ALCUNI ESEMPI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Versione preliminare

Dario Bambusi*
Dipartimento di Matematica dell'Università,
Via Saldini 50, 20133 MILANO, Italy.

disponibili nell'ultima versione in http://www.mat.unimi.it/˜ bambusi

* e-mail:dario.bambusi@unimi.it

28.12.06

0.1 Teoria

1. In questo primo paragrafo vengono introdotti ed illustrati il concetto di equazione differenziale ed elementi della relativa teoria.

2. Per equazione differenziale si intende una relazione che lega tra loro il valore di una funzione, il valore delle sue derivate e il valore delle variabili indipendenti. Noi qui ci occuperemo solo di equazioni in cui la funzione in oggetto è una funzione che ad un'unica variabile indipendente associa un'unica variabile dipendente. Tipicamente le equazioni differenziali governano processi evolutivi, ad esempio l'evoluzione nel tempo della popolazione presente in una determinata area, oppure la quantita' di materiale radioattivo presente in un certo campione o il numero di individui infetti quando si studi il propagarsi di una malattia. Per essere definiti indicheremo sempre con t (tempo) la variabile indipendente, mentre adotteremo per la variabile dipendente nomi diversi a seconda del contesto. In ambito astratto useremo per la variabile dipendente la lettera P in omaggio all'applicazione alla teoria delle popolazioni.

Uno degli esempi più semplici di equazione differenziale è dato dall'espressione

$$P' = P$$

Con questa notazione si intende che la funzione incognita $P = P(t)$ deve avere la proprietà che in ogni istante la sua derivata prima $P'(t)$ coincide con il valore $P(t)$ della funzione stessa nel medesimo istante t. Cioè vale

$$P'(t) = P(t) \tag{1}$$

per tutti i tempi in cui la funzione è definita.

3. Le equazioni differenziali che consideremo saranno tutte *del primo ordine* cioe contenenti solo la derivata prima della funzione e *in forma normale*, cioè della forma

$$P' = f(P, t) \ . \tag{2}$$

In questo corso tratteremo quasi solo casi in cui la funzione f in realtà non dipende dal tempo, cioè equazioni della forma

$$P' = f(P) \ , \tag{3}$$

che sono dette appunto equazioni *indipendenti dala tempo.*

4. Una funzione $P = P(t)$ si dice *soluzione dell'equazione differenziale (2)* se per ogni tempo t per cui è definita soddisfa a

$$P'(t) = f(P(t), t) \ . \tag{4}$$

Si consideri ad esempio l'equazione differenziale

$$P' = \lambda P \ , \tag{5}$$

con λ un parametro reale; allora, per le note proprietà dell'esponenziale si ha che, per ogni scelta della costante reale c, la funzione $P(t) := ce^{\lambda t}$ è soluzione di (5), mentre ad esempio la funzione $\tilde{P}(t) := t$ non è soluzione poichè si ha che la sua derivata, cioè 1, coincide con $\lambda\tilde{P}(t)$ per $t = 1/\lambda$, ma non per tutti gli altri valori di t.
5. L'esempio più semplice di equazione differenziale è :

$$P' = 0 \ ,$$

in cui la funzione f è identicamente nulla.

Come visto nell studio delle applicazioni del teorema di Lagrange, l'unica soluzione di tale equazione è data da $P(t) = c$ (costante indipendente dal tempo). Si osservi come, se si conosce il valore della quantità P in un certo istante, allora la costante c risulta univocamente determinata. Cosí se si sa che per $t = 0$ la quantità incognita vale 1 allora si trova che varrà 1 per tutti i tempi.
6. Appena più complicato è risolvere l'equazione differenziale

$$P' = f(t) \ , \tag{6}$$

in cui la funzione f dipende dal tempo ma non dalla variabile dipendente P. Per definizione stessa di primitiva si ha che la soluzione $P(t)$ è una primitiva della funzione $f(t)$. Ricordando che la funzione integrale di f definita come

$$\int_0^t f(\tau)d\tau$$

è una primitiva di f la soluzione di (6) si può scrivere nella forma

$$P(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau + c \ . \tag{7}$$

Si vede anche in questo caso che l'equazione (6) ha infinite soluzioni, tante quanti sono i valori della costante c. Come nel caso del punto **5**, la costante c ha l'interpretazione di valore della quantità P all'istante $t = 0$. Infatti dalla equazione (7) segue $P(0) = c$. Come conseguenza si ha dunque che se si conosce il valore di P all'istante iniziale allora esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale in questione che all'istante zero assuma il valore considerato.

Un esempio esplicito è fornito da $P' = t$ (la velocità aumenta uniformemente nel tempo). In tal caso integrando si ha $P(t) = t^2/2 + c$.
7.Diamo qui alcuni ulteriori esempi.

