

## ELEMENTI DI MECCANICA DEI FLUIDI FLUIDI PERFETTI

### 7.1 Il punto di vista euleriano: le equazioni dei fluidi perfetti

Il presente capitolo è ispirato al bellissimo classico libro di A. Sommerfeld, *Mecchanica dei continui deformabili*. Si veda anche L.Landau e E.Lifschitz *Mécanique des fluides*. Mir 1971.

#### 7.1.1 Deduzione delle equazioni

Sia  $D$  una regione di  $\mathbb{R}^3$ , riempita di un fluido, di cui si vuol studiare il movimento. Il punto di vista di Eulero è quello in cui l'incognita fondamentale del problema è il campo di velocità  $u(x, t)$ ,  $u : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $u(x, t)$  rappresenta la velocità della "particella di fluido" che si viene a trovare nel punto  $x$  al tempo  $t$  (si pensi ad esempio a tante particelle di polvere sospese nel fluido). Il punto di vista di Lagrange è invece quello di seguire il movimento di ogni ben individuata "particella di fluido". Per una discussione esplicita della connessione tra il punto di vista lagrangiano e quello euleriano, rimandiamo al prossimo paragrafo. Qui dovrebbe poter essere sufficiente l'affermazione che la connessione formale tra i due punti di vista si ha proprio nella interpretazione fisica del campo  $u$ ; infatti, se è assegnato il campo di velocità  $u = u(x, t)$ , allora il movimento di ogni particella di fluido è soluzione dell'equazione differenziale (nell'incognita  $x(t)$ )

$$\dot{x} = u(x, t), \quad (7.1)$$

da intendersi nel senso consueto delle equazioni a derivate ordinarie:  $x(t)$  è soluzione se per ogni  $t$  si ha

$$\frac{dx}{dt}(t) = u(x(t), t). \quad (7.2)$$

Si è dunque in una situazione simile a quella della meccanica dei punti, dove si considerano equazioni del tipo  $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$ , solo che ora si ha a che fare con equazioni del primo ordine. I più semplici esempi sono quello statico  $u = 0$ , e quello stazionario

$u = b$  (dove  $b$  è una costante), in cui l'equazione (7.1) ha soluzioni rispettivamente  $x(t) = x_0$ ,  $x(t) = x_0 + bt$ . Se il campo di velocità non dipende dal tempo il fluido si dice in regime *stazionario*, e la situazione è analoga alla meccanica dei punti nel caso autonomo.<sup>1)</sup>

La più importante formula che connette il punto di vista euleriano a quello lagrangiano è quella che esprime il campo di accelerazione  $a(x, t)$  del fluido in termini del campo di velocità  $u(x, t)$ , precisamente

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad})u \quad (7.3)$$

(da intendersi  $a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  ( $i = 1, 2, 3$ )). Infatti, se  $v(t) = u(x(t), t)$  è, per quanto detto sopra, la velocità della particella di fluido con movimento  $x = x(t)$ , usando la ben nota formula per la derivazione di una funzione di funzione e ricordando che  $a = \frac{dv}{dt}$ , segue subito la (7.3). Più in generale, se  $f(x, t)$  è una qualunque funzione definita in  $D \times \mathbb{R}$ , e la si pensa come una funzione del solo tempo  $t$  essendo  $x(t)$  un assegnato movimento soluzione di (7.1), si ha

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \text{grad} f. \quad (7.4)$$

La "derivata totale"  $\frac{df}{dt}$  viene detta anche *derivata materiale* o *sostanziale* o *lagrangiana*.

Si tratta ora di determinare l'equazione di base per l'incognita  $u(x, t)$ ; questa sarà l'equazione di Eulero nel caso del fluido perfetto o l'equazione di Navier-Stokes nel caso del fluido viscoso, o altre ancora, che differiscono tra loro per il diverso modo in cui si assume, fenomenologicamente, che le diverse porzioni di fluido agiscano l'una sull'altra: sempre però si tratta dell'equazione del moto del baricentro per ogni porzione di fluido. Ne diamo qui una deduzione secondo il più semplice procedimento possibile.

