametrizzazione locale alla volta. L'immagine di una singola parametrizzazione locale è sempre orientabile; i problemi nascono da come si collegano fra di loro le varie parametrizzazioni locali.

La definizione appena data è puramente intrinseca, non dipende dal modo in cui la superficie è immersa in \mathbb{R}^3 . La seconda definizione di orientazione sarà invece estrinseca: dipenderà strettamente dal fatto che una superficie è contenuta in \mathbb{R}^3 . Così come per le curve di Jordan nel piano il versore normale permette di distinguere l'interno della curva dall'esterno, così per le superfici è naturale tentare di introdurre i concetti di interno e esterno di una superficie usando i versori normali:

Definizione 1.3.2. *Un campo di vettori normali su una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è un'applicazione $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $N(p)$ sia ortogonale a $T_p S$ per ogni $p \in S$. Se inoltre $\|N\| \equiv 1$ diremo che N è un campo di versori normali a S .*

Osservazione 1.3.3. Su ogni parametrizzazione locale esiste un tale campo.

Se N è un campo di versori normali su una superficie S , possiamo intuitivamente dire che N indica la faccia esterna della superficie, mentre $-N$ la faccia interna. Ma, contrariamente a quanto accadeva per le curve, non ogni superficie ha un campo di versori normali:

Proposizione 1.3.1. *Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se esiste un campo di versori normali su S .*

Dimostrazione. Cominciamo con un'osservazione generale. Sia $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie S , e per ogni punto $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ poniamo

$$N_\alpha(p) = \frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|}(p),$$

dove $\partial_{j,\alpha} = \partial\varphi_\alpha/\partial x_j$. Poichè $\{\partial_{1,\alpha}, \partial_{2,\alpha}\}$ è una base di $T_p S$ il versore $N_\alpha(p)$ è ben definito, non nullo e ortogonale a $T_p S$; inoltre dipende in modo C^∞ da p . Infine, se $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow S$ è un'altra parametrizzazione locale con $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, allora

$$N_\alpha = \text{sgn}(\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)) N_\beta. \quad (1.2)$$

Supponiamo ora S orientabile, e sia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ un atlante orientato. Se $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$, con $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{A}$, la (1.2) ci dice che $N_\alpha(p) = N_\beta(p)$; quindi l'applicazione $p \mapsto N_\alpha(p)$ non dipende dalla particolare parametrizzazione locale scelta, e definisce un campo di versori normali su S .

Viceversa, sia $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di versori normali su S , e sia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ un qualsiasi atlante di S tale che il dominio U_α di ciascun φ_α sia connesso. Per definizione di prodotto vettore $N_\alpha(p)$ è ortogonale a $T_p S$ per ogni $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ e $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$; quindi $\langle N, N_\alpha \rangle \equiv \pm 1$ su ciascun U_α . Essendo U_α connesso, a meno di modificare φ_α scambiando le coordinate di U_α , possiamo supporre che tutti questi prodotti scalari siano identicamente uguali a 1. Ma allora

$$N_\alpha \equiv N$$

su ciascun U_α e la (1.2) implica che l'atlante è orientato. \square

Una conseguenza della proposizione precedente è che se S è una superficie orientata esiste sempre un unico campo di versori normali che determina l'orientazione data.

Definizione 1.3.3. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata. La mappa di Gauss di S è il campo di versori normali $N : S \rightarrow S^2$ che identifica l'orientazione data.*

L'esempio più famoso di superficie non orientabile² è il nastro di Möebius:

²Per la dimostrazione si veda Goetz [1970], pag. 122

Capitolo 2

Superfici differenziabili con curvatura Gaussiana costante

2.1 Superfici chiuse di curvatura Gaussiana costante positiva

Teorema di classificazione

Obiettivo di questo paragrafo è dimostrare che le uniche superfici compatte di curvatura Gaussiana costante sono le sfere (Teorema di Liebmann). Iniziamo con l'osservare che valgono questi due importanti risultati:

Lemma 2.1.1. *Una superficie S orientata composta solo da punti umbilici è necessariamente contenuta in una sfera o in un piano.*

Dimostrazione. L'ipotesi è che esista una funzione $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ tale che si abbia $dN_p(v) = \lambda(p)v$ per ogni $v \in T_pS$ e $p \in S$, dove $N : S \rightarrow S^2$ è la mappa di Gauss di S . In particolare, se φ è una parametrizzazione locale abbiamo

$$\frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_1} = dN(\partial_1) = (\lambda \circ \varphi)\partial_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_2} = dN(\partial_2) = (\lambda \circ \varphi)\partial_2.$$

Derivando un'altra volta otteniamo

$$\frac{\partial^2(N \circ \varphi)}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x_2} \partial_1 + (\lambda \circ \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1},$$

$$\frac{\partial^2(N \circ \varphi)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x_1} \partial_2 + (\lambda \circ \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2},$$

e quindi

$$\frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x_2} \partial_1 - \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x_1} \partial_2 \equiv 0.$$

Ma ∂_1 e ∂_2 sono indipendenti, per cui

$$\frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial x_1} \equiv 0,$$

cioè $\lambda \circ \varphi$ è costante.

Abbiamo quindi dimostrato che λ è localmente costante: essendo S connessa, λ è costante su tutta S . Infatti, scelto $p_0 \in S$ consideriamo l'insieme $R = \{p \in S \mid \lambda(p) = \lambda(p_0)\}$. Questo insieme è non vuoto ($p_0 \in R$), è chiuso, perchè λ è continua, ed è aperto, perchè λ è localmente costante; quindi la connessione di S implica $R = S$, cioè λ è globalmente costante.

Se $\lambda \equiv 0$, il differenziale della mappa di Gauss è identicamente nullo, cioè N è identicamente uguale a un vettore $N_0 \in S^2$. Scegliamo $p_0 \in S$, e definiamo $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $h(q) = \langle q - p_0, N_0 \rangle$. Se $\varphi : U \rightarrow S$ è una qualsiasi parametrizzazione locale di S , abbiamo

$$\frac{\partial(h \circ \varphi)}{\partial x_j} = \langle \partial_j, N_0 \rangle \equiv 0$$

per $j = 1, 2$. Ne segue che h è localmente costante, e quindi, per lo stesso ragionamento di prima, costante su tutta S . Siccome $h(p_0) = 0$, otteniamo $h \equiv 0$, che vuol dire esattamente che S è contenuto nel piano passante per p_0 e ortogonale a N_0 .

Se invece $\lambda \equiv \lambda_0 \neq 0$, sia $q : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $q(p) = p - (1/\lambda_0)N(p)$. Allora

$$dq_p = id - \frac{1}{\lambda_0} dN_p = id - \frac{1}{\lambda_0} \lambda_0 id \equiv 0,$$

per cui q è (localmente costante e quindi) costante; indichiamo con q_0 il valore di q , cioè $q \equiv q_0$. Allora $p - q_0 \equiv (1/\lambda_0)N(p)$ e quindi

$$\forall p \in S \quad \|p - q_0\|^2 = \frac{1}{\lambda_0^2},$$

cioè S è contenuta nella sfera di centro q_0 e raggio $1/|\lambda_0|$. □

Lemma 2.1.2. *Ogni superficie compatta $S \subset \mathbb{R}^3$ contiene un aperto di punti ellittici.*

Dimostrazione. Essendo S compatta in particolare S è limitata quindi ha un punto p_0 di massima distanza dall'origine; vogliamo dimostrare che p_0 è ellittico.

Indichiamo con $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera di centro l'origine e raggio $\|p_0\|$. $p_0 \in S_0 \cap S$, e S è contenuta nella palla chiusa di bordo S_0 . In particolare, S è tangente a S_0 in p_0 ; quindi p_0 è ortogonale a $T_{p_0}S$.

Siccome siamo interessati solo a cosa succede in un intorno di p_0 , senza perdita di generalità, possiamo assumere S orientabile, e scegliere una mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ tale che $N(p_0) = p_0/\|p_0\|$. Sia ora $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma(0) = p_0$. La funzione $s \mapsto \|\sigma(s)\|^2$ assume un massimo assoluto per $s = 0$; quindi deve avere derivata seconda non positiva in 0. Definiamo $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$f(s) = \|\sigma(s)\|^2 = \sigma(s) \times \sigma(s).$$

Derivando

$$\begin{aligned} f'(s) &= \sigma'(s) \times \sigma(s) + \sigma(s) \times \sigma'(s) = \\ &= 2\{\sigma'(s) \times \sigma(s)\} \end{aligned}$$

e

$$f''(s) = 2\{\sigma''(s) \times \sigma(s) + \sigma'(s) \times \sigma'(s)\}.$$

Valutando ora in $s = 0$ e ricordando che $N(0) = p_0/\|p_0\| = \sigma(0)/\|\sigma(0)\|$, $\sigma'(0) \times N(0) = 0$ e quindi $\sigma'(0) \times p_0 = 0$ e che $\kappa_n(0) = \sigma''(0) \times N(0)$ otteniamo

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2\{\sigma''(0) \times \sigma(0) + \sigma'(0) \times \sigma'(0)\} = 2\{\sigma''(0) \times p_0 + 1\} = \\ &= 2\{\sigma''(0) \times N(0) \cdot \|p_0\| + 1\}. \end{aligned}$$

Poichè $f''(0) \leq 0$ abbiamo

$$\kappa_n(0) \cdot \|p_0\| \leq -1 \quad \text{cioè} \quad \kappa_n(0) \leq -\frac{1}{\|p_0\|}$$

dove κ_n è la curvatura normale di σ .

Siccome σ era una curva arbitraria, ne segue che tutte le curvature normali di S in p_0 hanno lo stesso segno, e quindi p_0 è ellittico. Infine, dato che la curvatura Gaussiana in p_0 è maggiore di zero, allora essa rimane maggiore di zero in tutto un intorno di p_0 , e quindi S contiene un aperto di punti ellittici. \square

Quindi, grazie al Lemma 2.1.2, possiamo direttamente assumere che ogni superficie compatta con curvatura costante abbia curvatura costante positiva. Per il Lemma 2.1.1 abbiamo che le sfere sono caratterizzate dal fatto che sono composte solo da punti umbilici. Perciò il Lemma 2.1.2 implica in particolare che una superficie compatta non può essere contenuta in un piano; questo suggerisce di tentare di dimostrare che una superficie compatta con curvatura Gaussiana costante è composta solo da punti umbilici. Per arrivarci utilizziamo il seguente criterio per ottenere punti umbilici, originariamente dovuto a Hilbert:

Proposizione 2.1.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata, e $k_1, k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ le corrispondenti curvatures principali, con $k_1 \leq k_2$. Sia $p \in S$ un punto che sia contemporaneamente di minimo locale per k_1 e di massimo locale per k_2 ; supponiamo inoltre che $K(p) > 0$. Allora p è un punto umbilico.*

Dimostrazione. Sia $N : S \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss di S . Senza perdita di generalità possiamo supporre che p sia l'origine $O \in \mathbb{R}^3$, e che $N(p) = \mathbf{e}_3$, il terzo vettore della base canonica. Inoltre, per la Proposizione 1.1.2, la superficie S è un grafico nell'intorno di p ; avendo imposto $N(p) = \mathbf{e}_3$, deve essere un grafico rispetto al piano x_1x_2 , per cui abbiamo una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$ centrata in p della forma $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ per un'opportuna funzione $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(O) = 0$ e $\nabla h(O) = (0, 0)$. Infine, a meno di una rotazione intorno all'asse z , possiamo anche supporre che $\mathbf{e}_j = \partial_j|_p$ sia una direzione principale relativa a $k_j(p)$ per $j = 1, 2$ e che in O la matrice di I_p sia la matrice identica di ordine 2.

Siano ora $\sigma_1, \sigma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ date da $\sigma_1(t) = \varphi(0, t)$ e $\sigma_2(t) = \varphi(t, 0)$, e definiamo le funzioni $l_1, l_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$l_j(t) = Q_{\sigma_j(t)}(\partial_j / \|\partial_j\|),$$

cioè la seconda forma fondamentale valutata in $\partial_j/\|\partial_j\|$ nei punti della curva σ_j per $j = 1, 2$. In altre parole,

$$l_1 = Q_{\sigma_1(t)}(\partial_1/\|\partial_1\|) = \frac{1}{\|\partial_1\|^2} Q(\partial_1) \circ \sigma_1 = (e/E^2) \circ \sigma_1,$$

e con conti analoghi

$$l_2 = (g/G^2) \circ \sigma_2.$$

Le ipotesi su p implicano che per $|t|$ abbastanza piccolo si ha

$$l_1(0) = Q_p(\mathbf{e}_1) = k_1(p) \leq k_1(\sigma_1(t)) \leq Q_{\sigma_1(t)}(\partial_1/\|\partial_1\|) = l_1(t),$$

dove la prima disuguaglianza deriva dal fatto che per ipotesi p è punto di minimo locale per k_1 . Analogamente

$$l_2(0) = Q_p(\mathbf{e}_2) = k_2(p) \geq k_2(\sigma_2(t)) \geq Q_{\sigma_2(t)}(\partial_2/\|\partial_2\|) = l_2(t);$$

quindi 0 è un punto di minimo locale per l_1 e di massimo locale per l_2 . In particolare

$$l_2''(0) \leq 0 \leq l_1''(0).$$

Prima di procedere facciamo alcuni conti preliminari tenendo conto dell'Esempio 1.1.2. Abbiamo

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial h / \partial x_1(x) \end{pmatrix}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial h / \partial x_2(x) \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$E = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p \right\rangle = 1 + \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|^2,$$

$$F = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p \right\rangle = \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2},$$

$$G = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p \right\rangle = 1 + \left| \frac{\partial h}{\partial x_2} \right|^2.$$

La mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ di S è

$$N \circ \varphi = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}} \begin{pmatrix} -\partial h / \partial x_1 \\ -\partial h / \partial x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$e = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2},$$

$$f = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$g = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}.$$

Otteniamo perciò le seguenti espressioni per l_1 e l_2 :

$$l_1(t) = \left(\frac{1}{(1 + |\partial h / \partial x_1|^2) \sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \right) (0, t),$$

$$l_2(t) = \left(\frac{1}{(1 + |\partial h / \partial x_2|^2) \sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \right) (t, 0);$$

in particolare, per $j = 1, 2$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(O) = l_j(0) = k_j(p),$$

poichè $\partial h / \partial x_j(O) = 0$ e $\nabla h(O) = 0$. Inoltre, essendo $\partial_1|_p$ e $\partial_2|_p$ direzioni principali, si deve avere anche $f(p) = 0$, per cui $\partial^2 h / \partial x_1 \partial x_2(O) = 0$.

Calcoliamo $\partial^2 l_1 / \partial x_2^2$. Chiamiamo $z = \frac{1}{(1 + |\partial h / \partial x_1|^2) \sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}} := \frac{1}{a}$.

