Elementi di Elettromagnetismo

In queste note presenterò alcuni risultati per la dinamica del campo elettromagnetico in interazione con la materia, rappresentata da una particella molto localizzata nello spazio.

Il modello di partenza è costituito dalle equazioni di Maxwell accoppiate con l'equazione di Newton con forza data dalla forza di Lorentz.

I risultati che mi propongo di mostrare sono

- Esistenza di una quantità conservata interpretabile come energia
- Validità delle equazioni delle onde per i potenziali elettromagnetici
- Formula dei potenziali ritardati per il campo generato da una

carica elettrica nel limite puntiforme

- Potenza emessa da una carica puntiforme in moto accelerato.

2. Il Modello

Il modello è costituito dalle equazioni di Maxwell

1) $\text{div}\, E = 4\pi\rho$ — Eq. di Poisson

2) $\text{rot}\, E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ — Eq. induzione elettrica

3) $\text{div}\, B = 0$ — Non esistono monopoli magnetici

4) $\text{rot}\, B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j$ — Biot-Savart + Maxwell

Qui $\vec{E}$ è il vettore campo elettrico, B il vettore campo magnetico, c è la velocità della luce, ρ la densità di carica elettrica e j la densità di corrente elettrica.

Nel seguito non assegneremo né la dinamica delle cariche né quella delle correnti.

Al contrario assumeremo che ~~esse~~ siano dovute al moto di una particella.
Più precisamente indicheremo con $\vec{q}$ la posizione del baricentro della particella e assumeremo che sia assegnata una funzione $\mathcal{S}(x)$ $\quad \mathcal{S} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, con supporto contenuto in una sfera di raggio piccolo, r, con la proprietà che se il baricentro ~~della~~ particella si trova in $\vec{q}$ allora la densità di carica è

$$\rho_q(x) = \mathcal{S}(x-q) \qquad (5)$$

,

cioè $\mathcal{S}$ è la distribuzione di carica intorno a q. Assumeremo che $\mathcal{S}$ sia assegnata una volta per tutte. Ne segue che la corrente elettrica corrispondente ad un moto di legge oraria $q(t)$ è

$$j_q(t) = \dot{q}(t)\, \mathcal{S}(x - q(t)) \qquad (6)$$

Per chiudere il sistema delle equazioni di Maxwell assumiamo che la dinamica della particella soddisfi all'equazione di Newton con forza di Lorentz

$$m\ddot{q} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}(x)\,\rho_q(x)\,d^3x + \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{J}_q(x)\wedge\vec{B}(x)\,d^3x$$

oppure

$$m\ddot{\vec{q}} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}(x)\,D(\vec{x}-\vec{q})\,d^3x + \frac{1}{c}\frac{\dot{q}}{c}\wedge\int_{\mathbb{R}^3} D(x-q)\wedge B(x)\,d^3x \qquad (7)$$

3. Conservazione dell'energia

Si moltiplichi (2) scalarmente per $\vec{B}$ e (4) per $\vec{E}$. Allora si ha

$$\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{E}\cdot\vec{J}$$

e, sottraendo la seconda alla prima, osservando che [illegible]

5

$$\frac{1}{c}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}|B|^2$$

$$\frac{1}{c}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}|E|^2$$

e utilizzando l'identità A.1 si ha

$$\operatorname{div}(E\wedge B)+\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2+B^2\right)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}\cdot\vec{E}=0$$

che si usa scrivere nella forma

$$\operatorname{div}\left(c\frac{E\wedge B}{4\pi}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right)+\vec{j}\cdot\vec{E}=0 \quad (8)$$

Se $j\equiv 0$ (cosa vera nel vuoto o se le cariche sono ferme) questo si scrive nella forma di una legge di conservazione

$$\operatorname{div}\left(c\,\frac{E\wedge B}{4\pi}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right)=0$$

e si riconosce che

$$\mathcal{E}=\frac{E^2+B^2}{8\pi} \quad (9)$$

rappresenta una densità conservata, (densità di energia), mentre

$$\vec{S} = c\,\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{4\pi} \qquad (10)$$

rappresenta la densità di corrente relativa (densità di quantità di moto).

La quantità $\vec{S}$ è detta "vettore di Poynting".