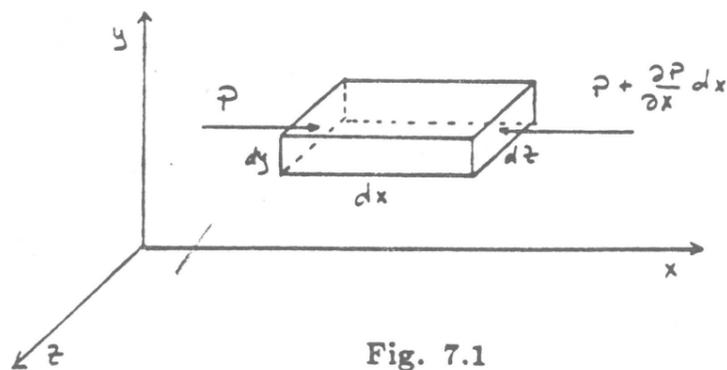


Fig. 7.1

<sup>1)</sup> In particolare, in regime stazionario sono ben definite, come oggetti geometrici, le *linee di corrente*, ovvero le curve tangenti in ogni punto al campo di velocità; esse costituiscono allora le traiettorie delle particelle di fluido. Certi risultati importanti, come il teorema di Bernoulli che illustreremo tra breve, si riferiscono al regime stazionario. Un esempio significativo di regime non stazionario, che studieremo più avanti, è quello del moto ondoso.

Poniamo l'attenzione su una regione fissata nello spazio, come in figura 7.1, e consideriamo il fluido che a un dato istante vi è contenuto. Per quanto riguarda l'azione delle porzioni adiacenti di fluido su ogni superficie di area  $d\sigma$ , assumiamo (*approssimazione del fluido perfetto*) che esse si riducano a una forza *normale* alla parete e di intensità  $p d\sigma$  ( $p = p(x, t)$  è la pressione); allora è immediato verificare che, a meno di termini di ordine superiore, il risultante (cioè la somma vettoriale) delle forze di pressione agenti sul volumetto può esprimersi nella forma

$$-\text{grad} p dV,$$

dove  $dV = dx dy dz$  è il volume della regione considerata. Infatti, ad esempio, per la componente lungo l'asse  $x$  si hanno i due termini  $p(x, t) dy dz - p(x + dx, t) dy dz$ ; ed essendo  $p(x + dx, t) = p(x, t) + \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) dx$  a meno di termini di ordine superiore, resta solo il contributo  $-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$  all'ordine più basso. In tal modo si sono dunque convertite le "forze superficiali" di pressione (proporzionali a  $d\sigma$ ) in "forze di volume" (proporzionali a  $dV$ ): *la somma (il risultante) delle forze di superficie è equivalente a un'unica forza di volume*.

In generale, agiranno sul volumetto anche forze esterne che non dipendono dalle altre porzioni di fluido, ma solo da quella considerata, e sono già proporzionali al volume  $dV$ : il caso più tipico è quello della forza peso  $-\rho g dV k$  dove  $\rho = \rho(x, t)$  è la densità (sicché  $\rho dV$  è la massa del volumetto) e  $k$  il versore rivolto verso l'alto; tali forze vengono dette *forze di volume*. Denoteremo in generale con  $f dV$  la forza di volume.

Dunque la prima equazione cardinale per la porzione di fluido considerato si scrive  $\rho dV a = f dV - \text{grad} p dV$ , ovvero, usando la (7.3) ed eliminando  $dV$ ,

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \text{grad})u \right] = f - \text{grad} p. \quad (7.5)$$

Si vede pertanto che l'equazione per il campo  $u$  fa riferimento a due nuove quantità, la densità  $\rho$  e la pressione  $p$ , che devono considerarsi anch'esse in generale incognite; dunque occorreranno altre due equazioni perché il problema risulti determinato, mentre si deve pensare assegnata la (densità di) forza di volume  $f$  in funzione di  $x, t$ , e della densità di massa  $\rho$ .