Allora

$$\frac{\partial l_1}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + z \frac{\partial^3 h}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

e

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial^3 h}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial^3 h}{\partial x_1^2 \partial x_2} + z \frac{\partial^4 h}{\partial x_1^2 \partial x_2^2},$$

dove

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\partial a / \partial x_2}{a^2} = -\frac{1}{a^2} \left[\left(2 \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \sqrt{1 + \|\nabla h\|^2} + \right. \\ \left. + \left(1 + \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|^2 \right) \frac{1}{2} (1 + \|\nabla h\|^2)^{-1/2} 2 \|\nabla h\| \frac{\partial \|\nabla h\|}{\partial x_2} \right].$$

Tenendo conto del sistema di riferimento scelto si ha:

$$a(O) = 1;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial x_2}(O) &= 0; \\ z(O) &= 1; \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}(O) &= 0.\end{aligned}$$

Ora, poichè $\frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\partial a/\partial x_2}{a^2}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} &= -\left[\frac{(\partial^2 a/\partial x_2^2)a^2 - 2a(\partial a/\partial x_2)(\partial a/\partial x_2)}{a^4}\right] = \\ &= -\left[\frac{(\partial^2 a/\partial x_2^2)a^2 - 2a(\partial a/\partial x_2)^2}{a^4}\right]. \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(O) &= -\frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2}(O).\end{aligned}$$

Poniamo $q = \|\nabla h\|$, perciò $q(O) = 0$.

Dobbiamo derivare $(1 + q^2)^{1/2}$ rispetto a x_2 due volte:

$$\frac{\partial[(1 + q^2)^{1/2}]}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(1 + q^2)^{-1/2}2q\frac{\partial q}{\partial x_2} = (1 + q^2)^{-1/2}q\frac{\partial q}{\partial x_2}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2[(1 + q^2)^{1/2}]}{\partial x_2^2} &= -\frac{1}{2}(1 + q^2)^{-3/2}2q\frac{\partial q}{\partial x_2}q\frac{\partial q}{\partial x_2} + \\ &+ (1 + q^2)^{-1/2}\frac{\partial q}{\partial x_2}\frac{\partial q}{\partial x_2} + (1 + q^2)^{-1/2}q\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2}\end{aligned}$$

Poichè $q(O) = 0$, se valutiamo in O otteniamo solo $\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2}(O) = \left(\frac{\partial q}{\partial x_2}(O)\right)^2$.

Ricordando che $a = (1 + |\partial h/\partial x_1|^2)\sqrt{1 + q^2}$, e ponendo $p = q^2$ (quindi $p(O) = 0$) otteniamo

$$\frac{\partial a}{\partial x_2} = 2\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\partial x_2}(1 + p)^{1/2} + \left(1 + \left|\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|^2\right)\frac{1}{2}(1 + p)^{-1/2}\frac{\partial p}{\partial x_2}$$

e

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} = \left[2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 + 2\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial^3 h}{\partial x_1\partial x_2^2}\right](1 + p)^{1/2} +$$

$$\begin{aligned}
& +2 \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{1}{2} (1+p)^{-1/2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \\
& + \left(1 + \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|^2 \right) \left(-\frac{1}{4} \right) (1+p)^{-3/2} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^2 + \\
& + \left(1 + \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|^2 \right) \frac{1}{2} (1+p)^{-1/2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \\
& \Rightarrow \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2}(O) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2}(O) \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(O).
\end{aligned}$$

Ma

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 2 \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_2}(O) = 0$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} &= 2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial^3 h}{\partial x_1 \partial x_2^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{\partial^3 h}{\partial x_2^3} \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(O) = 2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(O) \right)^2
\end{aligned}$$

Quindi

$$-\frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2}(O) = - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(O) \right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(O).$$

Alla fine si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l_1}{\partial x_2^2}(O) &= - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(O) \right)^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(O) \right) + \frac{\partial^4 h}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(O) = \\
&= -[k_2(p)]^2 k_1(p) + \frac{\partial^4 h}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(O) = l_1''(0).
\end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l_2}{\partial x_2^2}(O) &= - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(O) \right)^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(O) \right) + \frac{\partial^4 h}{\partial x_2^2 \partial x_1^2}(O) = \\
&= -[k_1(p)]^2 k_2(p) + \frac{\partial^4 h}{\partial x_2^2 \partial x_1^2}(O) = l_2''(0).
\end{aligned}$$

Poichè $l_2''(0) \leq 0 \leq l_1''(0)$ otteniamo:

$$-[k_1(p)]^2 k_2(p) + \frac{\partial^4 h}{\partial x_2^2 \partial x_1^2}(O) \leq 0 \leq -[k_2(p)]^2 k_1(p) + \frac{\partial^4 h}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(O)$$

↓

$$-[k_1(p)]^2 k_2(p) \leq -[k_2(p)]^2 k_1(p)$$

ovvero

$$k_1(p)k_2(p)[k_2(p) - k_1(p)] \leq 0.$$

Siccome sappiamo che $k_1(p)k_2(p) = K(p) > 0$, otteniamo $k_2(p) \leq k_1(p)$. Questo è possibile solo se $k_2(p) = k_1(p)$, e quindi p è un punto umbilico. \square

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema di Liebmann:

Teorema 2.1.1. (Liebmann). *Le sole superfici compatte con curvatura Gaussiana costante sono le sfere.*

Dimostrazione. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compatta con curvatura Gaussiana costante $K \equiv K_0$. Prima di tutto, il Lemma 2.1.2 ci assicura che $K_0 > 0$; quindi S non può essere contenuta in un piano. Inoltre, siccome la curvatura Gaussiana è sempre positiva, il modulo della curvatura media non può mai annullarsi. Si può dimostrare ¹ che data una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ in cui il modulo della curvatura media non si annulla mai è orientabile, quindi possiamo affermare che S è orientabile.

Fissiamo un'orientazione per S , e siano $k_1, k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ le curvature principali di S , con $k_1 \leq k_2$. Siccome k_1 e k_2 sono continue e S è compatta, deve esistere un punto $p \in S$ di massimo per k_2 . Siccome il prodotto $k_1 k_2$ è costante, il punto p deve anche essere punto di minimo per $k_1 = K_0/k_2$. Possiamo allora applicare la Proposizione 2.1.1, e dedurre che p è un punto umbilico, cioè $k_1(p) = k_2(p)$. Ma allora per ogni $q \in S$ abbiamo

$$k_2(p) \geq k_2(q) \geq k_1(q) \geq k_1(p) = k_2(p);$$

quindi $k_1(q) = k_2(q)$ per ogni $q \in S$ cioè tutti i punti di S sono umbilici. Il Lemma 2.1.1 implica allora che S è contenuta in una sfera S_0 ; rimane da dimostrare che $S = S_0$. Essendo S compatta, è chiusa in S_0 . Essendo una superficie, è unione delle immagini di parametrizzazioni locali, e quindi è aperta in S_0 . Ma S_0 è connessa, quindi $S = S_0$. \square

¹Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 216

In questa dimostrazione aver preso $K = k_1 k_2$ costante è servito solo per garantire che k_1 fosse una funzione decrescente di k_2 . La stessa conclusione segue se assumiamo che la curvatura media $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ sia costante. Questo ci permette di affermare che:

Teorema 2.1.2. *Data $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana sempre positiva e curvatura media costante. Allora S è una sfera.*

La dimostrazione è una conseguenza del Teorema di Liebmann. Dal Teorema di Liebmann segue facilmente il fatto che la sfera sia rigida nel senso che: data $\varphi : \Sigma \rightarrow S$ un'isometria da una sfera $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ su una superficie regolare $S = \varphi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$, allora S è una sfera.

Dimostrazione. Essendo φ un'isometria, essa conserva la curvatura Gaussiana. Inoltre $\varphi(\Sigma)$ è compatta; quindi per il Teorema 2.1.2 abbiamo la tesi. \square

Esempio 2.1.1

L'ipotesi di compattezza nel Teorema di Liebmann è essenziale: esistono superfici non chiuse, e quindi non compatte, in \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana costante positiva non contenute nella sfera. Scegliamo una costante $C > 1$ e sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva $\sigma : (-\arcsin(1/C), \arcsin(1/C)) \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma(s) = (C \cos s, 0, \int_0^s \sqrt{1 - C^2 \sin^2 t} dt);$$

si ottengono i seguenti valori per le curvature principali di S :

$$k_1 = \frac{C \cos s}{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 s}} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 s}}{C \cos s};$$

quindi $K = k_1 k_2 \equiv 1$. Inoltre da $C > 1$ segue che S non ha punti umbilici infatti in quei punti avrei:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_2 \\ &\Downarrow \\ \frac{C \cos s}{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 s}} &= \frac{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 s}}{C \cos s} \end{aligned}$$

↓

$$C^2 \cos^2(s) + C^2 \sin^2(s) = 1$$

e quindi

$$C^2 = 1.$$

Quindi per il Lemma 2.1.1 non è contenuta in una sfera. S non è compatta né chiusa in \mathbb{R}^3 dato che il dominio di σ è un insieme aperto (Fig. 2.1).

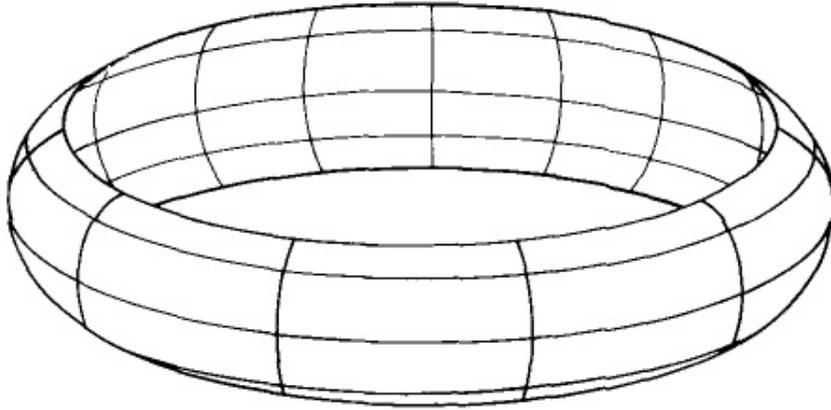


Figura 2.1:

2.2 Superfici di curvatura costante nulla

L'obiettivo di questa sezione è classificare le superfici chiuse in \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana identicamente nulla. I piani e i cilindri hanno questa caratteristica; dimostreremo che non ce ne sono altre: ogni superficie chiusa di \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana identicamente nulla è un piano o un cilindro.

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana identicamente nulla. I punti di S devono essere o parabolici o planari. Indicheremo con $Pl(S) \subseteq S$ l'insieme dei punti planari di S , e con $Pa(S) \subseteq S$ l'insieme dei punti

parabolici di S . Siccome $Pl(S) = \{p \in S \mid |H(p)| = 0\}$, dove $|H|$ è il modulo della curvatura media di S , l'insieme dei punti planari è chiuso in S ; conseguentemente, l'insieme $Pa(S) = S \setminus Pl(S)$ dei punti parabolici è aperto in S .

Il primo obiettivo è far vedere che per ogni punto parabolico di S passa effettivamente una retta. Ricordiamo che una direzione asintotica in $p \in S$ è un $v \in T_p S \setminus \{0\}$ di lunghezza unitaria tale che la seconda forma fondamentale valutata in v sia uguale a zero; chiaramente questo concetto non dipende dall'orientazione locale scelta per definire la seconda forma fondamentale, e quindi è ben definito anche per superfici non orientabili. Sappiamo che, se p è un punto parabolico, esiste un'unica direzione asintotica in p che è anche direzione principale. Dunque possiamo definire un campo vettoriale $X^{Pa} \in \Gamma(Pa(S))$, insieme dei campi vettoriali su $Pa(S)$, tale che $X^{Pa}(p)$ sia la direzione asintotica di S in p . Allora per ogni $p \in Pa(S)$ esiste un'unica curva integrale massimale di X^{Pa} uscente da p ; indicheremo con $R(p) \subset Pa(S)$ il sostegno di questa curva, che è il sostegno dell'unica linea asintotica passante da p . Abbiamo trovato la retta cercata:

Proposizione 2.2.1. *Sia $S \in \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana $K \equiv 0$, e $p \in Pa(S)$. Allora $R(p) \subset Pa(S)$ è l'unico segmento (aperto) di retta passante per p contenuto in S .*

Prima di dimostrare questo enunciato mostriamo l'esistenza di due tipi di parametrizzazioni locali speciali che saranno utili nella dimostrazione:

Lemma 2.2.1. ² *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Allora:*

1. *se p non è un punto umbilico, allora esiste una parametrizzazione locale centrata in p le cui linee coordinate siano linee di curvatura;*
2. *se p è un punto iperbolico, allora esiste una parametrizzazione locale centrata in p le cui linee coordinate siano linee asintotiche.*

Dimostriamo la Proposizione 2.2.1

²Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 279

Dimostrazione. Siccome p non è un punto umbilico, il Lemma precedente ci assicura che esiste una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$ centrata in p le cui linee coordinate siano linee di curvatura; possiamo assumere che $V = \varphi(U) \subseteq Pa(S)$. Inoltre, una delle due curve coordinate passanti per un punto di V dev'essere tangente alla direzione asintotica per quel punto, per cui il suo sostegno è l'intersezione del sostegno della corrispondente linea asintotica massimale con V . Senza perdita di generalità possiamo assumere che le linee coordinate asintotiche siano le curve $\{x_2 = cost\}$.

Sia $N : V \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss indotta da φ . Dato che per costruzione $\{x_2 = cost\}$ è una linea asintotica allora $\partial(N \circ \varphi)/\partial x_1 = dN(\partial_1) \equiv 0$ in V ; in particolare N è costante lungo le curve $\{x_2 = cost\}$. Inoltre poichè $dN/\partial x_1$ abbiamo anche $\partial^2(N \circ \varphi)/\partial x_1 \partial x_2 \equiv 0$ in V ; quindi pure $\partial(N \circ \varphi)/\partial x_2 = dN(\partial_2)$ è costante (e mai nullo, dato che stiamo lavorando nell'insieme dei punti parabolici) lungo le linee $\{x_2 = cost\}$. Poi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \varphi, N \circ \varphi \rangle &= \langle \partial_1, N \circ \varphi \rangle + \left\langle \varphi, \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_1} \right\rangle = \\ &= \langle \partial_1, N \circ \varphi \rangle + \langle \varphi, 0 \rangle \equiv 0, \end{aligned}$$

essendo ∂_1 ortogonale a $N \circ \varphi$. Di conseguenza, la funzione $\langle \varphi, N \circ \varphi \rangle$ è costante lungo le curve $\{x_2 = cost\}$, che vuol dire che ciascuna linea $\{x_2 = cost\}$ è contenuta in un piano ortogonale al valore costante di N lungo quella linea. Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\langle \varphi, \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_2} \right\rangle = \left\langle \partial_1, \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle \varphi, \frac{\partial^2(N \circ \varphi)}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle \equiv 0,$$

in quanto $\partial(N \circ \varphi)/\partial x_2 = dN(\partial_2)$ è un multiplo di ∂_2 e quindi ortogonale a ∂_1 e $\partial^2(N \circ \varphi)/\partial x_1 \partial x_2 = 0$. Quindi anche la funzione $\langle \varphi, \partial(N \circ \varphi)/\partial x_2 \rangle$ è costante lungo le linee $\{x_2 = cost\}$, che vuol dire che ciascuna curva $\{x_2 = cost\}$ è contenuta in un piano ortogonale al valore costante $\partial(N \circ \varphi)/\partial x_2$ lungo quella curva. Quindi ciascuna curva $\{x_2 = cost\}$ è contenuta nell'intersezione di due piani (distinti, in quanto N è sempre ortogonale a $\partial(N \circ \varphi)/\partial x_2$), e quindi è un segmento di retta.