Torniamo al caso generale (8) e integriamo tale equazione su un volume V, allora usando il teorema della divergenza si ha

$$(11) \quad \int_{\partial V} \vec{S}\cdot\vec{n}\, d\sigma + \frac{d}{dt}\int_V \frac{E^2+B^2}{8\pi}\, d^3x + \int_V \vec{J}(x)\cdot\vec{E}(x) = 0.$$

Per dare una forma migliore a tale equazione usiamo (7): moltiplichiamo (7) scalarmente $\times\ \dot{\vec{q}}$ ottenendo

$$m\,\dot{\vec{q}}\cdot\ddot{\vec{q}} = \int_{\mathbb{R}^3} \dot{\vec{q}}\cdot\vec{E}\,\rho(x-q)\, d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{J}\cdot\vec{E}\, d^3x,$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{J}\cdot\vec{E}\, d^3x .$$

Se ora si assume che il volume V (cf (11)) contenga il supporto di $\Theta(x-q(t))$ per tutti i tempi di interesse, si trova

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\, d^3x ,$$

e sostituendo in (11)

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V \frac{E^2+B^2}{8\pi} d^3x + \frac{1}{2}m\dot{q}^2\right] = -\int_{\partial V} \vec{S}\cdot\vec{n}\, d\sigma \qquad (12)$$

che mostra come la quantità tra parentesi quadre sia interpretabile come energia, meccanica + elettromagnetica, e cambi solo a causa del flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie ∂V.

Se si prende come V la palla di raggio R, denotata con B_R, e si assume che $\vec{S}$ decade in modo sufficientemente rapido quando $R \to \infty$ si trova la legge di conservazione

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{E^2+B^2}{8\pi} d^3x + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 = \text{costante}. \qquad (13)$$

Se la particella fosse anche soggetta a forze meccaniche conservative di potenziale V, allora (13) dovrebbe essere sostituita da

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{E^2+B^2}{8\pi} + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) = \text{costante}. \qquad (13a)$$

<u>Oss</u> Vedremo nel seguito che non sempre $\vec{S}$ si annulla in modo "sufficientemente rapido".

Prima di proseguire si osservi che dalle equazioni di Maxwell segue

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \qquad (13b)$$

cioè la equazione di conservazione della carica elettrica.

Per ricavare (13b) si calcoli la derivata temporale di (1) e si sostituisca $\frac{\partial E}{\partial t}$ come ricavato da (4). Si trova

$$\operatorname{div} \mathring{E} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} B - 4\pi j) =$$

$$= -4\pi \operatorname{div} j = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{c. v. d.}$$

4. I potenziali elettromagnetici

Da (3) segue che esiste un campo vettoriale $\vec{A}(\vec{x})$ t.c.

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad (14)$$

(si vede l'appendice), sostituendo in (2) si trova poi

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

o

$$\mathrm{rot}\left(E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

da cui segue che esiste $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi\,,$$

oppure

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (15)\,.$$

$\vec{A}$ è detto potenziale vettore e φ è detto potenziale scalare. Tali quantità sono utili perché le equazioni di Maxwell possono essere scritte in modo particolarmente semplice in termini di $\vec{A}$ e φ. Si osservi in particolare che qualunque sia la forme di $\vec{A}$ e φ le equazioni (2) e (3) risultano essere automaticamente soddisfatte.

Per ricavare le equazioni cui devono soddisfare $\vec{A}$ e φ si sostituiscono (14) e (15) in (1) e (4). Si ha

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{div}\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = 4\pi\rho$$

cioè

$$-\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}A = 4\pi\rho \qquad (16)$$

e

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}A + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}j$$

da cui usando l'eq. (A.3)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}j \qquad (17)$$

che è un'equazione delle onde modificata dal termine tra parentesi tonde; se esso svanisse $\vec{A}$ soddisferebbe identicamente all'equazione delle onde. Si osservi che è possibile riscrivere anche (16) nella forma

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div} A+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=4\pi\rho \quad (18)$$

che mostra come se si avesse

$$\operatorname{div} A+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\equiv 0 \qquad (19)$$

oltre anche φ soddisferebbe all'equazione delle onde.

La giustificazione dell'uso dell'equazione delle onde per studiare le equazioni di Maxwell consta di due passi. (1) far vedere che se (19) è soddisfatta all'istante iniziale e se in più dati iniziali soddisfano ad un'ovvia condizione di compatibilità, allora la soluzione dell'equazione delle onde soddisfa anche alle equazioni (18) (19).