Per comprendere ciò, si ricerchi ad esempio se esiste una soluzione di equilibrio (o statica), cioè con  $u = 0$ , nel caso particolare in cui la forza esterna sia la forza peso,  $f = -\rho g k$ . Allora si annulla il primo membro della (7.5) e si resta con la condizione  $f - \text{grad} p = 0$ , ovvero

$$\text{grad} p = -\rho g k. \quad (7.6)$$

La (7.6) è dunque un'equazione alle derivate parziali nell'incognita  $p(x)$ , dipendente dall'altra incognita  $\rho$ . Un caso particolarmente semplice è quello dell'idrodinamica in cui si assume  $\rho = \text{cost}$  (fluidi incomprimibili), perché allora si resta con la sola incognita  $p$ . Si verifica immediatamente che in tal caso la soluzione è  $p(x) = -\rho g z - p_0$ , dove  $p_0$  è la pressione per  $z = 0$ .<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Un modo significativo di procedere è di osservare che si ha  $f = -\text{grad} V$ , con  $V(x) = \rho g z$ ,

Si osservi che l'equazione di Eulero (7.5) è non lineare, perché contiene il termine "quadratico" ( $\mathbf{u} \cdot \text{grad}$ ) e ciò la rende alquanto più complicata<sup>3)</sup> ad esempio delle equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico (con cariche e correnti assengate). In pratica, se si vogliono scrivere soluzioni esplicite, è inevitabile ricorrere a procedure di linearizzazione, come anche noi faremo in due casi particolari.

La prima equazione che si aggiunge all'equazione di Eulero è quella di *conservazione della massa*, o *equazione di continuità* per la massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (7.7)$$

Questa può ottenersi nel modo più semplice come segue. Consideriamo ancora la regione fissata nello spazio come nella figura 7.1. La massa  $m$  del fluido contenutovi all'istante  $t$  è allora data da  $\rho dV$ , e la derivata di questa rispetto al tempo è quindi  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ . D'altra parte la massa del fluido contenuto nel volumetto può variare solo perché entra o esce del fluido (principio di continuità, in assenza di pozzi e sorgenti). Ora, se  $\mathbf{n}$  è la normale ad una faccia, orientata verso l'esterno, e  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  è il campo di velocità, la quantità di fluido che entra nel volumetto attraverso quella faccia per unità di tempo e di superficie è evidentemente  $-\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . Osservando poi che per la faccia verticale di sinistra è  $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ , mentre per quella di destra è  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ , e che il campo vettoriale  $\rho \mathbf{u}$  va valutato in un caso nel punto  $\mathbf{x}$ , nell'altro caso nel punto  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , si ha che il contributo di tali due facce al flusso di massa è  $[-\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x} dx] dy dz$  dove  $u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}$ ; così il flusso attraverso le pareti è  $-\text{div}(\rho \mathbf{u}) dV$ , sicché si ottiene la (7.7).

L'ultima equazione, detta anche *equazione complementare*, è infine una relazione fenomenologica tra densità e pressione

$$\mathcal{F}(\rho, p) = 0, \quad (7.8)$$

caratteristica di ciascun fluido, che si assume ad esempio dalla termodinamica. Esempi elementari<sup>4)</sup> sono  $\rho = \text{cost}$  (detto "caso della idrodinamica"), e  $p = \text{cost} \cdot \rho$  (gas perfetto a temperatura fissata),  $p = \text{cost} \cdot \rho^\gamma$ ,  $\gamma > 1$  (gas perfetto adiabatico).

Abbiamo dunque lo schema delle equazioni dei fluidi perfetti

$$\begin{cases} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} \right] = \mathbf{f} - \text{grad } p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \mathcal{F}(\rho, p) = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

nelle incognite  $\mathbf{u}$  (campo di velocità),  $\rho$  (campo di densità),  $p$  (campo di pressione).

sicché l'equazione ha la forma  $\text{grad}(\rho g z + p) = 0$ ; dunque l'espressione tra parentesi è costante rispetto alle coordinate spaziali, e si ha la soluzione. Più in generale, si vede così che nel caso dell'idrodinamica ( $\rho = \text{cost}$ ) l'equilibrio è possibile soltanto se il campo  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  è un campo potenziale,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\rho \text{grad } \mathcal{V}(\mathbf{x})$ , e la pressione è allora data da  $p(\mathbf{x}) = -\rho \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \text{cost}$ .