Rimane da vedere l'unicità. Ma questo segmento di retta R passante per p è una linea asintotica; siccome $R(p)$ è l'unica linea asintotica passante per p abbiamo finito. \square

Osservazione 2.2.1. L'ipotesi $K \equiv 0$ della proposizione precedente è essenziale. Per esempio, su un toro esistono circonferenze che sono linee asintotiche formate da punti parabolici e non sono segmenti di rette (Fig. 2.2).

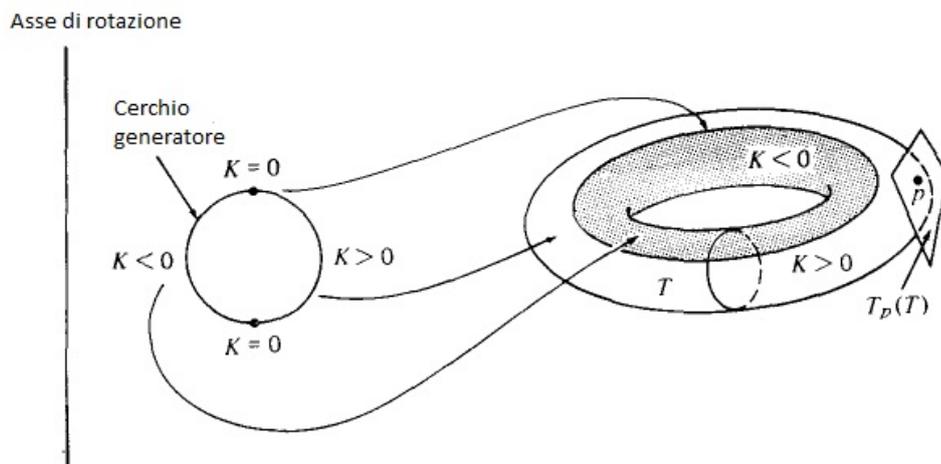


Figura 2.2:

Se S è chiusa in \mathbb{R}^3 allora ciascun $R(p)$ è effettivamente una retta intera. Per dimostrarlo ci servirà sapere che la chiusura di $R(p)$ non interseca l'insieme $Pl(S)$ dei punti planari di S . Per verificare quest'ultima affermazione, utilizzeremo la seguente conseguenza delle equazioni di Codazzi-Mainardi (si veda (10), pag. 10):

Lemma 2.2.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana identicamente nulla, $p \in Pa(S)$, e $\sigma : I \rightarrow Pa(S)$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di $R(p)$. Allora*

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{|H| \circ \sigma} \right) \equiv 0,$$

dove $|H|$ è il modulo della curvatura media di S .

Dimostrazione. Notiamo prima di tutto che $|H|$ non si annulla mai su $Pa(S)$ perciò l'enunciato ha senso.

Sia $\varphi : U \rightarrow S$ la parametrizzazione locale centrata in p già usata nella dimostrazione precedente. In particolare, essendo ∂_1 e ∂_2 direzioni principali abbiamo che $F \equiv f \equiv 0$ in $V = \varphi(U)$. Inoltre, essendo $dN(\partial_1) \equiv 0$ abbiamo anche $e \equiv 0$, e quindi il modulo della curvatura media è dato da $|H| = |g|/2G$. infine, g deve avere segno costante su $R(p)$, in quanto non si annulla mai in $Pa(S)$. Quindi

$$|H| = \pm \frac{g}{2G}$$

in $R(p)$, e siamo ricondotti a calcolare la derivata di $(G/g) \circ \sigma$.

A questo scopo ricorriamo alle equazioni di Codazzi-Mainardi:

$$\sum_{q=1}^2 (\Gamma_{jk}^q h_{iq} - \Gamma_{ik}^q h_{jq}) = \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i}. \quad (2.1)$$

Siccome $F \equiv 0$, i simboli di Christoffel sono dati da

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x_1}, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x_2}, & \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial x_1}, \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial x_2}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_1}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_2}; \end{cases} \quad (2.2)$$

quindi ricordando che $h_{11} = e \equiv 0$, $h_{12} = h_{21} = f \equiv 0$ e $h_{22} = g$, le equazioni di Codazzi-Mainardi si riducono a

$$\frac{g}{2G} \frac{\partial E}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{g}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_1}. \quad (2.3)$$

La prima equazione implica che $\partial E / \partial x_2 \equiv 0$; quindi E dipende solo da x_1 .

Allora la $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\chi(x) = \left(\int_0^{x_1} \sqrt{E(t, x_2)} dt, x_2 \right)$$

è un diffeomorfismo, e la $\hat{\varphi} = \varphi \circ \chi^{-1}$ è ancora una parametrizzazione locale con tutte le proprietà di φ , visto che l'unica cosa che abbiamo fatto è stato cambiare la parametrizzazione delle curve $\{x_2 = cost\}$ in modo da parametrizzarle rispetto alla lunghezza d'arco.

Dunque a meno di cambiare parametrizzazione possiamo supporre anche $E \equiv 1$. In particolare, sostituendo $E \equiv 1$ nell'espressione di K data da ((12) pag. 10) otteniamo

$$0 \equiv K = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial x_1^2};$$

quindi si deve poter scrivere

$$\sqrt{G(x)} = a_1(x_2)x_1 + a_2(x_2) \quad (2.4)$$

per opportune funzioni a_1, a_2 dipendenti solo da x_2 .

Ora, la seconda equazione in (2.3) si può scrivere come

$$\frac{\partial \log |g|}{\partial x_1} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x_1} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial x_1};$$

quindi si ha $g(x) = a_3(x_2)\sqrt{G(x)}$ per un'opportuna funzione a_3 dipendente solo da x_2 . Riassumendo,

$$\pm \frac{1}{2|H|} = \frac{G}{g} = \sqrt{G} \frac{\sqrt{G}}{g} = \frac{a_1(x_2)x_1 + a_2(x_2)}{a_3(x_2)}. \quad (2.5)$$

Ora, in questa parametrizzazione locale la curva σ è esattamente la curva $s \mapsto \varphi(s, 0)$; quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{|H \circ \sigma|} \right) = \pm 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} \frac{G}{g} \Big|_{x_2=0} \equiv 0,$$

come voluto. □

Corollario 2.2.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana identicamente nulla, e $p \in Pa(S)$. Allora $\overline{R(p)} \cap Pl(S) = \emptyset$. In particolare, se S è chiusa in \mathbb{R}^3 allora $R(p)$ è una retta, e inoltre le rette $R(p)$ per p che varia in una componente connessa di $Pa(S)$ sono tutte parallele.*

Dimostrazione. Sia $\sigma : (a, b) \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di $R(p)$. Se $\overline{R(p)} \cap Pl(S)$ fosse non vuoto, a meno di cambiare l'orientamento di σ avremmo $\lim_{s \rightarrow b} \sigma(s) = q_0 \in Pl(S)$. Ora, il lemma precedente ci dice che esistono costanti $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$|H(\sigma(s))| = \frac{1}{a_1 s + a_2}; \quad (2.6)$$

quindi essendo il modulo della curvatura media nullo in tutti i punti planari, dovremmo avere

$$0 = |H(q_0)| = \lim_{s \rightarrow b} |H(\sigma(s))| = \lim_{s \rightarrow b} \frac{1}{a_1 s + a_2} = \frac{1}{a_1 b + a_2} \neq 0,$$

contraddizione.

Abbiamo quindi dimostrato che $\overline{R(p)} \cap Pl(S) = \emptyset$. Siccome $R(p)$, in quanto sostegno di una curva integrale, è chiuso in $Pa(S)$, dev'essere chiuso in S . Se S è chiusa in \mathbb{R}^3 , ne segue che $R(p)$ è chiuso in \mathbb{R}^3 , e quindi deve essere una retta intera.

Dobbiamo infine dimostrare che le rette $R(p)$, per p che varia in una componente connessa di $Pa(S)$, sono tutte parallele. Dato $p \in Pa(S)$, sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di $R(p)$. $|H(\sigma(s))|$ è definita (e mai nulla) per tutti i valori di s ; ma (2.6) ci dice che questo è possibile solo se $|H| \circ \sigma$ è costante.

Sia allora $\varphi : U \rightarrow S$ la parametrizzazione locale centrata in p costruita nella dimostrazione del lemma precedente. Il fatto che $|H| \circ \sigma$ sia costante si traduce nel richiedere che $|H| \circ \varphi$ non dipenda da x_1 e quindi, ricordando la (2.4) e (2.5), nel richiedere che G non dipenda da x_1 . In particolare, $\partial G / \partial x_1 \equiv 0$, $E \equiv 1$ e $F \equiv e \equiv f \equiv 0$. Ma dal fatto che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma_{ij}^1 \partial_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 + h_{ij} N$$

e dalla (2.2) segue che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \Gamma_{11}^1 \partial_1 + \Gamma_{11}^2 \partial_2 + e N \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \Gamma_{21}^1 \partial_1 + \Gamma_{21}^2 \partial_2 + f N \equiv 0;$$

ma questo vuol dire che $\partial_1 = \partial \varphi / \partial x_1$, cioè la direzione tangente alle rette $R(q)$ per $q \in \varphi(U)$, è costante, per cui tutte le $R(q)$ sono parallele.

Abbiamo quindi dimostrato che tutte le rette $R(q)$ per q che varia in un intorno di p sono parallele; quindi l'insieme dei punti $q \in Pa(S)$ tali che $R(q)$ è parallelo a una retta data è aperto, quindi abbiamo la tesi. \square

Dunque se S è chiusa in \mathbb{R}^3 l'insieme dei punti parabolici è unione disgiunta di rette; vediamo ora cosa succede per $\partial_S Pa(S)$, il bordo in S dell'insieme dei punti parabolici. Ci servirà il seguente

Lemma 2.2.3. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana identicamente nulla, e prendiamo $p \in \partial_S Pa(S)$. Supponiamo di avere una successione $\{q_n\} \subset Pa(S)$ convergente a p tale che i segmenti $R(q_n)$ convergano a un segmento $C \subset S$ passante per p di lunghezza positiva. Allora C è l'unico segmento passante per p contenuto in S .*

Dimostrazione. Supponiamo esista un altro segmento $C' \subset S$ passante per p . Allora per n abbastanza grande il segmento $R(q_n)$ deve intersecare (ed essere distinto da) C' . Ma un segmento ha sempre curvatura normale zero, per cui è sempre una linea asintotica; quindi il punto $q \in C' \cap R(q_n)$ dovrebbe contemporaneamente essere parabolico e avere direzioni asintotiche distinte, impossibile. \square

Allora:

Proposizione 2.2.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana identicamente nulla. Allora per ogni punto $p \in \partial_S Pa(S)$ passa un unico segmento aperto di retta $C(p) \subset S$. Inoltre, $C(p) \subset \partial_S Pa(S)$, e, se S è chiusa in \mathbb{R}^3 , allora $C(p)$ è una retta.*

Dimostrazione. Dato $p \in \partial_S Pa(S)$, vogliamo far vedere che se $q \in Pa(S)$ tende a p allora il segmento $R(q)$ converge a un segmento $C(p)$ passante per p contenuto in S . Prima di tutto osserviamo che

$$\lim_{\substack{q \rightarrow p \\ q \in Pa(S)}} \inf |R(q)| > 0, \quad (2.7)$$

dove $|R(q)|$ è la lunghezza del segmento $R(q)$, in quanto p sarebbe un punto di accumulazione di estremi di segmenti $R(q)$ che non appartengono a S (per il Corollario 2.2.1), contro il fatto che p è interno a S . Facciamo ora vedere che la direzione asintotica in $q \in Pa(S)$ ammette limite per q tendente a p . Se non fosse così, potremmo trovare due successioni $\{q_n\}$ e $\{q'_n\}$ tendenti a p tali che i corrispondenti segmenti $R(q_n)$ e $R(q'_n)$ convergono a segmenti C e C' distinti passanti per p , entrambi di lunghezza positiva grazie a (2.7), e questo contraddirebbe il Lemma 2.2.3.

Dunque i segmenti $R(q)$ convergono a un segmento $C(p)$ contenuto in S di lunghezza positiva, che è unico per il Lemma 2.2.3, ed è un segmento aperto in quanto altrimenti i suoi estremi (in S) sarebbero limite di punti non in S , impossibile. Vogliamo dimostrare ora che $C(p) \subset \partial_S Pa(S)$. Chiaramente, $C(p) \subset \overline{Pa(S)} = Pa(S) \cup \partial_S Pa(S)$. Se esistesse $q \in Pa(S) \cap C(p)$, allora $C(p) \cap Pa(S)$ dovrebbe essere contenuto (in quanto limite di linee asintotiche) in $R(q)$; ma allora $\overline{R(q)} \cap Pl(S) \neq \emptyset$, di nuovo contro il Corollario 2.2.1.

Infine, se S è chiusa in \mathbb{R}^3 , essendo $C(p)$ chiuso in $\partial_S Pa(S)$, ne segue che $C(p)$ è chiuso in \mathbb{R}^3 , e quindi è una retta. \square

Quindi $Pa(S) \cup \partial_S Pa(S)$ è unione disgiunta di segmenti (di rette quando S è chiusa). A questo punto siamo in grado di dimostrare il Teorema di Hartman-Nirenberg:

Teorema 2.2.1. (Hartman-Nirenberg). *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa con curvatura Gaussiana identicamente nulla. Allora S è un piano o un cilindro.*

Dimostrazione. Supponiamo che S non sia un piano. Allora il Lemma 2.1.1 ci assicura che S contiene punti parabolici. Quanto dimostrato finora implica che $Pa(S) \cup \partial_S Pa(S)$ è unione disgiunta di rette. Ora, le componenti connesse di $Pl(S) \setminus \partial_S Pa(S)$ sono aperti composti da punti planari, per cui (Lemma 2.1.1) sono pezzi di piano, con bordo composto da rette, in quanto contenuto in $\partial_S Pa(S)$. Queste rette devono essere parallele, perchè altrimenti si intersecherebbero, contro il fatto che per ciascun punto di $\partial_S Pa(S)$ può passare un'unica retta contenuta in S . Quindi anche attraverso ciascun punto di $Pl(S) \setminus \partial_S Pa(S)$ passa una e una sola retta, e quelle appartenenti alla stessa componente connessa sono tutte parallele tra loro.

Ma abbiamo visto che anche tutte le rette appartenenti a una componente connessa T di $Pa(S)$ sono parallele fra di loro, il che implica (ricordando anche la dimostrazione della Proposizione 2.2.2) che pure le rette costituenti il bordo di T sono parallele.