La seconda questione è: qualsiasi soluzione delle equazione delle eq. (18) (19) può essere ottenuta come soluzione dell'equazione delle onde?

Qui la risposta è delicata e si basa sulla cosiddetta scelta del gauge.

Cominciamo a risolvere la prima questione

<u>Proposizione</u> Siano $\varphi_0, A_0, \mathring{\varphi}_0, \mathring{A}_0$ t.c.

$$\mathrm{div}\, A_0 + \frac{1}{c}\mathring{\varphi}_0 = 0 ,$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\varphi_0 + \frac{1}{c}\mathring{A}_0\right) = 4\pi\rho$$

e siano $\varphi(x,t)$, $A(x,t)$ soluzioni dei problemi di Cauchy

(20) $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 4\pi\rho \qquad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \mathring{\varphi}_0(x)$$

(21) $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = \frac{4\pi}{c} j \qquad A(x,0) = A_0(x), \quad A_t(x,0) = \mathring{A}_0(x) ,$$

allora $\forall t$ vale

$$\mathrm{div}\, A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad \square$$

<u>Corollario</u> Le soluzioni appena costruite soddisfano anche (18) (17).

Dimostrazione della proposizione

Sia

$$F(x,t) = \operatorname{div} A(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) ,$$

mostriamo che F soddisfa all'equazione delle onde e che le condizioni iniziali impongono $F(x,0) = F_t(x,0) = 0$, da cui segue che l'unica soluzione dell'equazione delle onde con tali dati iniziali è $F(x,t) \equiv 0$.

Calcolando la divergenza di (21) e sommando a $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$(20) si trova in effetti

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} F - \Delta F = 0 .$$

Resta da verificare che $F_t(x,0) = 0$. Questo si trova calcolando

$$F_t(x,0) = \operatorname{div} A_t(x,0) + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,0) =$$

$$= \operatorname{div} A_t(x,0) + c\Delta\varphi_0 + c4\pi\rho =$$

$$= c\left(\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\varphi_0 + \frac{1}{c}\mathring{A}_0\right) + 4\pi\rho\right) = 0$$

D

Vogliamo ora rispondere alla domanda inversa: data una soluzione delle equazioni di Maxwell è possibile ottenerla come soluzione delle equazioni delle onde (20) e (21).

La risposta si basa sulla cosiddetta arbitrarietà nella scelta del gauge.

Per capire di cosa si tratti si osservi che gli oggetti fisici sono i campi elettrico e magnetico, non i potenziali A e φ.

Si osservi poi che dati dei campi E e B i potenziali non sono univocamente definiti. Infatti per ogni funzione Λ il campo associato ai potenziali A, φ è lo stesso di quello associato ai potenziali

$$A' = A + \text{grad}\,\Lambda \qquad (22)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad (23)$$

La trasformazione (22, 23) dei potenziali si chiama <u>Trasformazione di gauge</u>.

Mostriamo ora che data una qualunque coppia di potenziali è sempre possibile, tramite un'opportuna "scelta del gauge Λ" trovare nuovi potenziali che soddisfano a (19). Dati infatti A, φ imponiamo che

$$\operatorname{div} A' + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} ,$$

quindi basta scegliere Λ che soddisfi all'equazione delle onde con sorgente data da

$$\mathcal{J}(x,t) \equiv \operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} .$$

Oltre alla scelta (19) che conduce all'equazione delle onde sono possibili altre scelte. La più comune è $\operatorname{div} A = 0$.

Imporre

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

si dice "Scegliere il gauge di Lorentz",

mentre imporre $\operatorname{div} A = 0$ si dice scegliere il gauge di Coulomb.