<sup>3)</sup> L'equazione di Hopf  $u_t - uu_x = 0$  è proprio modellata sull'equazione di Eulero nel caso monodimensionale, per studiarne la nonlinearietà nel caso più semplice possibile.

<sup>4)</sup> Al di fuori di questi casi semplici diventa necessario introdurre altre incognite, come il campo di temperatura, e scrivere altre equazioni di natura termodinamica, come l'equazione di continuità per l'energia interna, che esprime il primo principio della termodinamica. Si giunge così alla non facile *termomeccanica dei mezzi continui*, della quale non ci occuperemo.

Tralasciamo qui ogni discussione dell'alquanto delicato problema dell'esistenza e unicità delle soluzioni per il sistema (7.9) di equazioni alle derivate parziali, anche nel caso più semplice di fluidi incomprimibili ( $\rho = \text{cost}$ ).<sup>5)</sup>

Storicamente, il primo lavoro significativo è quello di Daniele Bernoulli (*Hydrodynamica*, 1738), in cui tale autore ricava il suo teorema, di cui si dirà più avanti, prima della scoperta delle equazioni stesse di Eulero (1755), con un argomento che può considerarsi un'anticipazione del teorema di conservazione dell'energia. Nel caso di fluidi viscosi incomprimibili, le equazioni furono date da Navier (1822) e Stokes (1845), nella forma

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} \right] = \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (7.10)$$

dove il termine  $\mu \Delta \mathbf{u}$ , con  $\mu > 0$ , rende conto della viscosità ( $\Delta$  indica il laplaciano).<sup>6)</sup>

### 7.1.2 Complementi: connessione formale tra descrizione lagrangiana e descrizione euleriana dei corpi continui

Riportiamo qui una breve discussione sulle descrizioni lagrangiana ed euleriana per un generico corpo continuo (tipicamente un corpo elastico, di cui il fluido è un caso particolare).<sup>7)</sup> Se si pensa ad un corpo continuo, è molto spontaneo identificare ognuno dei suoi punti con la posizione che esso occupa nello spazio fisico ad un certo istante; quella posizione può dunque pensarsi come una etichetta attaccata a quel punto anche in tutti gli istanti successivi, in cui esso verrà ad occupare posizioni diverse dello spazio fisico.

Possiamo ulteriormente formalizzare il problema distinguendo tra due spazi: lo *spazio fisico*  $X$  e lo *spazio materiale*  $Z$ , essendo il primo il consueto spazio della geometria elementare e della fisica elementare, ed il secondo uno spazio di etichette per i punti del nostro sistema. Una *configurazione* del sistema è allora una applicazione

$$F: Z \rightarrow X, \quad (7.11)$$

che ad ogni punto materiale associa una corrispondente posizione nello spazio fisico. Denotando con  $\xi$  i punti di  $Z$  e con  $\mathbf{x}$  i punti di  $X$ , si ha allora

$$\mathbf{x} = F(\xi), \quad (7.12)$$

<sup>5)</sup> Il trattato di riferimento per questo problema è quello della matematica di Leningrado O.A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible fluids*, Gordon and Breach (New York and London, 1963).

<sup>6)</sup> Si noti che, trascurando il termine nonlineare, l'equazione ha forma simile a quella del calore, solo per un'incognita vettoriale anziché scalare.

<sup>7)</sup> Per una trattazione più completa, in cui si dà ampio spazio ai metodi geometrici della teoria dei campi, si veda J. Kijowski, *Elasticità finita e relativistica: introduzione ai metodi geometrici della teoria dei campi*; lezioni per il corso di Meccanica dei Continui redatte da D. Bambusi e G. Magli, (Università di Milano, 1988).

o anche, con il consueto abuso di notazione in cui si confonde il simbolo di una funzione con quello del suo valore.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi). \quad (7.13)$$