Siano ora p_0 e p_1 due punti qualsiasi di S , e $\sigma : [0, 1] \rightarrow S$ una curva che li congiunge (che esiste perchè S è connessa). Per compattezza, possiamo trovare una partizione $0 < t_0 < \dots < t_k = 1$ di $[0, 1]$ tale che ciascun $\sigma([t_{j-1}, t_j])$ sia contenuto nella chiusura di una componente connessa di $S \setminus \partial_S Pa(S)$. Allora per ogni $j = 1, \dots, k$ le rette passanti per ciascun $\sigma(t)$ con $t \in [t_{j-1}, t_j]$ sono tutte parallele fra di loro. Ma t_j appartiene sia a $[t_{j-1}, t_j]$ che a $[t_j, t_{j+1}]$; quindi tutte le rette passanti per i punti del sostegno di σ sono parallele. In particolare, sono parallele le rette per p_0 e p_1 . Ma p_0 e p_1 erano punti generici; quindi S è un cilindro. \square

Esempio 2.2.1

Di nuovo l'ipotesi di chiusura è essenziale: esistono delle superfici non chiuse con curvatura Gaussiana identicamente nulla non contenute né in un piano

né in un cilindro. Un esempio è la falda superiore di un cono circolare

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z > 0\},$$

che è la superficie di rotazione della curva $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\sigma(t) = (t, 0, t)$. Essa ha $K \equiv 0$ e $H(x, y, z) = 1/z$. In particolare S è costituita solo da punti parabolici perciò non è contenuta in un piano. Non è neppure contenuta in un cilindro: infatti, per ciascun punto parabolico di S passa uno e un solo segmento contenuto in S (Proposizione 2.2.1). Quindi se S fosse contenuta in un cilindro le generatrici dovrebbero essere parallele, ma non lo sono.

2.3 Superfici di curvatura costante negativa

Fino ad ora abbiamo classificato le superfici chiuse con curvatura Gaussiana costante positiva o nulla; rimangono da analizzare le superfici con curvatura Gaussiana costante negativa. Il nostro obiettivo sarà dimostrare un teorema dovuto a Hilbert, che dice che non c'è molto da classificare: non esistono superfici chiuse con curvatura Gaussiana costante negativa. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie con curvatura Gaussiana negativa, allora ogni punto di S è iperbolico, e quindi possiede due direzioni asintotiche distinte. Il Lemma 2.2.1 (punto (2)) ci assicura che esiste una parametrizzazione locale centrata in p in cui le linee coordinate sono linee asintotiche. Ma vedremo che nel caso in cui la curvatura Gaussiana di S è costante (negativa) possiamo dire molto di più su questa parametrizzazione locale, ottenendo la chiave della dimostrazione del Teorema di Hilbert. Iniziamo con una definizione:

Definizione 2.3.1. *Una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$ di una superficie S è detta di Chebyscheff se $E \equiv G \equiv 1$, cioè se le linee coordinate sono parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco. Diremo invece che φ è asintotica se le linee coordinate sono linee asintotiche.*

Per dimostrare l'esistenza di parametrizzazioni locali asintotiche di Chebyscheff ci serve un conto preliminare.

Lemma 2.3.1. *Sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale asintotica di una superficie S . Allora*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{EG - F^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(EG - F^2)}{\partial x_1} + F \frac{\partial E}{\partial x_2} - E \frac{\partial G}{\partial x_1} \right] f \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{EG - F^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(EG - F^2)}{\partial x_2} + F \frac{\partial E}{\partial x_1} - E \frac{\partial G}{\partial x_2} \right] f. \quad (2.9)$$

Dimostrazione. Usando $i = 2$ e $j = 1$ nelle equazioni (2.1) di Codazzi-Mainardi e ricordando che in questa parametrizzazione locale si ha $e \equiv g \equiv 0$, otteniamo

$$\Gamma_{1k}^1 h_{21} - \Gamma_{2k}^2 h_{12} = \Gamma_{1k}^1 f - \Gamma_{2k}^2 f$$

Se $k = 1$ otteniamo

$$\frac{\partial h_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2) f.$$

Analogamente otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) f.$$

Siccome

$$\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left[G \frac{\partial E}{\partial x_1} - 2F \frac{\partial F}{\partial x_1} + 2F \frac{\partial E}{\partial x_2} - E \frac{\partial G}{\partial x_1} \right],$$

$$\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left[E \frac{\partial G}{\partial x_2} - 2F \frac{\partial F}{\partial x_2} + 2F \frac{\partial G}{\partial x_1} - G \frac{\partial E}{\partial x_2} \right],$$

otteniamo la tesi. □

Dal Lemma segue la

Proposizione 2.3.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana costante negativa $K \equiv -K_0 < 0$. Allora per ogni punto $p \in S$ esiste una parametrizzazione locale asintotica di Chebyscheff centrata in p .*

Dimostrazione. Sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale asintotica centrata in p , che esiste per il Lemma 2.2.1 (punto (2)). A meno di due cambiamenti di parametro (effettuati indipendentemente sulle due variabili), possiamo assumere che le due curve coordinate passanti per $p = \varphi(0, 0)$ siano parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco. Quindi

$$E(x_1, 0) \equiv G(0, x_2) \equiv 1;$$

vogliamo dimostrare che il fatto che la curvatura Gaussiana sia una costante negativa implica che φ è di Chebyscheff.

Prima di tutto notiamo che $K \equiv -K_0$ implica che $f^2 = K_0(EG - F^2)$ (per la (2) pag. 8). Sostituendo questo in (2.8) moltiplicata per $2f$ otteniamo

$$\begin{aligned}
2f \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{2f^2}{EG - F^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(EG - F^2)}{\partial x_1} + F \frac{\partial E}{\partial x_2} - E \frac{\partial G}{\partial x_1} \right] \\
&\downarrow \\
2f \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{2f^2 K_0}{f^2} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{K_0} \frac{\partial(f^2)}{\partial x_1} + F \frac{\partial E}{\partial x_2} - E \frac{\partial G}{\partial x_1} \right] \\
&\downarrow \\
2f \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial(f^2)}{\partial x_1} + 2K_0 \left(F \frac{\partial E}{\partial x_2} - E \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \\
&\downarrow \\
2f \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2f \frac{\partial f}{\partial x_1} + 2K_0 \left(F \frac{\partial E}{\partial x_2} - E \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \\
&\downarrow \\
0 &= 2K_0 \left(F \frac{\partial E}{\partial x_2} - E \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \\
&\downarrow \\
F \frac{\partial E}{\partial x_2} - E \frac{\partial G}{\partial x_1} &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Procedendo analogamente in (2.9) otteniamo

$$-G \frac{\partial E}{\partial x_2} + F \frac{\partial G}{\partial x_1} \equiv 0.$$

Il sistema formato da queste due equazioni ha determinante $F^2 - EG$ che non si annulla mai; quindi $\partial E / \partial x_2 \equiv \partial G / \partial x_1 \equiv 0$. Ma questo vuol dire che E non dipende da x_2 e G non dipende da x_1 , per cui $E(x_1, x_2) = E(x_1, 0) \equiv 1$ e $G(x_1, x_2) = E(0, x_2) \equiv 1$, come voluto. \square

Diamo ora due definizioni preliminari:

Definizione 2.3.2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Una determinazione dell'angolo fra due vettori tangenti $v_1, v_2 \in T_p S$ è un $\theta \in \mathbb{R}$ tale che sia abbia

$$\cos \theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(v_1)I_p(v_2)}}.$$

Definizione 2.3.3. Se $\sigma : I \rightarrow S$ è una curva di classe C^∞ a tratti, un campo vettoriale lungo σ è un'applicazione continua $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\xi(t) \in T_{\sigma(t)} S$ per ogni $t \in I$, e di classe C^∞ in ogni sottointervallo di I in cui σ è di classe C^∞ . Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali lungo σ sarà indicato con $\mathcal{T}(\sigma)$.

Sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di Chebyscheff, con U omeomorfo a un quadrato. Siccome ∂_1 e ∂_2 sono di norma unitaria, abbiamo $N = \partial_1 \wedge \partial_2$, e $\{\partial_1, N \wedge \partial_2\}$ è sempre una base ortonormale del piano tangente. A meno di restringere U , possiamo definire una determinazione continua $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$ dell'angolo da ∂_1 a ∂_2 in modo da poter scrivere

$$\partial_2 = (\cos \theta)\partial_1 + (\sin \theta)N \wedge \partial_1.$$

Inoltre, siccome ∂_1 e ∂_2 sono sempre linearmente indipendenti, θ non può mai valere né 0 né π ; quindi scegliendo opportunamente il valore iniziale possiamo ottenere $\theta(U) \subseteq (0, \pi)$. In particolare, essendo

$$\cos \theta = \frac{\langle \partial_1, \partial_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(\partial_1)I_p(\partial_2)}} = \frac{F}{\sqrt{1}} = F \quad \text{e}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - F^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

otteniamo $\theta = \arccos(F)$, per cui θ è di classe C^∞ .

La funzione θ soddisfa un'importante equazione differenziale:

Lemma 2.3.2. Sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di Chebyscheff, con U omeomorfo a un quadrato, di una superficie S , e sia $\theta : U \rightarrow (0, \pi)$ la determinazione continua dell'angolo da ∂_1 a ∂_2 . Allora

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} = (-K) \sin \theta. \quad (2.10)$$

Dimostrazione. Ricordando che $\theta = \arccos F$ e che $\sin \theta = \sqrt{1 - F^2}$ otteniamo che

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{1 - F^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{F}{(1 - F^2)^2} \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Ora, mettendo $E \equiv G \equiv 1$ nelle formule a pag. 9 che permettono di determinare il valore dei simboli di Christoffel, troviamo

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{-F}{1 - F^2} \frac{\partial F}{\partial x_1}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 \equiv 0, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{1 - F^2} \frac{\partial F}{\partial x_2}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{1 - F^2} \frac{\partial F}{\partial x_1}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 \equiv 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{-F}{1 - F^2} \frac{\partial F}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Quindi per il Teorema Egregium di Gauss (si veda (11), pag. 10) abbiamo che

$$\begin{aligned} K &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{1 - F^2} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) - \frac{F}{(1 - F^2)^2} \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} = \\ &= \frac{1}{1 - F^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{F}{(1 - F^2)^2} \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

e abbiamo finito. □

L'idea della dimostrazione della non esistenza di superfici chiuse con curvatura Gaussiana costante negativa è usare le parametrizzazioni locali asintotiche di Chebyscheff per definire una funzione $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \pi)$ che soddisfa (2.10), e poi dimostrare che una tale funzione non può esistere.

Ci serve ancora un lemma, nella cui dimostrazione entra in modo cruciale il fatto che lavoriamo con superfici chiuse:

Lemma 2.3.3. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa con curvatura Gaussiana sempre negativa, e $\sigma : I \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di una linea asintotica massimale di S . Allora $I = \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $I \neq \mathbb{R}$, e sia $s_0 \in \mathbb{R}$ un estremo (finito) di I ; senza perdita di generalità, possiamo supporre che sia l'estremo superiore di I . Siccome σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco,

$$\|\sigma(s) - \sigma(s')\| \leq L(\sigma|_{[s, s']}) = |s - s'|$$

per ogni $s, s' \in I$ con $s < s'$. Quindi per ogni successione $\{s_n\} \subset I$ convergente a s_0 la successione $\{\sigma(s_n)\}$ è di Cauchy in \mathbb{R}^3 e quindi converge a un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Ma S è chiusa in \mathbb{R}^3 , per cui $p_0 \in S$. Ma p_0 non dipende dalla successione scelta, e quindi ponendo $\sigma(s_0) = p_0$ abbiamo esteso con continuità σ a s_0 .

Si può dimostrare ³ che data una superficie S e un campo vettoriale X su di essa, per ogni $p_0 \in S$ esistono $\varepsilon > 0$, un intorno V di p_0 in S e un'applicazione $\Sigma : V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ di classe C^∞ tale che per ogni $p \in V$ la curva $\sigma_p = \Sigma(p, x_2)$ sia una curva integrale di X con $\sigma_p(0) = p$. Questo ci fornisce un intorno $V \subseteq S$ di p_0 e un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $p \in V$ le linee asintotiche parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco passanti per p sono definite sull'intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Ma allora se prendiamo $s_1 \in I$ tale che $\sigma(s_1) \in V$ e $|s_0 - s_1| < \varepsilon$, la curva σ , che è una linea asintotica passante per $\sigma(s_1)$, dev'essere definita almeno fino a $s_1 + \varepsilon > s_0$, contro la massimalità. \square

Teorema 2.3.1. (Hilbert). *Non esistono superfici chiuse in \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana costante negativa.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $S \subset \mathbb{R}^3$ sia una superficie chiusa con curvatura Gaussiana costante negativa $K \equiv -K_0 < 0$. Fissiamo un punto $p_0 \in S$, e sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$ una linea asintotica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma(0) = p_0$; l'esistenza di σ è assicurata dal lemma precedente.

Sia $\xi_0 \in T_{p_0}S$ una direzione asintotica di lunghezza unitaria in p_0 linearmente indipendente da $\sigma'(0)$; allora esiste un unico campo vettoriale $\xi \in \mathcal{T}(\sigma)$ lungo σ con $\xi(0) = \xi_0$ tale che $\xi(s) \in T_{\sigma(s)}S$ sia una direzione asintotica di lunghezza unitaria in $\sigma(s)$ linearmente indipendente da $\sigma'(s)$. Definiamo allora $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ ponendo

$$\Phi(x_1, x_2) = \sigma_{x_1}(x_2),$$

dove $\sigma_{x_1} : \mathbb{R} \rightarrow S$ è l'unica linea asintotica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma_{x_1}(0) = \sigma(x_1)$ e $\sigma'_{x_1}(0) = \xi(x_1)$.

Vogliamo dimostrare che per ogni $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che Φ ristretta a $(x_1^0 - \varepsilon, x_1^0 + \varepsilon) \times (x_2^0 - \varepsilon, x_2^0 + \varepsilon)$ sia una parametrizzazione locale asintotica di Chebyscheff in $\Phi(x^0)$.

³Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 273

Fissiamo allora $x_1^0 \in \mathbb{R}$. Sappiamo che le curva $s \mapsto \Phi(s, 0)$ e $s \mapsto \Phi(x_1^0, s)$ sono linee asintotiche parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, con vettori tangenti linearmente indipendenti nel punto di intersezione $p = \Phi(x_1^0, 0)$. La prima osservazione è (Proposizione 2.3.1) che esiste una parametrizzazione locale asintotica di Chebyscheff $\varphi : (x_1^0 - \varepsilon, x_1^0 + \varepsilon) \times (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\varphi(x_1^0, 0) = p$, $\partial_1|_p = \partial\Phi/\partial x_1(x_1^0, 0)$ e $\partial_2|_p = \partial\Phi/\partial x_2(x_1^0, 0)$. Ma allora $s \mapsto \varphi(x_1, s)$ è la linea asintotica uscente da $\sigma(x_1)$ tangente a $\xi(x_1)$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, per cui $\varphi(x_1, s) = \Phi(x_1, s)$ per ogni $x_1 \in (x_1^0 - \varepsilon, x_1^0 + \varepsilon)$ e $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. In altre parole, Φ ristretta a $(x_1^0 - \varepsilon, x_1^0 + \varepsilon) \times (\varepsilon, \varepsilon)$ è una parametrizzazione locale asintotica di Chebyscheff.

Ora supponiamo che $x_2 \in \mathbb{R}$ sia tale che $s \mapsto \Phi(s, x_2)$ sia una linea asintotica nell'intorno di x_1^0 . Notando che, per s fissato e t vicino a x_2 , il punto $\Phi(s, t)$ è ottenuto seguendo σ_s da $\sigma_s(x_2)$ a $\sigma_s(t)$, che è linea asintotica uscente da $\sigma_s(x_2)$, la seconda osservazione è che possiamo ripetere il ragionamento precedente e trovare un $\varepsilon > 0$ tale che Φ ristretta a $(x_1^0 - \varepsilon, x_1^0 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$ sia una parametrizzazione locale asintotica di Chebyscheff.