Campo generato da una carica in moto

Supponiamo che si conosca il moto della particella corrispondente ad una soluzione delle equazioni di Maxwell Lorentz. Voglio utilizzare la formula dei potenziali ritardati per ricavare delle informazioni sulla dinamica dei campi. Voltaglia →

Nel seguito ammetteremo che sia dato una funzione $q(t)$ che descrive il moto della particella, vogliamo calcolare potenziali $\varphi(x,t)$ e $A(x,t)$ che risolvono le equazioni delle onde (20) e (21). A tale scopo bisogna anche assegnare il valore iniziale dei campi e della loro derivata temporali. Si osservi intanto che la soluzione delle equazioni (20), (21) con dato iniziale $A_0, \mathring{A}_0, \varphi_0, \mathring{\varphi}_0$ è data dalla somma della soluzione di

$$\frac{1}{c^2}\ddot{A} - \Delta A = 0\ , \quad \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} - \Delta \varphi = 0$$

In particolare vogliamo mostrare che la particella perde energia con una potenza proporzionale al quadrato della sua accelerazione.

Più esattamente vogliamo mostrare che l'energia contenuta in una sfera di raggio sufficientemente grande diminuisce sempre.

con tali dati iniziali più la somma delle soluzione delle equazioni (20), (21) con dati iniziali nulli.

Prima di tutto ci occupiamo della soluzione dell'equazione omogenea e dimostriamo il seguente lemma.

<u>Lemma</u> Se $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ hanno supporto compatto e $\varphi^0(x,t)$ è la soluzione dell'equazione $\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}-\Delta\varphi=0$ con tale dato iniziale, allora $\forall x$ fissato esiste t_x t.c. $\varphi(x,t)=0 \quad \forall t>t_x$.

<u>Dim</u> Dalla formula di Kirchoff $\varphi(x,t)$ è ottenuta tramite integrazione dei dati iniziali su una sfera centrata in x e avente raggio ct. Se ct è abbastanza grande allora l'intersezione di tale sfera con il supporto dei dati iniziali è vuoto Δ

In realtà è possibile mostrare un risultato più forte e cioè che ∀ dato iniziale ad energia finita si ha che l'energia contenuta in una sfera di raggio qualsiasi R tende a zero al tendere di t all'infinito.

Veniamo ora ad analizzare la soluzione di (20) e (21) con dato iniziale nullo.

Dalla formula dei potenziali ritardati si ha

$$\varphi(x,t) = \int_{|x-x'|<ct} \frac{\delta\left(x' - q\left(t - \frac{|x-x'|}{c}\right)\right)}{|x-x'|} d^3x' \qquad (25)$$

$$A(x,t) = \frac{1}{c} \int_{|x-x'|\leq ct} \frac{\dot{q}\left(t-\frac{|x-x'|}{c}\right) \delta\left(x' - q\left(t-\frac{|x-x'|}{c}\right)\right)}{|x-x'|} d^3x' \qquad (26)$$

Assumiamo ora che $\forall t$ si abbia

$$|q(t)| \leq \overline{K} < \infty \qquad (24).$$

<u>Osservazione</u> L'equazione (24) è sicuramente vera se le particelle soddisfa all'equazione di Lorentz con in più una forza meccanica di potenziale $V(q)$ illimitata, cioè t.c.

$$V(q) \to +\infty \quad se \quad |q| \to +\infty.$$

Ciò segue dalla conservazione dell'energia. □

Cominciamo ora ad analizzare (25). Vogliamo approssimare tale espressione trascurando tutte le correzioni dovute al fatto che il raggio a della particella (al rapporto della carica) è non nullo.

Si denoti

$$t' := t - \frac{|x - x'|}{c} \qquad (27)$$

e si osservi che $\Theta(x' - q(t'))$ è diverso da zero solo se $|x' - q(t')| < a$, da cui segue che

$$x' = q(t') + O(a) \qquad (28)$$

in tutto il dominio di integrazione.

Segue

$$|x - x'| = |x - q(t') - (x' - q(t'))| = |x - q(t')| + O(a) \qquad (29)$$

Sostituendo in (27) si ha quindi

$$t' = t - \frac{|x - q(t')|}{c} + O(a)$$

che mostra come a meno di correzioni di ordine a t' possa essere definito da

$$t' = t - \frac{|x - q(t')|}{c} \qquad (30)$$

che mostra come in tale approssimazione il tempo ritardato t' è funzione dei soli t ed x.