Corrispondentemente, un *movimento* è nient'altro che l'assegnazione di una configurazione ad ogni istante, e dunque una applicazione

$$f: Z \times \mathbb{R} \rightarrow X, \quad \mathbf{x} = f(\xi, t), \quad (7.14)$$

o anche

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t). \quad (7.15)$$

Abbiamo in tal modo una descrizione del movimento di ogni punto del corpo materiale in studio, e la differenza rispetto alla consueta trattazione dei corpi discreti consiste nel fatto che i punti del corpo materiale sono un continuo, ovvero è un continuo l'insieme delle loro etichette (il vettore  $\xi$  prende il posto del consueto indice intero  $i$  dei sistemi discreti). Questa descrizione della cinematica dei corpi continui si chiama *descrizione lagrangiana*.<sup>8)</sup> Evidentemente (se la funzione  $f$  è differenziabile) si definiscono la velocità e l'accelerazione di ogni punto materiale nel modo spontaneo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\xi, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(\xi, t), \\ \mathbf{a}(\xi, t) &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\xi, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, t) \equiv \ddot{\mathbf{x}}(\xi, t). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Veniamo ora alla descrizione euleriana. Questa è la descrizione tipica della *teoria dei campi*, in cui le variabili indipendenti sono quelle dei punti  $\mathbf{x}$  dello spazio fisico; si pensi tipicamente a come si descrive un campo di temperatura, assegnando il valore della temperatura in ogni fissato punto  $\mathbf{x}$  dello spazio fisico  $X$ , o analogamente il campo elettromagnetico, e così via. Dunque la descrizione euleriana della cinematica dei corpi continui è quella in cui una configurazione è rappresentata matematicamente da una applicazione

$$G: X \rightarrow Z, \quad (7.17)$$

che per ogni punto  $\mathbf{x}$  dello spazio fisico dice quale particella (o punto dello spazio materiale)  $\xi$  vi si trova o lo occupa. Chiaramente si supporrà che le funzioni  $F$  e  $G$  siano invertibili, e si ha allora

$$G = F^{-1}, \quad (7.18)$$

cioè  $G$  è l'applicazione inversa di  $F$ . Allo stesso modo un movimento sarà rappresentato da una applicazione

$$g: X \times \mathbb{R} \rightarrow Z, \quad (7.19)$$

ovvero

$$\xi = g(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t). \quad (7.20)$$

<sup>8)</sup> Si ripensi alla deduzione alla Lagrange dell'equazione della corda vibrante. Per semplicità di notazione, lì si era indicato con  $\mathbf{x}$  anziché con  $\xi$  l'etichetta del punto; ciò non creava confusione, perché, nel caso monodimensionale ivi considerato, la coordinata materiale  $\mathbf{z} = \xi$  non cambiava nel tempo, mentre cambiava la coordinata  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) \equiv u(\mathbf{x}, t)$  del punto materiale.

E' ora possibile venire alla descrizione euleriana per le velocità, perché basta prendere l'espressione già data nella descrizione lagrangiana, e sostituirvi  $\xi$  in funzione di  $\mathbf{x}$  e  $t$ ,  $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$ . Si ha così il *campo di velocità*  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  definito da

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\xi(\mathbf{x}, t), t), \quad (7.21)$$

o equivalentemente da

$$\mathbf{v}(\xi, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\xi, t), t). \quad (7.22)$$

Analogamente si procede a definire il *campo di accelerazioni* nella descrizione euleriana,  $\mathbf{a}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ , mediante la

$$\mathbf{a}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\xi(\mathbf{x}, t), t), \quad (7.23)$$

o equivalentemente

$$\mathbf{a}(\xi, t) = \mathbf{a}^{(e)}(\mathbf{x}(\xi, t), t).$$

Per il teorema di derivazione di una funzione composta, dalla (7.22) si ha allora

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\xi, t) &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\xi, t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right](\mathbf{x}(\xi, t), t) \\ \mathbf{a}^{(e)}(\mathbf{x}, t) &= \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right](\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Scriveremo poi, con abuso di notazione,  $\mathbf{a}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$  in luogo di  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  (come già si è fatto, ad esempio, nella (7.3)).