- Si consideri l'equazione $P' = \frac{1}{2P}$. É facile verificare che la funzione $P = \sqrt{t+c}$ soddisfa a tale equazione. Infatti si ha $P' = \frac{1}{2\sqrt{t+c}} = \frac{1}{2P}$. Come nei punti precedenti è possibile determinare la costante c se si conosce il valore iniziale di P; in questo caso si ha $P(0) = \sqrt{c}$ e quindi, chiamando P_0 il valore di P all'istante zero si trova $c = P_0^2$.
- Un'altro esempio (molto importante) è dato dall'equazione (5). Come già osservato la sua soluzione è data da $P(t) = ce^{\lambda t}$. Anche qui c ha l'interpretazione di valore di P all'istante 0. Cioè sapendo che per $t = 0$ si ha $P(0) = P_0$ segue $c = P_0$ e $P(t) = P_0e^{\lambda t}$.

Un esempio numerico si ha ponendo $\lambda = 1$, caso in cui l'equazione si riduce all'equazione (1). Assumendo che all'istante iniziale P valga 3, la soluzione assume la forma $P(t) = 3e^t$.

- Si consideri ora l'equazione

$$P' = \lambda P + \alpha \tag{8}$$

con α un costante assegnata. La sua soluzione è data da

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t} - \frac{\alpha}{\lambda}(1 - e^{\lambda t}) \ , \tag{9}$$

dove ancora una volta la costante P_0 ha l'interpretazione di valore iniziale della quantità P.

8. In tutti gli esempi precedenti si è messo in evidenza come data un'equazione differenziale essa ammetta infinite soluzioni, parametrizzate da una costante numerica e come la conoscenza del valore di P all'istante iniziale permetta di determinare un'unica soluzione dell'equazione in considerazione. Tutto ciò è estremamente naturale alla luce dell'interpretazione che abbiamo dato al punto **2** delle equazioni differenziali come relazioni che governano l'andamento di alcuni processi. Più precisamente le equazioni differenziali costituiscono delle leggi di evoluzioni di alcuni fenomeni, leggi che stabiliscono come il processo evolve a partire da uno stato iniziale. Per questo la determinazione dello stato del sistema in un determinato istante richiede non solo la conoscenza della legge d'evoluzione (l'equazione differenziale), ma anche la conoscenza dello stato iniziale.

9.In generale non esistono formule per calcolare la soluzione di un'equazione differenziale, nel senso che non è possibile ricondurre la soluzione di un'equazione differenziale a operazioni "elementari" quali calcolo di integrali e inversione di funzioni[1]. Anzi la maggior parte delle equazioni differenziali presentano soluzioni che hanno comportamento caotico, cioè hanno la proprietà che soluzioni che partono vicine hanno un comportamento totalmente diverso. Ciononostante è possibile dimostrare che data un'equazione differenziale definita da una funzione f sufficiente regolare esiste sempre un'unica soluzione avente un valore assegnato all'istante iniziale.

10.*(Complementare).* L'ultima affermazione del punto precedente è resa precisa in questo punto.

Definizione 0.1. *Il problema costituito dal sistema*

$$\begin{aligned} P' &= f(P,t) \\ P(0) &= P_0 \end{aligned} \tag{10}$$

si dice problema di Cauchy; la seconda delle equazioni (10) si dice condizione iniziale, e P_0 *si dice dato iniziale.*

[1] cosa dimostrata da una teoria iniziata da Liouville

Teorema 0.2. *Si consideri il problema di Cauchy (10), e si assuma che la funzione f sia derivabile sia come funzione di P che come funzione del tempo t allora esiste $T > 0$ ed una unica funzione $P : (-T, T) \to \mathbb{R}$, di classe C^1, che risolve (10).*

11. *(Complementare).* Le equazioni indipendenti dal tempo rientrano nella classe delle cosiddette *equazioni a variabili separabili* per le quali esiste una semplice procedura di soluzione. Si consideri dunque un'equazione della forma

$$P' = f(P) \ . \tag{11}$$

Teorema 0.3. *Si consideri l'equazione (11) e sia P_0 un valore in cui $f(P_0) \neq 0$, allora esiste un intorno di tale punto in cui la funzione $P = P(t)$ è invertibile. Sia $t = t(P)$ la sua inversa. Allora la funzione $t(P)$ soddisfa all'equazione differenziale*

$$t' = \frac{1}{f(P)} \ ,$$

la cui soluzione è

$$t(P) - t(P_0) = \int_{P_0}^{P} \frac{1}{f(p)} dp \tag{12}$$

La dimostrazione si trova applicando la regola di derivata della funzione inversa ed è omessa.