Sostituendo in (25) si trova, trascurando ancora quantità di ordine a,

$$\varphi(x,t) = \int_{|x-x'|\leq ct} \frac{\rho(x' - q(t'))}{|x - q(t')|} d^3x' =$$

$$= \frac{1}{|x - q(t')|} \int_{|x-x'|\leq ct} \rho(x' - q(t'))\, d^3x' =$$

$$= \frac{1}{|x - q(t')|} \int_{|x - x'' + q(t')|\leq ct} \rho(x'')\, d^3x''$$

Mostriamo che se $t > \frac{|x| + 2(\underline{K} + a)}{c}$ allora il dominio di integrazione contiene l'intero supporto di ρ e quindi si trova

$$\varphi(x,t) = \frac{e}{|x - q(t')|} \quad ,$$

dove

$$e = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x'')\, dx'' \quad .$$

Infatti, da (24) e da $|x''| < a$ segue $|x'' + q(t')| \leq \underline{K} + a$. Ma la sfera di centro x e raggio $|x + 2(\underline{K} + a)|$ (dominio di integrazione) contiene l'intera sfera di raggio $\underline{K} + a$, quindi anche il supporto di ρ.

Abbiamo quindi mostrato che nell'approssimazione $a \ll 1$ si ha

$$\varphi(x,t) = \frac{e}{|x - q(t')|} \qquad (31)$$

dove t' è definito da

(30). Analogamente si trova

$$A(x,t) = \frac{\dot{q}(t')\, e}{|x - q(t')|} \qquad (32)$$

Le espressioni (31) e (32) sono dette potenziali di Liénard Wiechert e rappresentano il potenziale di una particella nel limite puntiforme.

Si osservi che in particolare (31) corrisponde al potenziale elettrostatico di una particella puntiforme che si trova in $q(t')$, cioè nel punto in cui si trovava la particella al tempo t', cioè esattamente quel punto t.c. la sua distanza da x è quella percorsa dalla luce nel tempo $t-t'$, cioè la luce (il campo) deve avere il tempo necessario a propagarsi da $q(t')$ a x.

Ci proponiamo ora di calcolare il flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera di raggio R, quando $R \gg 1$.

Anche in questo calcolo teniamo solo il termine dominante, cioè il 1°

termine dello sviluppo di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in $\frac{1}{R}$.

Per cominciare approssimiamo (quando $|x|=R$)

$$|x-q(t')| \simeq |x| ,$$

da cui, sostituendo nella definizione di t'

$$t' = t - \frac{|x-q(t')|}{c} \simeq t - \frac{|x|}{c}$$

e sostituendo nei potenziali di Liénard Wiechert

$$\varphi(x,t) = \frac{e}{|x|} , \qquad (33)$$

$$A(x,t) = \frac{e\,\dot{q}\left(t - \frac{|x|}{c}\right)}{c\,|x|} \qquad (34) .$$

Prima di calcolare i campi ricordiamo che

$$\partial_i |x| = \partial_i \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{x_i}{|x|} ,$$

da cui

$$E_i(x,t) = -\partial_i \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} =$$

$$= \frac{e\, x_i}{|x|^3} - \frac{e}{c^2}\frac{\ddot{q}(t-\frac{|x|}{c})}{|x|} \simeq -\frac{e}{c^2}\frac{\ddot{q}(t-\frac{|x|}{c})}{|x|}$$

Dove si è trascurato il primo termine che decade come $\frac{1}{R^2}$ mentre si è tenuto il secondo che decade solo come $\frac{1}{R}$.

Si ha poi

$$\partial_i A_j = \frac{e}{c}\partial_i\left[\frac{\dot{q}_j(t-\frac{|x|}{c})}{|x|}\right] =$$

$$= \frac{e}{c}\left[-\frac{x_i}{|x|^3}\dot{q}_j(t-\frac{|x|}{c}) - \frac{1}{|x|}\ddot{q}_j(t-\frac{|x|}{c})\frac{x_i}{c|x|}\right]$$

$$\simeq -\frac{e}{c^2}\frac{x_i}{|x|^2}\ddot{q}_j(t-\frac{|x|}{c})$$

dove si è trascurato il termine proporzionale a $\frac{1}{R^2}$.