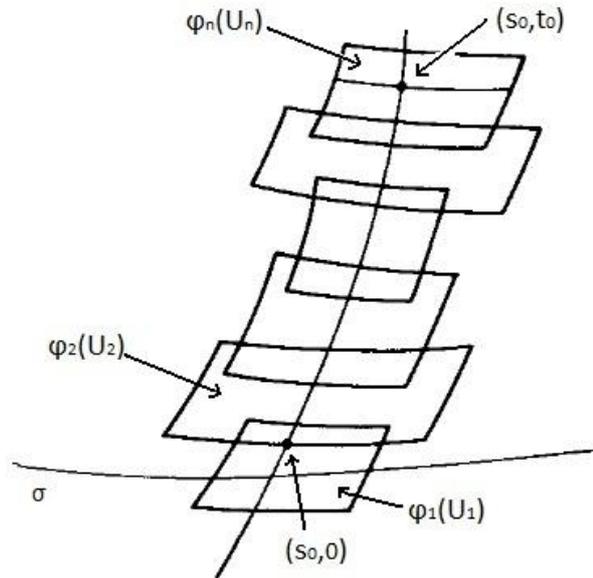


Figura 2.3:

Siccome $[0, x_2^0]$ è compatto, possiamo coprire il sostegno di $\sigma_{x_1^0}|_{[0, x_2^0]}$ con le immagini di un numero finito di $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di parametrizzazioni locali asintotiche di Chebyscheff, in modo che ciascuna immagine intersechi la successiva come nella Fig. 2.3. Allora l'osservazione precedente implica che Φ coincide con φ_1 (a meno di cambiare l'orientazione di φ_1), e la seconda osservazione implica che, passo passo, arriviamo a dimostrare che Φ è una parametrizzazione locale asintotica di Chebyscheff nell'intorno di (x_1^0, x_2^0) .

Definiamo allora $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \pi)$ con

$$\theta = \arccos \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right\rangle.$$

Il Lemma 2.3.2 ci dice che θ soddisfa (2.10) su tutto \mathbb{R}^2 , con $-K \equiv K_0 > 0$; vogliamo far vedere che una tale funzione non può esistere.

Prima di tutto, $\partial^2 \theta / \partial x_1 \partial x_2 > 0$ sempre; quindi $\partial \theta / \partial x_1$ è una funzione crescente di x_2 e, in particolare,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1}(x_1, x_2) > \frac{\partial \theta}{\partial x_1}(x_1, 0) \quad (2.11)$$

per ogni $x_2 > 0$. Integrando questa relazione sull'intervallo $[a, b]$ rispetto a x_1 otteniamo

$$\theta(b, x_2) - \theta(a, x_2) > \theta(b, 0) - \theta(a, 0) \quad (2.12)$$

per ogni $x_2 > 0$ e ogni $a < b$. Ora, siccome $\partial \theta / \partial x_1$ non è identicamente nulla, a meno di traslazione possiamo assumere che $\partial \theta / \partial x_1(0, 0) \neq 0$. Siccome anche la funzione $(x_1, x_2) \mapsto \theta(-x_1, -x_2)$ soddisfa (2.10), possiamo anche supporre che $\partial \theta / \partial x_1(0, 0) > 0$. Scegliamo ora un intervallo $[0, s_3]$ sull'asse x_1 in modo che $\partial \theta / \partial x_1(x_1, 0)$ sia positiva su tutto l'intervallo e scegliamo due valori s_1, s_2 tali che $0 < s_1 < s_2 < s_3$. Poniamo

$$\delta = \min\{\theta(s_3, 0) - \theta(s_2, 0), \theta(s_1, 0) - \theta(0, 0)\} \in (0, \pi).$$

Quindi ricordando (2.11) e (2.12) otteniamo che per ogni $x_2 > 0$ la funzione $s \mapsto \theta(s, x_2)$ è crescente, e

$$\min\{\theta(s_3, x_2) - \theta(s_2, x_2), \theta(s_1, x_2) - \theta(0, x_2)\} > 0.$$

Ricordando che l'immagine di θ è contenuta in $(0, \pi)$ tutto ciò implica che

$$\delta \leq \theta(x_1, x_2) \leq \pi - \delta$$

per ogni $x_1 \in [s_1, s_2]$ e ogni $x_2 \geq 0$, per cui

$$\forall x_1 \in [s_1, s_2], \forall x_2 \geq 0 \quad \sin \theta(x_1, x_2) \geq \sin \delta.$$

Per ogni $T \in \mathbb{R}^+$ possiamo integrare (2.10) sul rettangolo $[s_1, s_2] \times [0, T]$ ottenendo:

$$\begin{aligned} K_0 \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \sin \theta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \theta(s_2, T) - \theta(s_2, 0) - \theta(s_1, T) + \theta(s_1, 0). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \theta(s_2, T) - \theta(s_1, T) &= \theta(s_2, 0) - \theta(s_1, 0) + K_0 \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \sin \theta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \geq \\ &\geq \theta(s_2, 0) - \theta(s_1, 0) + K_0(s_2 - s_1)T \sin \delta \end{aligned}$$

per ogni $T > 0$, il che è impossibile in quanto il membro sinistro è minore di π mentre il membro di destra cresce indefinitamente al crescere di T . \square

Capitolo 3

Superfici con curvatura Gaussiana positiva o non negativa

3.1 Convessità

Obiettivo di questo primo paragrafo è studiare in dettaglio le superfici chiuse in \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana positiva. In particolare dimostreremo che sono sempre diffeomorfe o a una sfera o a un aperto convesso del piano (Teoremi di Hadamard e di Stoker). Iniziamo enunciando due importanti risultati dei quali però omettiamo le dimostrazioni ¹:

Teorema 3.1.1. (*Brouwer-Samelson*) *Ogni superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ chiusa è orientabile.*

Teorema 3.1.2. (*Jordan-Brouwer*) *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa. Allora $\mathbb{R}^3 \setminus S$ ha esattamente due componenti connesse, entrambe con bordo uguale a S .*

Quindi data $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa essa è orientabile (per il Teorema 3.1.1) e $\mathbb{R}^3 \setminus S$ consiste esattamente di due componenti connesse (per il Teorema 3.1.2). Se fissiamo una mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$, allora esiste un'unica componente connessa di $\mathbb{R}^3 \setminus S$ che contiene punti della forma $p + tN(p)$, con $p \in S$ e $0 < t < \varepsilon(p)$, dove $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione con-

¹Per le dimostrazioni si veda Abate [2006], pag. 236 e pag. 241

tinua tale che $N_S(\varepsilon)$ sia un intorno tubolare di S , dove per intorno tubolare intendiamo:

Definizione 3.1.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Dato $\varepsilon > 0$ e $p \in S$, indichiamo con $I_S(p, \varepsilon)$ il segmento $p + (-\varepsilon, \varepsilon)N(p)$ di lunghezza 2ε centrato in p e ortogonale a T_pS , dove $N(p) \in S^2$ è un versore ortogonale a T_pS . Se $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione continua sempre positiva, e $R \subseteq S$, indicheremo inoltre con $N_R(\varepsilon)$ l'unione dei segmenti $I_S(p, \varepsilon(p))$, al variare di $p \in R$. L'insieme $N_S(\varepsilon)$ si chiama intorno tubolare di S se $I_S(p_1, \varepsilon(p_1)) \cap I_S(p_2, \varepsilon(p_2)) = \emptyset$ per ogni $p_1 \neq p_2 \in S$ (Fig. 3.1).

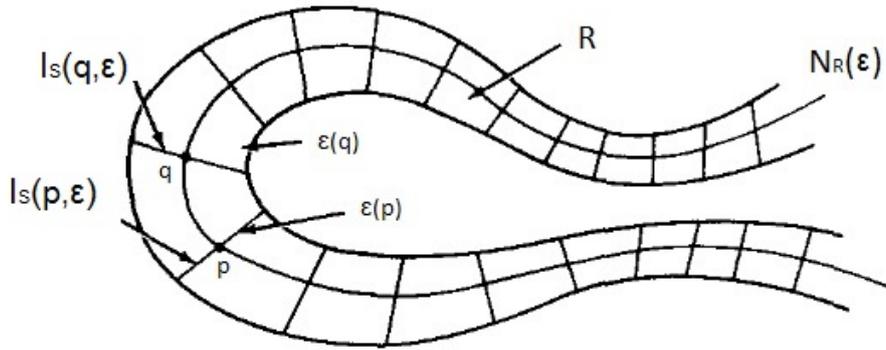


Figura 3.1:

Teorema 3.1.3. ² Per ogni superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ esiste una funzione $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua sempre positiva tale che $N_S(\varepsilon)$ sia un intorno tubolare di S . Inoltre:

1. $N_S(\varepsilon)$ è un intorno aperto connesso di S in \mathbb{R}^3 ;
2. se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è un intorno aperto di S tale che S sia chiusa in Ω , allora possiamo scegliere ε in modo tale che $N_S(\varepsilon) \subseteq \Omega$;

²Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 238

3. esiste un'applicazione $\pi : N_S(\varepsilon) \rightarrow S$ di classe C^∞ tale che $\pi|_S \equiv id_S$ e $y \in I_S(\pi(y), \varepsilon(\pi(y)))$ per ogni $y \in N_S(\varepsilon)$;
4. se S è orientabile esiste una funzione $h : N_S(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $y = \pi(y) + h(y)N(\pi(y))$ per ogni $y \in N_S(\varepsilon)$, dove $N : S \rightarrow S^2$ è la mappa di Gauss di S . In particolare, $S = h^{-1}(0)$;
5. $N_S(\varepsilon) \setminus S$ ha al più due componenti connesse e, se S è orientabile, allora ha esattamente due componenti connesse.

Il precedente teorema ha come conseguenza immediata la seguente:

Proposizione 3.1.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa orientata con mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$. Allora l'interno di S è l'unica componente connessa di $\mathbb{R}^3 \setminus S$ che contiene punti della forma $p - tN(p)$, con $p \in S$ e $0 < t < \varepsilon(p)$, dove $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione continua tale che $N_S(\varepsilon)$ sia un intorno tubolare di S .*

Supponiamo ora che la curvatura Gaussiana di S sia sempre positiva. In particolare le curvature principali di S hanno sempre lo stesso segno e non si annullano mai; quindi esiste una mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ che le rende sempre positive. D'ora in poi supporremo sempre che le superfici con curvatura Gaussiana sempre positiva siano orientate con la mappa di Gauss che rende tutte le curvature principali positive. Primo obiettivo è far vedere che l'ipotesi $K > 0$ implica la convessità dell'interno di S e di S stessa, dove per convessità intendiamo:

Definizione 3.1.2. *Dati due punti x e $y \in \mathbb{R}^n$, indicheremo con $[x, y] \subset \mathbb{R}^n$ il segmento chiuso da x a y , e con $]x, y[\subset \mathbb{R}^n$ il segmento aperto da x a y . Un sottoinsieme $R \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $[x, y] \subseteq R$ per ogni $x, y \in R$; strettamente convesso se $]x, y[$ è contenuto nell'interno di R per ogni $x, y \in R$.*

È evidente che una superficie non potrà mai essere convessa in questo senso a meno che non sia contenuta in un piano. Introduciamo allora un'altra nozione di convessità per superfici che sarà utile ai nostri scopi:

Definizione 3.1.3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Il piano tangente affine a S in p è il piano $H_p S = p + T_p S$ parallelo a $T_p S$ e passante per p . Se S è orientata e $N : S \rightarrow S^2$ è la corrispondente mappa di Gauss, indicheremo con $H_p^\pm S \subset \mathbb{R}^3$ il semispazio aperto determinato da $H_p S$ e contenente $p \pm N(p)$.

Definizione 3.1.4. Diremo che una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è convessa se, per ogni $p \in S$, è contenuta in uno dei suoi semispazi chiusi determinati da $H_p S$, e che è strettamente convessa se $S \setminus \{p\}$ è contenuta in uno dei suoi semispazi aperti determinati da $H_p S$.

Il risultato che ci permetterà di collegare la positività della curvatura Gaussiana con le varie nozioni di convessità è il seguente:

Lemma 3.1.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa, e $p \in S$ un punto tale che $K(p) > 0$. Sia $N : S \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss di S tale che le curvature principali siano positive in un intorno di p , e $\Omega \in \mathbb{R}^3$ l'interno di S . Sia $h_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$h_p(x) = \langle x - p, N(p) \rangle.$$

Allora esiste un intorno $V_p \subset \mathbb{R}^3$ di p tale che h_p è strettamente positiva in $(\bar{\Omega} \setminus \{p\}) \cap V_p$; inoltre non esistono segmenti $[x, y] \subset V_p \cap \bar{\Omega}$ con $p \in]x, y[$.

Dimostrazione. Per ogni curva $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v \in T_p S$, dato che $Q_p(v) = -\langle dN_p, \sigma'(0) \rangle = \langle \sigma''(0), N(p) \rangle$ si ha

$$(h_p \circ \sigma)'(0) = \langle \sigma'(0), N(p) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad (h_p \circ \sigma)''(0) = \langle \sigma''(0), N(p) \rangle = Q_p(v).$$

Siccome Q_p è strettamente definita positiva per la scelta di N , ne segue che p è un minimo locale stretto per $h_p|_S$, per cui esiste un intorno $V_p \subset \mathbb{R}^3$ di p tale che $h_p(q) > 0$ per ogni $q \in (S \setminus \{p\}) \cap V_p$.

Sia $N_S(\epsilon) \subset \mathbb{R}^3$ un intorno tubolare di S , e $\pi : N_S(\epsilon) \rightarrow S$ e $h : N_S(\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ le applicazioni introdotte dal Teorema 3.1.3; in particolare, $h(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega \cap N_S(\epsilon)$. A meno di restringere V_p , possiamo supporre che si abbia $V_p = \pi^{-1}(V_p \cap S) \subset N_S(\epsilon)$, e che $\langle N(q), N(p) \rangle > 0$ per ogni $q \in V_p \cap S$. Allora per ogni $x \in V_p \cap \Omega$ si ha

$$h_p(x) = h_p(\pi(x) + h(x)N(\pi(x))) = (\pi(x) + h(x)N(\pi(x)) - p) \times N(p) =$$

$$= h_p(\pi(x)) + h(x)N(\pi(x)) \times N(p) = h_p(\pi(x)) + h(x)\langle N(\pi(x)), N(p) \rangle;$$

ma $h_p(\pi(x))$ e $\langle N(\pi(x)), N(p) \rangle$ sono > 0 poichè $\pi(x) \in S \cap V_p$ e $h(x) > 0$ poichè $x \in \Omega \cap N_S(\epsilon)$; otteniamo allora che $h_p(x) > 0$. Quindi abbiamo $h_p(q) > 0$ per ogni $q \in (\overline{\Omega} \setminus \{p\}) \cap V_p$ (per $q = p$ allora $h_p = 0$).

Supponiamo che esista in segmento $[x, y] \subset V_p \cap \overline{\Omega}$ con $p \in]x, y[$.