Val la pena di segnalare un modo di procedere formale che permette di ricordare bene la procedura di cui sopra. Essa fa riferimento alla notazione di Leibnitz per la derivata. Ricordo che, data una funzione $P = P(t)$ Leibnitz indicava la sua derivata con la notazione

$$\frac{dP}{dt} \tag{13}$$

avendo in mente il fato che la derivata non è altro che il rapporto tra l'incremento della variabile P e l'incremento del tempo t , quando gli incrementi in questione siano infinitesimi. La notazione (13) si trova introducendo la notazione dP per l'incremento infinitesimo di P e la notazione dt per l'incremento infinitesimo di t. Ricordo anche come tale notazione sia in accordo con la notazione universalmente adottata per l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ che rappresenta l'area di un rettangolo dalla base inifinitesima dx e altezza $f(x)$ sommato su tutti i valori delle x tra a e b. Utilizzando la notazione (13) per la derivata, l'equazione differenziale (11) assume la forma

$$\frac{dP}{dt} = f(P) \ ;$$

moltiplicando per dt e dividendo per f si trova

$$\frac{dP}{f(P)} = dt$$

e integrando tra 0 e t il lato destro e tra i corrispondenti valori di P, cioè P_0 e P il lato sinistro, si ottiene formula (12).

0.2 Alcuni Modelli

12. In questo paragrafo discuteremo alcuni modelli che conducono ad equazioni differenziali. Daremo in particolare l'equazione per il decadimento radioattivo, ed un'equazione che emerge dal problema della datazione di fossili basata sul decadimento radioattivo del carbonio 14. Daremo inoltre l'equazione delle popolazioni in un'area con risorse illimitate e in un'area con risorse limitate.

13. In un materiale radioattivo i nuclei degli atomi sono instabili e tendono a trasformarsi in nuclei di altro materiale. Tale fenomeno va sotto il nome di decadimento radioattivo. Si tratta di un fenomeno governato dalla meccanica quantistica, e come tale probabilistico. In particolare si trova che la probabilità p che un nucleo decada in certo tempo h è proporzionale al tempo h ed indipendente da tutti gli altri fattori. In particolare, data una certa massa di materiale contenente diciamo N atomi, segue che il numero di atomi che decadono nell'intervallo di tempo h è dato da pNh; si ha dunque

$$N(t+h) = N(t) - pNh$$

da cui

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -pN \ .$$

Supponendo ora che i numeri in gioco siano cosí grandi che la funzione N possa essere considerata a valori reali invece che interi[1]e che h sia piccolo, si può pensare alla funzione $N(t)$ come ad una funzione derivabile ed approssimare il suo rapporto incrementale con la sua derivata, ottenendo cosí l'equazione differenziale

$$N' = -pN \tag{14}$$

la cui soluzione fornisce la quantità di materiale dell'elemento originario presente dopo un tempo t. La quantità p che governa il processo è tipica del materiale. L'equazione (14) coincide con l'equazione (5) con $\lambda = -p$, e la sua soluzione nel caso presente assume la forma

$$N(t) = N_0 e^{-pt} \ , \tag{15}$$

da cui si vede che la quantità di materiale diminuisce esponenzialmente col tempo. Si ritrova inoltre la nota legge del decadimento radioattivo secondo cui, in ogni materiale, esiste un certo tempo τ dopo cui la quantità di materiale si dimezza (tempo di dimezzamento). Tale τ è dato dalla relazione $N(t+\tau) = N(t)/2$ cioè, inserendo in (15)

$$e^{-p\tau} = \frac{1}{2} \ , \Longleftrightarrow \tau = \frac{\ln 2}{p} \simeq \frac{0.6931}{p} \ ,$$

[1] Con questo si intende che, se N è dell'ordine di 10^{23} (numero di Avogadro, cioè numero di atomi tipicamente contenuto in un certo numero di grammi di materiale), tipicamente le variazioni di un'unità non sono misurabili

che formisce il legame tra la probabilità di decadimento e il tempo di dimezzamento.
14. In particolare è possibile sfruttare il fenomeno del decadimento radioattivo per datare i reperti fossili tramite il cosiddetto procedimento del carbonio 14. L'idea è la seguente: il carbonio 14 è un isotopo radioattivo del carbonio, prodotto dall'interazione dell'atmosfera con i raggi cosmici. Esso entra nell'organismo di piante ed animali assieme al carbonio ordinario tramite tutti i processi connessi all'attività vitale degli esseri viventi. Quando l'organismo è in vita si stabilisce un equilibrio per cui la quantità di carbonio 14 che decade è soppiantata da quella ingerita dall'esterno. Appena l'essere vivente muore il carbonio smette di essere ingerito, e quindi la quantità di carbonio 14 diminuisce nel corso del tempo. Ora, la quantità di carbonio 14 all'equilibrio si puo' misurare negli organismi attualmente in vita, e, misurando la quantità di carbonio 14 presente attualmente in un fossile, si può risalire alla data in cui l'organismo è morto.