Si ha dunque

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\, A = \nabla \wedge A = -\frac{e}{c^2} \frac{\vec{x} \wedge \ddot{\vec{q}}\left(t - \frac{|x|}{c}\right)}{|x|^2}$$

e quindi

$$\vec{S} = c\,\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{4\pi} = +\frac{e^2}{c^3 4\pi} \frac{\ddot{\vec{q}} \wedge \left(\vec{x} \wedge \ddot{\vec{q}}\right)}{|x|^3},$$

da cui, usando la formula del doppio prodotto vettore

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

si trova

$$\vec{S} = \frac{e^2}{c^3 4\pi}\left[\frac{\vec{x}\, \ddot{\vec{q}}^{\,2} - \ddot{\vec{q}}\,(\vec{x} \cdot \ddot{\vec{q}})}{|x|^3}\right]$$

dove $\ddot{\vec{q}}$ è valutato in $t' = t - \frac{|x|}{c}$.

Infine vogliamo calcolare la quantità di energia che esce da una sfera di raggio R nell'unità di tempo, cioè il flusso di $\vec{S}$ attraverso tale sfera.

Esso è dato da

$$\Phi_R = \int_{\partial B_R} \vec{S}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \frac{e^2}{R^3 c^3 4\pi}\left[\ddot{q}^2 \int_{\partial B_R} \vec{x}\cdot\vec{n}\, d\sigma - \int_{\partial B_R} (\ddot{\vec{q}}\cdot\vec{n})(\vec{x}\cdot\ddot{\vec{q}})\, d\sigma\right]$$

dove si è usato che $\ddot{q}(t-\frac{R}{c})$ è costante su ∂B_R.

Perché per una sfera $\vec{n}=\vec{e}_r$ si ha $\vec{x}\cdot\vec{n}=R$ e $\ddot{\vec{q}}\cdot\vec{n} = \dfrac{\vec{x}\cdot\ddot{\vec{q}}}{R}$, da cui

$$\Phi_R = \frac{e^2}{R^3 c^3 4\pi}\left[\ddot{q}^2 R \int_{\partial B_R} d\sigma - \frac{1}{R}\int_{\partial B_R} (\ddot{\vec{q}}\cdot\vec{x})^2\, d\sigma\right] =$$

$$= \frac{e^2}{c^3}\ddot{q}^2 - \frac{e^2}{c^3 R^4 4\pi}\int_{\partial B_R} (\ddot{\vec{q}}\cdot\vec{x})^2 d\sigma \; .$$

Per calcolare tale integrale conviene introdurre un sistema di assi cartesiani in cui $\ddot{q}$ abbia la direzione di $\vec{e}_z$, allora, usando le corrispondenti coordinate sferiche si ha

$$(\ddot{\vec{q}}\cdot\vec{x})^2 = \ddot{q}^2 z^2 = \ddot{q}^2 R^2 \cos^2\vartheta$$

e quindi

$$\int_{\partial B_R} (\ddot{q}\cdot\vec{x})^2 d\sigma = R^2 R^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= R^4 2\pi \left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi R^4}{3} \, ,$$

da cui

$$\Phi_R = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\varphi}^2(t') \, ,$$

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

cioè il flusso è indipendente da R e proporzionale all'accelerazione della particella al quadrato, ma valutato al tempo ritardato.

Ciò si interpreta come il fatto che la particella irraggia energia in modo proporzionale al quadrato della propria accelerazione.

Tenendo conto della conservazione dell'energia si può dunque pensare che la particella irraggia energia, o più precisamente l'energia contenuta in una sfera diminuisce sempre e utilizzando l'energia come funzione di Lyapunov si può concludere che la particella va a fermarsi nei punti di minimo del potenziale.

Se ad esempio una particella carica è soggetta ad una forza armonica allora essa non potrà muoversi su orbite circolari perché la sua energia deve diminuire e va a cadere sul punto d'equilibrio.

Segnalo che una dimostrazione rigorosa di questa affermazione è alquanto delicata ed è stata ottenuta solo recentemente.