Sia $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione data da $\sigma(t) = x + t(y - x)$, e sia $t_0 \in (0, 1)$ tale che $\sigma(t_0) = p$; in particolare,

$$h_p(\sigma(t)) = \langle x + t(y - x) - x - t_0(y - x), N(p) \rangle = (t - t_0)\langle y - x, N(p) \rangle.$$

Quindi $h_p \circ \sigma$ è identicamente nulla oppure cambia segno in $[0, 1]$; ma dal fatto che $[x, y] \subset \overline{\Omega} \cap V_p$ deduciamo che $h_p(\sigma(t)) > 0$ per ogni $t \neq t_0$, contraddizione. \square

Concludiamo con la seguente:

Proposizione 3.1.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa con curvatura Gaussiana sempre positiva, e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il suo interno. Allora:*

1. $\overline{\Omega}$ è strettamente convesso;
2. S è strettamente convessa;
3. $\overline{\Omega} = \bigcap_{p \in S} \overline{H_p^+ S}$ e $\Omega = \bigcap_{p \in S} H_p^+ S$.

Dimostrazione.

1. Cominciamo col dimostrare che Ω è convesso, ovvero che il sottoinsieme $A = \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \mid [x, y] \subset \Omega\}$ di $\Omega \times \Omega$ coincide con tutto $\Omega \times \Omega$. Siccome Ω è connesso (per il Teorema 3.1.2), se A fosse diverso da $\Omega \times \Omega$ potremmo trovare $(x_0, y_0) \in \partial A$. Quindi devono esistere due successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \Omega$ tali che $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, [x_n, y_n] \subset \Omega$ ma $[x_0, y_0] \not\subset \Omega$. Chiaramente si deve avere $[x_0, y_0] \subset \overline{\Omega} = \Omega \cup S$; scegliamo un punto $p \in]x_0, y_0[\cap S$, e sia $V_p \subset \mathbb{R}^3$ l'intorno di p dato dal lemma precedente. Allora intersecando $[x_0, y_0]$ con V_p avremmo trovato un segmento contenuto in $\overline{\Omega} \cap V_p$ contenente p al suo interno, contro il Lemma 3.1.1.

Quindi Ω è convesso, e dunque anche $\bar{\Omega}$ lo è. Se $\bar{\Omega}$ non fosse strettamente convesso, dovrebbero esistere due punti $x_0, y_0 \in S$ tali che $]x_0, y_0[\cap S \neq \emptyset$ e di nuovo contro il Lemma 3.1.1.

2. Fissiamo ora $p \in S$, e supponiamo per assurdo che esista un $q \in H_p S \cap \bar{\Omega}$ diverso da p . Allora l'intero segmento $]p, q[$ dovrebbe essere contenuto in $H_p S \cap \Omega$. Ma il Lemma 3.1.1 implica che la funzione h_p è strettamente positiva in $V_p \cap \Omega$, mentre è identicamente nulla su $H_p S$, contraddizione. Dunque $\bar{\Omega} \setminus \{p\}$ è connesso e non interseca $H_p S = h_p^{-1}(0)$; quindi h_p non può cambiare il segno in $\bar{\Omega} \setminus \{p\}$. Essendo positiva vicino a p , è positiva ovunque, per cui $\bar{\Omega} \setminus \{p\} \subset H_p^+ S$. Siccome questo vale per ogni $p \in S$, abbiamo in particolare dimostrato che S è strettamente convessa, che $\bar{\Omega} \subseteq \bigcap_{p \in S} \overline{H_p^+ S}$ e che $\Omega \subseteq \bigcap_{p \in S} H_p^+ S$.
3. Supponiamo per assurdo che esista $q_0 \in \bigcap_{p \in S} \overline{H_p^+ S} \setminus \bar{\Omega}$ e scegliamo il punto $p_0 \in \bar{\Omega}$ più vicino a q_0 , che esiste perchè $\bar{\Omega}$ è chiuso. Chiaramente, $p_0 \in \partial \bar{\Omega} = S$. Sia $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una curva con $\sigma(0) = p_0$, e poniamo $f(t) = \|\sigma(t) - q_0\|^2$. Allora abbiamo

$$f(t) = \sigma(t) \times \sigma(t) - 2\sigma(t) \times q_0 + q_0 \times q_0,$$

quindi

$$f'(t) = 2\sigma'(t) \times \sigma(t) - 2\sigma'(t) \times q_0.$$

Valutando quest'ultima espressione in 0 otteniamo

$$f'(0) = 2\langle \sigma'(0), p_0 - q_0 \rangle = 0;$$

siccome questo vale per ogni curva σ di questo genere, $p_0 - q_0$ deve essere ortogonale a $T_{p_0} S$, cioè $q_0 - p_0 = \lambda N(p_0)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Ora, essendo $q_0 \in \overline{H_{p_0}^+ S}$ abbiamo

$$0 \leq h_{p_0}(q_0) = \lambda,$$

e quindi $h_{p_0}(p_0 + t(q_0 - p_0)) = t\lambda \geq 0$ per ogni $t > 0$. D'altra parte, $p_0 + t(q_0 - p_0) \notin \bar{\Omega}$ per ogni $t \in (0, 1]$, in quanto p_0 è il punto di $\bar{\Omega}$ più vicino a q_0 , per cui $h_{p_0}(p_0 + t(q_0 - p_0)) < 0$ per $t > 0$ abbastanza piccolo, contraddizione. Quindi $\bar{\Omega} = \bigcap_{p \in S} \overline{H_p^+ S} \supset \bigcap_{p \in S} H_p^+ S$. Ma $\partial \Omega \cap \bigcap_{p \in S} H_p^+ S = \emptyset$, per cui $\Omega \supseteq \bigcap_{p \in S} H_p^+ S$, e abbiamo finito.

□

3.1.1 Compattezza

Una conseguenza della Proposizione 3.1.2 è che la mappa di Gauss di una superficie con curvatura di Gaussiana positiva si comporta particolarmente bene:

Proposizione 3.1.3. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa con curvatura Gaussiana sempre positiva. Allora la mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ è un diffeomorfismo locale iniettivo.*

Dimostrazione. Siccome la curvatura Gaussiana è esattamente il determinante del differenziale di N , il teorema della funzione inversa per superfici ci assicura che la mappa di Gauss è un diffeomorfismo locale.

Supponiamo per assurdo esistano due punti $p, q \in S$ tali che $N(p) = N(q)$; in particolare, $H_p S$ e $H_q S$ sono paralleli. La Proposizione 3.1.2 ci dice che $S \subset \overline{H_p^+ S} \cap \overline{H_q^+ S}$; siccome $H_p S$ e $H_q S$ sono paralleli, questa intersezione deve coincidere con uno dei due semispazi, diciamo $\overline{H_p^+ S}$. Ma allora $q \in H_q S \subset \overline{H_p^- S}$, per cui $q \in \overline{H_p^+ S} \cap \overline{H_p^- S} = H_p S$ e quindi $H_p S = H_q S$. Dalla stretta convessità di S deduciamo allora

$$\{p\} = S \cap H_p S = S \cap H_q S = \{q\},$$

per cui $p = q$ e N è iniettiva. □

Abbiamo ottenuto il Teorema di Hadamard:

Corollario 3.1.1. (Hadamard) *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compatta con curvatura Gaussiana sempre positiva. Allora la mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. La Proposizione 3.1.3 ci dice che N è un diffeomorfismo locale iniettivo; in particolare, $N(S)$ è aperto in S^2 . Ma S è compatta, quindi $N(S)$, essendo compatto, è anche chiuso in S^2 . Essendo S^2 connessa, questo implica che $N(S) = S^2$. Dunque è un diffeomorfismo locale biiettivo, cioè un diffeomorfismo. □

3.1.2 Non compattezza

Dal Corollario 3.1.1 segue che ogni superficie compatta con curvatura Gaussiana sempre positiva è diffeomorfa a una sfera. Per ricavare la geometria di quelle non compatte cominciamo enunciando il

Lemma 3.1.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa con curvatura Gaussiana sempre positiva, e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il suo interno. Allora*

1. *se $\bar{\Omega}$ contiene una semiretta chiusa l , allora Ω contiene tutte le semirette aperte parallele a l uscenti da punti di $\bar{\Omega}$;*
2. *$\bar{\Omega}$ non contiene rette.*

Dimostrazione.

1. Supponiamo esistano $x \in \bar{\Omega}$ e $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tali che $x + tv \in \bar{\Omega}$ per ogni $t \geq 0$. Se $y \in \bar{\Omega}$, la stretta convessità implica $]y, x + tv[\subset \Omega$ per ogni $t \geq 0$. Passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ otteniamo quindi che la semiretta aperta uscente da y parallela a v è contenuta in $\bar{\Omega}$, e non può intersecare $\partial\Omega = S$ in un punto p senza contraddire il Lemma 3.1.1 applicato a p .
2. Supponiamo che $\bar{\Omega}$ contenga una retta l . Allora se $p \in S$ la parte (1) implica che la retta per p parallela a v , vettore che individua la direzione di l , è contenuta in $\bar{\Omega}$, e questo contraddice di nuovo il Lemma 3.1.1.

□

Rimane da provare il seguente

Teorema 3.1.4. (Stoker). *Ogni superficie chiusa non compatta con curvatura Gaussiana sempre positiva $S \subset \mathbb{R}^3$ è un grafico su un aperto convesso del piano.*

Dimostrazione. Siccome S non è compatta, non è limitata. Quindi per ogni punto $q \in S$ possiamo trovare una successione $\{q_n\} \subset S$ tale che si abbia $\|q_n - q\| \rightarrow +\infty$; a meno di estrarre una sottosuccessione possiamo anche supporre che $(q_n - q)/\|q_n - q\| \rightarrow v \in S^2$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'interno di S . Siccome

$\bar{\Omega}$ è convesso, abbiamo $[q, q_n] \subset \bar{\Omega}$ per ogni n ; facendo tendere n all'infinito vediamo che $\bar{\Omega}$ deve contenere la semiretta chiusa l_q^+ uscente da q e parallela a v . Ma allora il lemma precedente ci dice che Ω contiene la semiretta aperta l_p^+ uscente da p e parallela a v per ogni $p \in S$.

Indichiamo con l_p la retta passante per p e parallela a v . Prima di tutto, se l_p intersecasse S in un altro punto p' distinto da p avremmo $p' \in l_p^+$ oppure $p \in l_{p'}^+$, contraddicendo il Lemma 3.1.1. Quindi $l_p \cap S = \{p\}$ per ogni $p \in S$. Inoltre, l_p non può essere tangente a S ; se lo fosse, necessariamente in p , dovremmo avere $l_p \subset H_p S$ e $l_p^+ \subset \Omega$, contro la Proposizione 3.1.2 punto (3). Quindi $v \notin T_p S$ per ogni $p \in S$.

Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ il piano passante per l'origine e ortogonale a v . Quanto visto finora ci dice che ogni retta ortogonale a H interseca S in al più un punto; quindi la proiezione ortogonale $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow H$ ristretta a S è iniettiva. In particolare, S è un grafico sull'immagine $\pi(S) \subseteq H$. Ora, per ogni $p \in S$ e $w \in T_p S \setminus \{0\}$ si ha

$$d\pi_p(w) = w - \langle w, v \rangle v \neq 0,$$

perchè $v \notin T_p S$. Quindi $\pi|_S : S \rightarrow H$ è un diffeomorfismo locale iniettivo, cioè un diffeomorfismo fra S e la sua immagine $\pi(S)$, che dev'essere aperta in H . Infine, $\pi(S)$ è convesso. Infatti, siano $\pi(p), \pi(q) \in \pi(S)$. Sappiamo che il segmento $]p, q[$ è contenuto in Ω , e che per ogni $x \in]p, q[$ la semiretta uscente da x parallela a v è contenuta in Ω . Ma sappiamo che $\bar{\Omega}$ non contiene rette; quindi la retta passante per x parallela a v deve intersecare S , per cui l'intero segmento $[\pi(p), \pi(q)]$ è contenuto in $\pi(S)$. \square

In particolare, quindi, ogni superficie chiusa non compatta con curvatura Gaussiana positiva è diffeomorfa a un aperto convesso del piano, e quindi è omeomorfa a un piano.

3.2 Richiami sui rivestimenti

Per lo studio delle superfici con curvatura Gaussiana non positiva abbiamo bisogno di introdurre alcuni concetti preliminari di topologia, che, per semplicità, formuleremo direttamente per il caso delle superfici.

Sia $F : \tilde{S} \rightarrow S$ un diffeomorfismo locale fra superfici. In particolare, questo vuol dire che ogni $\tilde{p} \in \tilde{S}$ ha un intorno aperto $\tilde{U} \subseteq \tilde{S}$ tale che $F|_{\tilde{U}}$ sia un diffeomorfismo con l'immagine. Essenzialmente, possono succedere due cose. La prima, evidente, che F potrebbe non essere suriettiva, per cui al di fuori dell'immagine di F non c'è alcuna relazione fra S e \tilde{S} . La seconda cosa che potrebbe succedere è che, in un certo senso, potrebbe esistere una componente connessa \hat{U} dell'immagine inversa di un aperto U di $F(S)$, anche piccolo, a cui mancano dei punti, nel senso che $F(\hat{U}) \neq U$.

Esempio 3.2.1

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro retto di raggio 1, e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ il diffeomorfismo locale dato da

$$F(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, x_2).$$

Se $\tilde{S} = (0, 3\pi) \times (-1, 1)$, allora $F|_{\tilde{S}}$ è un diffeomorfismo locale non suriettivo. Se invece $\tilde{S}_1 = (0, 3\pi) \times \mathbb{R}$, allora $F|_{\tilde{S}_1}$ è un diffeomorfismo locale suriettivo, ma si verifica il secondo problema sopra menzionato. Infatti, dato $\epsilon > 0$ poniamo $U_\epsilon = F((\pi - \epsilon, \pi + \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon))$. Allora

$$F|_{\tilde{S}_1}^{-1}(U_\epsilon) = (\pi - \epsilon, \pi + \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \cup (3\pi - \epsilon, 3\pi) \times (-\epsilon, \epsilon)$$

ma $F(3\pi - \epsilon, 3\pi) \times (-\epsilon, \epsilon) \neq U_\epsilon$.

La prossima definizione introduce un tipo particolare di diffeomorfismo locale per cui questi problemi non si pongono.

Definizione 3.2.1. *Un'applicazione $F : \tilde{S} \rightarrow S$ di classe C^∞ fra superfici è un rivestimento liscio se per ogni $p \in S$ ha un intorno aperto connesso $U_p \subseteq S$ tale che le componenti connesse $\{\tilde{U}_\alpha\}$ di $F^{-1}(U_p)$ sono tali che $F|_{\tilde{U}_\alpha}$ sia un diffeomorfismo fra \tilde{U}_α e U per ogni α . Gli intorni U_p sono detti ben rivestiti, le componenti connesse \tilde{U}_α fogli su U , e l'insieme $F^{-1}(p)$ fibra di p .*

Esempio 3.2.2

La $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ introdotta nell'Esempio 3.2.1 è un rivestimento liscio. Infatti, per ogni $p = F(x_1, x_2)$ poniamo $U_p = F((x_1 - \pi, x_1 + \pi) \times \mathbb{R})$. Allora

$$F^{-1}(U_p) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (x_1 + (2k - 1)\pi, x_1 + (2k + 1)\pi) \times \mathbb{R},$$

e si verifica che $F|_{(x_1+(2k-1)\pi, x_1+(2k+1)\pi) \times \mathbb{R}}$ è un diffeomorfismo fra $(x_1 + (2k - 1)\pi, x_1 + (2k + 1)\pi) \times \mathbb{R}$ e U_p per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Un rivestimento liscio è chiaramente un diffeomorfismo locale suriettivo, e gli intorni ben rivestiti sono diffeomorfi a tutte le componenti connesse delle loro controimmagini; quindi possiamo ragionevolmente dire che un rivestimento liscio F dalla superficie \tilde{S} sulla superficie S ci dà un modo globale per confrontare le strutture locali di \tilde{S} e S .