Sia dunque x la quantità di carbonio 14 presente in un organismo in vita. Essa soddisferà all'equazione

$$x' = -px + c_i - c_e \tag{16}$$

dove il primo termine a destra è dovuto al decadimento radioattivo, c_i rappresenta la quantità di carbonio 14 ingerita nell'unità di tempo, e c_e la quantità espulsa nell'unità di tempo. Posto $c := c_i - c_e$, e osservato che si ha necessariamente $c > 0$. L'equazione diventa quindi

$$x' = -px + c \tag{17}$$

equazione della forma (8) la cui sol è della forma (9), che mutatis mutandis diviene

$$x(t) = x_0 e^{-pt} + \frac{c}{p}(1 - e^{-pt}) \ ,$$

ed è facile rendersi conto che per ogni dato iniziale si ha $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty \equiv c/p$, cioè tutte le soluzioni dell'equazione convergono a c/p. In altre parole la quantità di carbonio 14 presente nell'organismo tende a stabilizzarsi al valore c/p.

Quando l'organismo muore l'equazione diventa quella del decadimento radioattivo, cioè (14). Si ha dunque che la corrispondente soluzione è

$$x(t) = \frac{c}{p} e^{-pt} \ ,$$

dove abbiamo preso come dato iniziale la quantità di carbonio presente nell'organismo al momento della morte, cioè c/p e t rappresenta il tempo passato dalla morte dell'organismo. Misurando la radiottività del reperto (cioè $\dot{x}$) si risale immediatamente a t.
15. Si consideri un territorio su cui vive una popolazione il cui numero di individui all'istante t sia $P(t)$. Vogliamo conscere il numero di individui all'istante $t+h$. Supponiamo che la variazione nel numero di individui sia legata solo alla nascita di nuovi individui e alla morte (naturale) di altri. Esplicitamente facciamo l'ipotesi che in media nasca un nuovo individuo all'anno ogni n abitanti, e che ogni anno muoia un individuo ogni k abitanti. Esprimiamo quindi il tempo in anni, e calcoliamo la popolazione al tempo $t+h$ essa è data da

$$P(t+h) = P(t) + \frac{P(t)}{n} h - \frac{P(t)}{k} h$$

da cui

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right)P(t)$$

e, approssimando il rapporto incrementale a sinistra con la derivata

$$P'=\lambda P\ ,\quad \lambda:=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right) \tag{18}$$

che è l'equazione per la dinamica di una popolazione in un territorio con risorse illimitate. Abbiamo già incontrato questa equazione al punto **4** e scritto la sua soluzione nella forma

$$P(t)=P_0e^{\lambda t}\ ,$$

che è la legge di crescita esponenziale delle popolazioni.

Mentre nel caso del decadimenso radioattivo il fenomeno è caratterizzato dal tempo di dimezzamento, qui il fenomeno è caratterizzato dal *tempo di raddoppio*. Esiste infatti un tempo caratteristico τ su cui la popolazione raddoppia. Per determinarlo basta cercare un tempo τ tale che

$$P(t+\tau)=2P(t).$$

Sostituendo l'espressione di $P(t)$ in tale espressione e facendo le dovute semplificazioni si trova

$$e^{\lambda\tau}=2$$

che fornisce il valore di τ:

$$\tau=\frac{0.6931}{\lambda}\ .$$

16La situazione è diversa se si è in presenza di un territorio con risorse limitate che quindi provoca l'istaurarsi di una competizione tra gli individui. In tal caso l'equazione (18) deve essere modificata. Infatti vi è un fattore di mortalita' da aggiungere al lato destro, fattore proporzionale alla probabilità che due individui si incontrino. Questo porta all'equazione

$$P'=\lambda P-\mu P^2$$

la cui soluzione è

$$P(t)=\frac{P_0e^{t\lambda}}{1-\frac{\mu}{\lambda}P_0+\frac{\mu}{\lambda}P_0e^{t\lambda}} \tag{19}$$

con P_0 il valore della popolazione all'istante $t=0$. Da (19) si vede in particolare che qualunque sia il dato iniziale P_0

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\frac{\lambda}{\mu}\ ,$$

cioè la popolazione tende a stabilizzarsi ad un valore indipendente dalla popolazione iniziale.