Alcune identità Vettoriali

Vale

$$\boxed{\vec{X}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{Y} - \vec{Y}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{X} = \mathrm{div}\,(\vec{Y}\wedge\vec{X})} \qquad (A.1)$$

Infatti, indicando con

$$\varepsilon^{kj\ell} = \begin{cases} 0 & \text{se } (k,j,\ell) \text{ non è una permutazione di } (1,2,3) \\ |\sigma| & \text{se } (k,\ell,j) = \sigma(1,2,3) \quad (1 \text{ se è una permutazione pari } -1, \text{ altrimenti}) \end{cases}$$

si ha

$$(\mathrm{rot}\,Y)^k = \varepsilon^{k\ell j}\,\partial_\ell Y_j$$

dove si è sottintesa la somma su ℓ, j. Quindi

$$\vec{X}\cdot \mathrm{rot}\,Y = X_k\,\varepsilon^{k\ell j}\,\partial_\ell Y_j \qquad \text{(somme sottintese)}$$

e quindi

$$\vec{X}\cdot \mathrm{rot}\,Y - \vec{Y}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{X} = \varepsilon^{k\ell j} X_k \partial_\ell Y_j - \varepsilon^{j\ell k} Y_j \partial_\ell X_k =$$

$$= \varepsilon^{k\ell j} X_k \partial_\ell Y_j + \varepsilon^{k\ell j} Y_j \partial_\ell X_k =$$

$$= \varepsilon^{k\ell j}(X_k \partial_\ell Y_j + Y_j \partial_\ell X_k) = \varepsilon^{k\ell j}\,\partial_\ell X_k Y_j =$$

$$= -\varepsilon^{\ell k j}\,\partial_\ell X_k Y_j = -\partial_\ell\,(\varepsilon^{\ell k j} X_k Y_j) =$$

$$= -\mathrm{div}\,(X\wedge Y) = \mathrm{div}\,(Y\wedge X)$$

$\square$

$$[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}X)]^k = \varepsilon^{klj}\,\partial_l\,[\mathrm{rot}X]_j =$$

$$= \varepsilon^{klj}\left[\partial_l\,\varepsilon^{jim}\,\partial_i X_m\right] = \varepsilon^{klj}\varepsilon_{jim}\left[\partial_l\partial_i X_m\right] \qquad (A.2)$$

dove ho definito $\varepsilon_{jim} = \varepsilon^{jim}$.

Ora vale

$$\varepsilon^{klj}\varepsilon_{jim} = \delta^k_i\,\delta^l_m - \delta^k_m\,\delta^l_i\ ,$$

da cui (A.2) è uguale a

$$\delta^k_i\,\delta^l_m\,\partial_l\partial_i X_m - \delta^k_m\,\delta^l_i\,\partial_l\partial_i X_m =$$

$$= \partial_k\partial_m X_m - \partial_i\partial_i X_k = [\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,X]_k - [\Delta X]_k$$

e quindi

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,X = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,X - \Delta X} \qquad (A.3)$$

- $\boxed{\text{Se } \mathrm{rot}\,X = 0 \Rightarrow \exists\,\varphi : X = -\mathrm{grad}\,\varphi}$ (A4)
  (teor di Schwartz)

- Se $\boxed{\mathrm{div}\,X = 0 \Rightarrow \exists\,\vec{A} : X = \mathrm{rot}\,\vec{A}}$ (A.5)

Non dimostrerò la seconda ma darò una spiegazione euristica di (A.4) e (A.5).

Si sviluppi $\vec{X}(\vec{x})$ in trasformata di Fourier, cioè si consideri la funzione $\hat{\vec{X}}(\vec{k})$ t.c.

$$\vec{X}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\vec{X}}(k) e^{ik\cdot x} d^3k$$

allora si ha

$$\partial_j \vec{X}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} i k_j \hat{\vec{X}}(k) e^{ik\cdot x} d^3k,$$

da cui

$$\operatorname{div} X = \sum_j \partial_j X^j = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} i\, \vec{k} \cdot \hat{\vec{X}}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k$$

Da cui segue che se $\operatorname{div} X = 0$ allora $\forall \vec{k}$ la sua trasformata di Fourier soddisfa

$$\vec{k} \cdot \hat{\vec{X}}(k) = 0$$

A4

cioè $\hat{\vec{X}}(k) \perp \vec{k}$. Quindi, per ogni k fissato esiste $\hat{\vec{A}}(k)$ t. c.

$$\hat{\vec{X}}(k) = i\vec{k} \wedge \hat{\vec{A}}(k),$$

da cui

$$\vec{X}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int i\vec{k} \wedge \hat{\vec{A}}(k)\, e^{ikx}\, d^3x =$$

$$= \mathrm{rot}\, A.$$

Questa non è una dimostrazione perché non ho controllato nulla sulla dipendenza da $\vec{k}$ di $\hat{A}(k)$.