L'obiettivo principale di questo paragrafo è ottenere una caratterizzazione dei diffeomorfismi locali che sono rivestimenti lisci. Vedremo che la cosa più importante sarà la possibilità di sollevare curve.

Definizione 3.2.2. *Sia $F : \tilde{S} \rightarrow S$ un'applicazione C^∞ fra superfici. Un sollevamento di un'applicazione $\psi : X \rightarrow S$ è un'applicazione continua $\tilde{\psi} : X \rightarrow \tilde{S}$ tale che $\psi = F \circ \tilde{\psi}$. Diremo che F ha la proprietà del sollevamento continuo (rispettivamente, C^1) se ogni curva continua (rispettivamente, C^1 a tratti) in S ha un sollevamento continuo (rispettivamente, C^1 a tratti).*

Osservazione 3.2.1. Nell'applicazione alle superfici con curvatura Gaussiana non positiva (vedi Proposizione 3.3.4) saremo in grado di sollevare solo curve rettificabili; per questo motivo abbiamo dovuto introdurre la proprietà del sollevamento C^1 . Comunque vedremo che un diffeomorfismo locale con la proprietà del sollevamento C^1 ha anche la proprietà del sollevamento continuo.

Osservazione 3.2.2. Un'applicazione $F : \tilde{S} \rightarrow S$ con la proprietà del sollevamento C^1 è necessariamente suriettiva. Infatti, prendiamo un punto $p \in F(\tilde{S})$ e $q \in S$ qualsiasi. Essendo S connessa, esiste una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ di classe C^1 a tratti da p a q . Sia $\tilde{\sigma} : [a, b] \rightarrow \tilde{S}$ un suo sollevamento; allora $F(\tilde{\sigma}(b)) = \sigma(b) = q \in F(\tilde{S})$, e F è suriettiva.

Un'osservazione importante è che se i sollevamenti (rispetto a un diffeomorfismo locale) esistono sono essenzialmente unici:

Lemma 3.2.1. ³ *Sia $F : \tilde{S} \rightarrow S$ un diffeomorfismo locale, X uno spazio topologico di Hausdorff connesso, e $\psi : X \rightarrow S$ un'applicazione continua.*

³Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 376

Supponiamo di avere due sollevamenti $\tilde{\psi}, \hat{\psi} : X \rightarrow \tilde{S}$ di ψ tali che $\tilde{\psi}(x_0) = \hat{\psi}(x_0)$ per un qualche $x_0 \in X$. Allora $\tilde{\psi} \equiv \hat{\psi}$.

Osservazione 3.2.3. Ogni sollevamento di una curva C^1 a tratti rispetto a un diffeomorfismo locale è necessariamente C^1 a tratti; quindi un diffeomorfismo locale con la proprietà del sollevamento continuo ha anche la proprietà del sollevamento C^1 . Infatti, dati un diffeomorfismo locale F con la proprietà del sollevamento continuo e una curva σ , C^1 a tratti, essa è in particolare continua, quindi ammette un sollevamento continuo $\tilde{\sigma}_1$. Poiché σ è C^1 a tratti, per quanto detto sopra, se ammette un sollevamento esso è C^1 a tratti, chiamiamolo $\tilde{\sigma}_2$. Ma, per l'unicità del sollevamento, abbiamo $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$, C^1 a tratti.

L'ultimo teorema di questo paragrafo dimostrerà che i rivestimenti lisci sono tutti e soli quei diffeomorfismi locali che hanno la proprietà del sollevamento C^1 ; per arrivarci dobbiamo prima di tutto far vedere che i rivestimenti hanno questa proprietà.

Proposizione 3.2.1. ⁴ Ogni sollevamento liscio fra due superfici ha la proprietà del sollevamento continuo (e quindi anche del sollevamento C^1).

Ricordiamo che due applicazioni continue fra spazi topologici $\phi_0, \phi_1 : X \rightarrow Y$ si dicono *omotope* se esiste un'omotopia fra ϕ_0 e ϕ_1 cioè un'applicazione continua $\Phi : [0, 1] \times Y \rightarrow X$ tale che $\Phi(0, y) \equiv \phi_0$ e $\Phi(1, y) \equiv \phi_1$ per ogni $y \in Y$. Nel nostro contesto dobbiamo introdurre ulteriore terminologia:

Definizione 3.2.3. Siano $\sigma_0, \sigma_1 : [a, b] \rightarrow S$ due curve continue in una superficie S , e $\Psi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S$ un'omotopia fra σ_0 e σ_1 . Se esiste un $p \in S$ tale che, per ogni $s \in [0, 1]$, $\Psi(s, a) \equiv p$ (e quindi, in particolare, $\sigma_0(a) = p = \sigma_1(a)$) diremo che Ψ ha origine in p . Se inoltre anche $\Psi(s, b)$ è costante, diremo che Ψ è a estremi fissi. Diremo invece che Ψ è C^1 a tratti se tutte le curve $t \mapsto \Psi(s_0, t)$ e $s \mapsto \Psi(s, t_0)$ sono di classe C^1 a tratti.

Anche le omotopie si sollevano:

⁴Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 376

Proposizione 3.2.2. ⁵ Sia $F : \tilde{S} \rightarrow S$ un diffeomorfismo locale fra superfici con la proprietà del sollevamento continuo (C^1), e $\Phi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S$ un'omotopia (C^1 a tratti) di origine $p_0 \in S$. Allora per ogni \tilde{p}_0 nella fibra di p_0 esiste un unico sollevamento $\tilde{\Phi} : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \tilde{S}$ di Φ di origine \tilde{p}_0 .

Una conseguenza importante di questo risultato è che i sollevamenti di curve omotope sono omotopi:

Corollario 3.2.1. ⁶ Sia $F : \tilde{S} \rightarrow S$ un diffeomorfismo locale fra superfici con la proprietà del sollevamento continuo (C^1), e $\sigma_0, \sigma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due curve (C^1 a tratti) tali che $\sigma_0(a) = p = \sigma_1(a)$ e $\sigma_0(b) = q = \sigma_1(b)$. Scelto $\tilde{p} \in F^{-1}(p)$, siano $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1 : [a, b] \rightarrow \tilde{S}$ i sollevamenti di σ_0 e σ_1 uscenti da \tilde{p} . Allora esiste un'omotopia (C^1 a tratti) a estremi fissi fra σ_0 e σ_1 se e solo se esiste un'omotopia (C^1 a tratti) a estremi fissi fra $\tilde{\sigma}_0$ e $\tilde{\sigma}_1$.

Le omotopie ci permettono di identificare una classe particolare di superfici i cui rivestimenti sono necessariamente banali.

Definizione 3.2.4. Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è semplicemente connessa se per ogni curva chiusa $\sigma_0 : [a, b] \rightarrow S$ esiste un'omotopia a estremi fissi fra σ_0 e la curva costante $\sigma_1 \equiv \sigma_0(a)$.

Possiamo ora dimostrare che ogni diffeomorfismo locale con la proprietà del sollevamento C^1 è un rivestimento liscio:

Teorema 3.2.1. Sia $F : \tilde{S} \rightarrow S$ un diffeomorfismo locale fra superfici con la proprietà del sollevamento continuo (C^1). Allora F è un rivestimento liscio, per cui in particolare ha la proprietà del sollevamento continuo.

Dimostrazione. Dato $p_0 \in S$, sia $U \subseteq S$ l'immagine di una parametrizzazione locale in p_0 con dominio un disco aperto del piano; in particolare, U è un intorno aperto connesso semplicemente connesso. Vogliamo dimostrare che U è ben rivestito.

Sia $F^{-1}(U) = \bigcup \tilde{U}_\alpha$ la decomposizione di $F^{-1}(U)$ in componenti connesse. Siccome \tilde{S} è localmente connessa per archi C^∞ allora ogni \tilde{U}_α è una

⁵Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 377

⁶Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 378

componente connessa per archi di $F^{-1}(U)$. Se dimostriamo che $F|_{\tilde{U}_\alpha}$ è un diffeomorfismo fra \tilde{U}_α e U abbiamo fatto vedere che F è un rivestimento liscio.

Cominciamo dimostrando che $F(\tilde{U}_\alpha) = U$. Preso $p \in U$, sia $\sigma : [a, b] \rightarrow U$ una curva C^1 a tratti da un punto $q \in F(\tilde{U}_\alpha)$ a p . Siccome F ha la proprietà del sollevamento C^1 , esiste un sollevamento $\tilde{\sigma}$ di σ uscente da un punto $\tilde{q} \in \tilde{U}_\alpha$. Chiaramente, $\tilde{\sigma}([a, b]) \subset F^{-1}(U)$; essendo \tilde{U}_α una componente connessa per archi di $F^{-1}(U)$, l'intero sostegno di $\tilde{\sigma}$ è contenuto in \tilde{U}_α . In particolare, $p = F(\tilde{\sigma}(b)) \in F(\tilde{U}_\alpha)$, e F è suriettiva.

Adesso che sappiamo che F è suriettiva, il ragionamento appena fatto ci mostra che $\tilde{F}|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow U$ è un diffeomorfismo locale con la proprietà del sollevamento C^1 ; per concludere ci basta dimostrare che è iniettivo.

Siano $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{U}_\alpha$ tali che $F(\tilde{p}_1) = F(\tilde{p}_2) = p$. Siccome \tilde{U}_α è connesso per archi, esiste una curva C^1 a tratti $\tilde{\sigma}_0 : [a, b] \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ da \tilde{p}_1 a \tilde{p}_2 . Allora la curva $\sigma_0 = F \circ \tilde{\sigma}_0$ è una curva chiusa di classe C^1 a tratti. Siccome U è diffeomorfo a un disco del piano, esiste un'omotopia $\Psi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ di classe C^1 a tratti a estremi fissi fra σ_0 e la curva costante $\sigma_1 \equiv p$. Il Corollario 3.2.1 ci fornisce allora un'omotopia C^1 a tratti $\tilde{\Psi} : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ a estremi fissi fra la curva $\tilde{\sigma}_0$ e il sollevamento $\tilde{\sigma}_1 \equiv \tilde{p}_1$ di σ_1 . In particolare, si deve avere $\tilde{p}_2 = \tilde{\sigma}_0(b) = \tilde{\sigma}_1(b) = \tilde{p}_1$, e quindi F è iniettiva. \square

Il ragionamento fatto nella parte finale della dimostrazione precedente ci permette infine di concludere che le superfici semplicemente connesse non ammettono rivestimenti non banali:

Proposizione 3.2.3. ⁷ *Sia $F : \tilde{S} \rightarrow S$ un rivestimento liscio fra superfici. Se S è semplicemente connessa, allora F è un diffeomorfismo.*

3.3 Superfici complete

Abbiamo visto che le superfici con curvatura Gaussiana non positiva non possono essere compatte (Lemma 2.1.2). In questo ultimo paragrafo vogliamo dimostrare che ogni superficie completa con curvatura Gaussiana non positiva

⁷Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 379

è rivestita da un piano (teorema di Cartan-Hadamard). In particolare ogni superficie completa semplicemente connessa con curvatura Gaussiana non positiva è diffeomorfa a un piano.

Diamo alcune definizioni e proposizioni preliminari:

Definizione 3.3.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. La funzione $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$ data da*

$$d_S(p, q) = \inf\{L(\sigma) \mid \sigma : [a, b] \rightarrow S \text{ è una curva } C^\infty \text{ a tratti da } p \text{ a } q\}$$

è detta distanza intrinseca di S .

Definizione 3.3.2. *La distanza d_S si dice completa se ogni successione che sia di Cauchy per d_S è convergente in S .*

Definizione 3.3.3. *Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ la cui distanza intrinseca sia completa sarà detta completa (ossia S è uno spazio metrico completo rispetto alla distanza d_S).*

Vale la seguente

Proposizione 3.3.1. ⁸ *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Allora per ogni $p \in S$ e $v \in T_p S$ esiste una geodetica $\sigma : I \rightarrow S$ tale che $0 \in I, \sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Inoltre, se $\tilde{\sigma} : \tilde{I} \rightarrow S$ è un'altra geodetica soddisfacente le stesse condizioni allora σ e $\tilde{\sigma}$ coincidono in $I \cap \tilde{I}$. In particolare, per ogni $p \in S$ e $v \in T_p S$ esiste un intervallo aperto massimale $I_v \subseteq \mathbb{R}$ e un'unica geodetica $\sigma_v : I_v \rightarrow S$ tale che $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma_v'(0) = v$.*

Definizione 3.3.4. *Sia S una superficie, e $p \in S$. Indichiamo con*

$$\mathcal{E}_p = \{v \in T_p S \mid 1 \in I_v\}$$

l'insieme dei vettori $v \in T_p S$ tali che σ_v sia definita almeno nell'intervallo $[0, 1]$. Allora la mappa esponenziale $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow S$ di S in p è definita da $\exp_p(v) = \sigma_v(1)$.

La mappa esponenziale gode di buone proprietà:

⁸Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 254

Proposizione 3.3.2. ⁹ Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Allora:

1. l'applicazione $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow S$ è di classe C^∞ ;
2. $d(\exp_p)_O = id$, e, in particolare, \exp_p è un diffeomorfismo in un intorno di O in $T_p S$ con un intorno di p in S .

La precedente proposizione ci permette di introdurre alcune definizioni:

Definizione 3.3.5. Se $p \in S$ e $\delta > 0$ sia $B_p(O, \delta) = \{v \in T_p S \mid \|v\| < \delta\}$ la palla di centro l'origine e raggio $\delta > 0$ nel piano tangente a p . Il raggio di iniettività $\text{inj rad}(p)$ di S in p è il più grande $\delta > 0$ tale che $\exp_p : B_p(O, \delta) \rightarrow S$ sia un diffeomorfismo con l'immagine. Se $0 < \delta < \text{inj rad}(p)$, chiameremo l'insieme $B_\delta(p) = \exp_p(B_p(O, \delta))$ palla geodetica di centro p e raggio δ . Le geodetiche uscenti da p , cioè le curve della forma $t \mapsto \exp_p(tv)$, sono dette geodetiche radiali; le curve immagine tramite \exp_p delle circonferenze di centro l'origine in $T_p S$ e raggio minore di $\text{inj rad}(p)$ sono dette circonferenze geodetiche. Infine, posto $B_\delta^*(p) = B_\delta(p) \setminus \{p\}$, il campo radiale $\partial/\partial r : B_\delta^*(p) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è definito da

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q = \sigma'_v(1) \in T_q S$$

per ogni $q = \exp_p(v) \in B_\delta^*(p)$.

