

Prima prova intermedia di
Fisica Matematica I
28.04.08

Esercizio 1

Si consideri il sistema unidimensionale conservativo del secondo ordine

$$\ddot{x} = -V'(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad V(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\arctan(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. Tracciare il diagramma di fase (nel piano x, \dot{x}) del sistema.
2. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni (oscillazioni con energia prossima al minimo del potenziale) attorno alla posizione di equilibrio stabile $x = 0$.
3. Determinare la velocità di fuga e discuterne brevemente il significato.

Esercizio 2

Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 + ay, \\ \dot{y} = 2y(x - 2) \end{cases}$$

1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}^+$, si determinino i punti di equilibrio, se ne studi la natura locale e si discuta la stabilità non lineare.
2. Nel caso $a = 0$, si tracci il ritratto di fase del sistema.
3. Nel caso $a = 0$, integrare il sistema (ovvero, fornire le espressioni per $x(t)$ e $y(t)$) con dato iniziale $x(0) = 10$ e $y(0) = 1$ e fornire il tempo necessario affinché tale orbita raggiunga la sua massima distanza dalla varietà invariante $y = 0$.