Lemma 3.3.1. ¹⁰ Dati $p \in S$ e $0 < \delta < \text{inj rad}(p)$, sia $B_\delta(p) \subset s$ una palla geodetica di centro p . Allora:

1. per ogni $q = \exp_p(v) \in B_\delta^*(p)$ si ha $\|\partial/\partial r\| \equiv 1$ e $\|d(\exp_p)_v(v)\| = \|v\|$;
2. (Lemma di Gauss) il campo radiale è ortogonale a tutte le circonferenze geodetiche contenute in $B_\delta^*(p)$, e, in particolare,

$$\langle d(\exp_p)_p(v), d(\exp_p)_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

per ogni $v, w \in T_p S$.

⁹Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 264

¹⁰Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 266

Teorema 3.3.1. (Hopf-Rinow)¹¹ Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. la distanza intrinseca d_S è completa;
2. per ogni $p \in S$ la mappa esponenziale \exp_p è definita su tutto $T_p S$;
3. esiste un punto $p \in S$ per cui la mappa esponenziale \exp_p è definita su tutto $T_p S$;
4. ogni insieme di S chiuso e limitato (rispetto a d_S) è compatto.

Lemma 3.3.2.¹² Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e siano $p \in S$ e $0 < \delta < \text{inj rad}(p)$. Dato $v \in B_p(O, \delta)$, indichiamo con $\sigma_v : I_v \rightarrow S$ la geodetica uscente da p tangente a v . Dato $w \in T_p S$ ortogonale a v e $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo, definiamo $\Sigma : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow B_\delta(p)$ ponendo

$$\Sigma(s, t) = \exp_p(t(v + sw));$$

in particolare, $\Sigma(0, t) = \sigma_v(t)$. Sia $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$J(t) = \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, t) = d(\exp_p)_{tw}(tw) \in T_{\sigma_v(t)} S.$$

Allora

1. $J(0) = O$ e $J(1) = d(\exp_p)_v(w)$;
2. $\frac{d}{dt} J(0) = w$;
3. $J(t)$ è ortogonale a $\sigma'_v(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$;
4. $\frac{d^2}{dt^2} J \equiv -\|v\|^2 (K \circ \sigma_v) J$.

Ora, sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa, in particolare per ogni $p \in S$ la mappa esponenziale \exp_p è definita su tutto il piano tangente $T_p S$. La proprietà cruciale delle superfici con curvatura Gaussiana non positiva è che la mappa esponenziale aumenta le lunghezze dei vettori tangenti:

¹¹Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 294

¹²Per la dimostrazione si veda Abate [2006], pag. 300

Proposizione 3.3.3. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa con curvatura Gaussiana K non positiva e $p \in S$. Allora*

$$\forall v, w \in T_p S \quad \|d(\exp_p)_v(w)\| \geq \|w\|. \quad (3.1)$$

In particolare \exp_p è un diffeomorfismo locale.

Dimostrazione. Se $v = O$ la (3.1) è ovvia. Se $v \neq O$, il Lemma 3.3.1 ci dice che $\|d(\exp_p)_v(v)\| = \|v\|$, e che se w è ortogonale a v allora $d(\exp_p)_v(w)$ è ortogonale a $d(\exp_p)_v(v)$; quindi possiamo limitarci a dimostrare (3.1) per i vettori w ortogonali a v . Infatti, se v è ortogonale a w , ogni vettore $a \in T_p S$ può essere scritto come

$$a = xv + yw \quad \text{con} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

e

$$\|a\|^2 = x^2\|v\|^2 + y^2\|w\|^2.$$

Quindi, per la linearità di $d(\exp_p)_v$, otteniamo

$$d(\exp_p)_v(a) = xd(\exp_p)_v(v) + yd(\exp_p)_v(w)$$

e per il Lemma 3.3.1 (punti (1) e (2)) abbiamo

$$\begin{aligned} \|d(\exp_p)_v(a)\|^2 &= x^2\|d(\exp_p)_v(v)\|^2 + y^2\|d(\exp_p)_v(w)\|^2 = \\ &= x^2\|v\|^2 + y^2\|d(\exp_p)_v(w)\|^2. \end{aligned}$$

Se dimostriamo che $\|d(\exp_p)_v(w)\| \geq \|w\|$ otteniamo la tesi.

Siccome S è completa, l'applicazione $\Sigma : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow S$ data da

$$\Sigma(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$$

è ben definita e di classe C^∞ . Definiamo allora $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$J(t) = \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, t) = d(\exp_p)_{tv}(tw) \in T_{\sigma_v(t)} S,$$

dove $\sigma_v : \mathbb{R} \rightarrow S$ è la geodetica $\sigma_v(t) = \exp_p(tv)$ uscente da p e tangente a v . Il Lemma 3.3.2 ci dice che $J(0) = O$, $(d/dt)J(0) = w$ e $\langle J(t), \sigma'_v(t) \rangle \equiv 0$.

Inoltre, $J(1) = d(\exp_p)_v(w)$; quindi il nostro obiettivo è diventato dimostrare che $\|J(1)\| \geq \|w\|$.

Prima di tutto, grazie al Lemma 3.3.2 (punto (4)) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle J, \frac{d}{dt} J \right\rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} J, \frac{d}{dt} J \right\rangle + \left\langle J, \frac{d^2}{dt^2} J \right\rangle = \left\| \frac{d}{dt} J \right\|^2 + \left\langle J, -\|v\|^2 (K \circ \sigma_v) J \right\rangle = \\ &= \left\| \frac{d}{dt} J \right\|^2 - \|v\|^2 (K \circ \sigma_v) \|J\|^2 \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

grazie al fatto che $K \leq 0$ ovunque. Essendo $J(0) = O$, questo implica che $\langle J, (d/dt)J \rangle \geq 0$; quindi

$$\frac{d}{dt} \left\| \frac{d}{dt} J \right\|^2 = 2 \left\langle \frac{d^2}{dt^2} J, \frac{d}{dt} J \right\rangle = -2\|v\|^2 (K \circ \sigma_v) \left\langle J, \frac{d}{dt} J \right\rangle \geq 0,$$

di nuovo per l'ipotesi sul segno della curvatura Gaussiana. In particolare

$$\left\| \frac{d}{dt} J(t) \right\|^2 \geq \left\| \frac{d}{dt} J(0) \right\|^2 = \|w\|^2$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Da questo segue che, sempre per ogni $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \|J\|^2 &= 2 \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d}{dt} J, J \right\rangle = 2 \left\| \frac{d}{dt} J \right\|^2 + 2 \left\langle J, \frac{d^2}{dt^2} J \right\rangle \geq \\ &\geq 2\|w\|^2 - 2\|v\|^2 (K \circ \sigma_v) \|J\|^2 \geq 2\|w\|^2. \end{aligned}$$

Fissato un $\tau \in [0, 1]$ e integrando rispetto a t tra 0 e τ abbiamo

$$\frac{d}{dt} \|J\|^2 \Big|_{t=\tau} - \frac{d}{dt} \|J\|^2 \Big|_{t=0} \geq 2\|w\|^2 \tau.$$

Per l'arbitrarietà di τ ciò implica:

$$\frac{d}{dt} \|J\|^2 \geq 2\|w\|^2 t + \frac{d}{dt} \|J\|^2(0) \quad \forall t \in [0, 1]$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \|J\|^2 \geq 2\|w\|^2 t + 2 \left\langle \frac{d}{dt} J(0), J(0) \right\rangle = 2\|w\|^2 t.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento si ha:

$$\|J\|^2 \geq \|w\|^2 t^2 + \|J(0)\|^2 = \|w\|^2,$$

e ponendo $t = 1$ otteniamo $\|J(1)\|^2 = \|w\|^2 t^2$, come voluto.

Dunque abbiamo dimostrato (3.1). In particolare da questo segue che il differenziale $d(\exp_p)_v$ di \exp_p è iniettivo per ogni $v \in T_p S$, per cui \exp_p è un diffeomorfismo locale. \square

Per semplicità introduciamo la seguente

Definizione 3.3.6. *Un'applicazione $F : S_1 \rightarrow S_2$ di classe C^∞ fra superfici è detta espansiva se $\|dF_p(v)\| \geq \|v\|$ per ogni $p \in S_1$ e ogni $v \in T_p S_1$.*

Ogni applicazione espansiva è un diffeomorfismo locale. Ma se S_1 è completa possiamo essere più precisi:

Proposizione 3.3.4. *Ogni applicazione espansiva $F : \tilde{S} \rightarrow S$ fra superfici, con \tilde{S} completa, è un rivestimento liscio.*

Dimostrazione. Siccome sappiamo che F è un diffeomorfismo locale, per il Teorema 3.2.1 ci basta dimostrare che F ha la proprietà del sollevamento C^1 .

Cominciamo a far vedere che possiamo sollevare le curve C^1 a tratti uscanti da un punto dell'immagine di F . Sia $\sigma : [0, l] \rightarrow S$ una curva C^1 a tratti con $\sigma(0) = p = F(\tilde{p})$. Siccome F è un diffeomorfismo locale, esiste un intorno $\tilde{U} \subseteq \tilde{S}$ di \tilde{p} tale che $F|_{\tilde{U}}$ è un diffeomorfismo; in particolare, $F(\tilde{U})$ è aperto in S . Per continuità, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\sigma([0, \varepsilon]) \subset F(\tilde{U})$; quindi ponendo $\tilde{\sigma} = (F|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \sigma : [0, \varepsilon] \rightarrow \tilde{S}$ abbiamo trovato un sollevamento di σ su $[0, \varepsilon]$. Chiaramente possiamo ripetere questo ragionamento a partire da qualsiasi punto del sostegno di σ contenuto nell'immagine di F . Quindi l'insieme

$$A = \{t \in [0, l] \mid \text{esiste un sollevamento } \tilde{\sigma} : [0, t] \rightarrow \tilde{S} \text{ di } \sigma \text{ con } \tilde{\sigma}(0) = \tilde{p}\}$$

è aperto in $[0, l]$. Sia $t_0 = \sup A$; se dimostriamo che $t_0 \in A$, allora necessariamente $t_0 = l$, per cui abbiamo sollevato σ su tutto $[0, l]$, come richiesto.

Scegliamo una successione $\{t_n\} \subset A$ convergente a t_0 ; vogliamo prima di tutto dimostrare che $\{\tilde{\sigma}(t_n)\}$ ha un punto d'accumulazione in \tilde{S} . Supponiamo per assurdo che non ce l'abbia. Essendo \tilde{S} completa, il Teorema 3.3.1 di Hopf-Rinow implica che la distanza intrinseca $d_{\tilde{S}}(\tilde{p}, \tilde{\sigma}(t_n))$ deve divergere per $n \rightarrow +\infty$. Allora abbiamo che $L(\tilde{\sigma}|_{[0, t_n]}) \rightarrow +\infty$. Ma F è espansiva; quindi

$L(\sigma|_{[0,t_n]}) \geq L(\tilde{\sigma}|_{[0,t_n]})$, per cui anche $L(\sigma|_{[0,t_n]})$ dovrebbe divergere, mentre invece converge a $L(\sigma|_{[0,t_n]})$.

Dunque a meno di prendere una sottosuccessione possiamo supporre che $\tilde{\sigma}(t_n)$ converga a un punto $\tilde{q} \in \tilde{S}$. Per continuità, $F(\tilde{q}) = \sigma(t_0)$; in particolare, $\sigma(t_0)$ appartiene all'immagine di F . Sia $\tilde{U} \subseteq \tilde{S}$ un intorno aperto di \tilde{q} su cui F è un diffeomorfismo; in particolare, $F(\tilde{U})$ è un intorno aperto in S di $\sigma(t_0)$. Siccome \tilde{q} è un punto di accumulazione di $\{\tilde{\sigma}(t_n)\}$, possiamo trovare un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\tilde{\sigma}(t_{n_0}) \in \tilde{U}$. Inoltre, esiste un intorno aperto $I \subseteq [0, l]$ di t_0 tale che $\sigma(I) \subset F(\tilde{U})$. Quindi possiamo definire un sollevamento di σ su I con $(F|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \sigma$. Siccome $(F|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \sigma(t_{n_0}) = \tilde{\sigma}(t_{n_0})$, questo sollevamento deve coincidere con $\tilde{\sigma}$ su $I \cap [0, t_0)$, e quindi abbiamo trovato un sollevamento di σ su $[0, t_0]$. In particolare, $t_0 \in A$, come voluto.

Abbiamo quindi dimostrato che siamo in grado di sollevare tutte le curve C^1 a tratti che escono da un punto dell'immagine di F . Ora, se $q \in S$ è un punto qualsiasi, possiamo sempre trovare una curva C^1 a tratti $\sigma : [0, l] \rightarrow S$ da un punto $p \in F(\tilde{S})$ a q . Se $\tilde{\sigma}$ è un sollevamento di σ abbiamo allora $F(\tilde{\sigma}(l)) = \sigma(l) = q$, per cui $q \in F(\tilde{S})$. Dunque F è suriettiva, e abbiamo finito. \square

Mettendo insieme le Proposizioni 3.3.3 e 3.3.4 otteniamo l'enunciato del teorema di **Cartan-Hadamard**, che descrive la struttura topologica di una superficie completa con curvatura Gaussiana non positiva:

Teorema 3.3.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa con curvatura Gaussiana non positiva. Allora per ogni $p \in S$ la mappa esponenziale $\exp_p : T_p S \rightarrow S$ è un rivestimento liscio. In particolare, se S è semplicemente connessa allora S è diffeomorfa a un piano.*

Dimostrazione. Infatti, la Proposizione 3.3.3 ci dice che \exp_p è espansiva, e quindi è un rivestimento per la Proposizione 3.3.4. Infine, l'ultima affermazione segue subito dalla Proposizione 3.2.3. \square

Osservazione 3.3.1. Esistono superfici complete non semplicemente connesse con curvatura Gaussiana sempre negativa; un esempio è la catenoidale (Fig. 3.2).

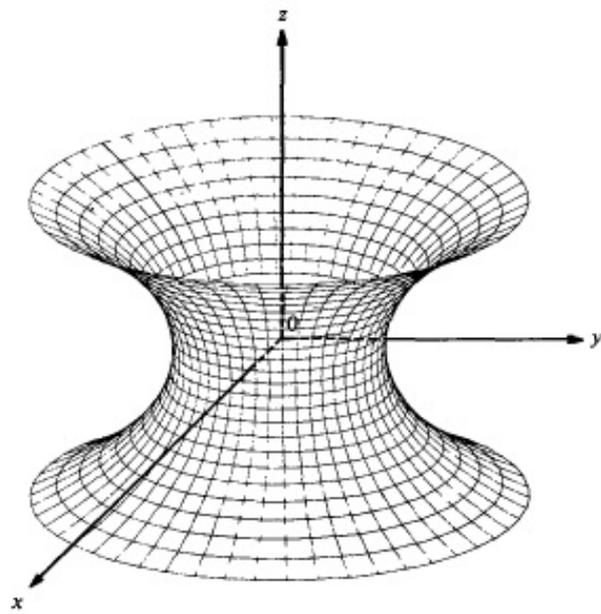


Figura 3.2:

Bibliografia

- [1] M.P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [2] A. Goetz. *Introduction to differential geometry*. Reading, Massachusetts Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [3] M. Abate E. Tivena. *Curve e superfici*. Springer, Milano, 2006.