### 7.1.3 Modi diversi di dedurre le equazioni dei fluidi

Esistono diverse varianti delle deduzioni date sopra dell'equazione di Eulero e dell'equazione di continuità per la massa. Anzitutto, si possono considerare volumi finiti  $\Omega$  anziché volumetti infinitesimi, e allora gli integrali di superficie (forze di pressione, flusso di massa) si convertono in integrali di volume mediante il teorema di Gauss. Ad esempio, per l'equazione di continuità si ha che la massa uscente nell'unità di tempo in  $\Omega$  attraverso il contorno  $\partial\Omega$  è il *flusso* del campo vettoriale  $\rho\mathbf{u}$  attraverso  $\partial\Omega$ :

$$\frac{dm}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

ove  $m$  denota la massa contenuta in  $\Omega$ , mentre  $\mathbf{n}$  indica la normale a  $\partial\Omega$  rivolta verso l'esterno. Per il teorema di Gauss, il secondo membro si scrive  $-\int_{\Omega} \text{div}(\rho\mathbf{u}) dV$ ; d'altra parte, si ha  $\frac{dm}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$  (il volume è fisso!), e dunque  $\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} - \text{div}(\rho\mathbf{u}) \right] dV = 0$ . Per l'arbitrarietà del volume  $\Omega$  deve essere nullo l'integrando, e si ha la (7.7).

In maniera analoga si trasformano le forze superficiali di pressione in forze di volume. Per il risultante  $\mathbf{R}_{\partial\Omega}$  di tali forze sul contorno  $\partial\Omega$  si ha

$$\mathbf{R}_{\partial\Omega} = - \int_{\Omega} p \mathbf{n} d\sigma.$$

Sia ora  $e$  un vettore arbitrario. Allora si ha  $e \cdot \mathbf{R}_{\partial\Omega} = - \int_{\partial\Omega} pe \cdot \mathbf{n} d\sigma = \varphi_{\partial\Omega}(pe) = \int_{\Omega} \text{div}(pe) dV$ . Ma  $\text{div}(pe) = e \cdot \text{grad} p$  perché  $e$  non dipende da  $\mathbf{x}$ :<sup>9)</sup> dunque si ha  $e \cdot \mathbf{R}_{\partial\Omega} = -e \cdot \int_{\Omega} \text{grad} p d\Omega$ , e per l'arbitrarietà di  $e$  si conchiude

$$\mathbf{R}_{\partial\Omega} = - \int_{\Omega} \text{grad} p dV .$$

Un'altra variante è connessa al fatto che si può fare riferimento ad un volume (infinitesimo o finito) che non sia pensato fisso, ma sia seguito nel suo spostamento indotto dal campo di velocità. Se  $\Omega_t$  è l'evoluto di  $\Omega$  al tempo  $t$ , si stabilisce in generale che per ogni funzione  $f$  di  $\mathbf{x}$  e  $t$  vale<sup>10)</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f dV = \int_{\Omega_t} \rho \frac{df}{dt} dV . \quad (7.25)$$

## 7.2 Applicazione: propagazione del suono

In questo paragrafo mostreremo che le fluttuazioni di pressione in un fluido comprimibile soddisfano l'equazione di d'Alembert, con velocità caratteristica  $c$  uguale alla radice quadrata del coefficiente di comprimibilità. Ricordiamo che viene detta coefficiente di comprimibilità la quantità, sempre positiva,  $\frac{dp}{d\rho}$ ; si fa qui riferimento alla funzione

$$p = p(\rho) , \quad (7.26)$$

implicitamente definita<sup>11)</sup> dall'equazione complementare  $\mathcal{F}(\rho, p) = 0$ . E' questo il primo caso in cui incontriamo l'equazione di d'Alembert tridimensionale. Mostriamo poi, con un semplicissimo argomento, che la propagazione del suono è un fenomeno vibratorio di tipo longitudinale, nel senso che le particelle costituenti il fluido si muovono longitudinalmente, e non trasversalmente, rispetto alla direzione di propagazione delle onde acustiche.<sup>12)</sup>

La trattazione è particolarmente semplice nell'approssimazione in cui si trascurano le forze di volume, cioè si pone

$$\mathbf{f} = 0 ; \quad (7.27)$$

<sup>9)</sup> Più in generale, se  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ , si ha  $\text{div}(p\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \text{grad} p + p \text{div} \mathbf{a}$ .

<sup>10)</sup> E' questo il cosiddetto teorema del trasporto: si veda ad esempio Chorin e Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer (Berlino 1979), pag. 13.

<sup>11)</sup> Si esclude così il solo caso  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = 0$ , ovvero  $\rho = \text{cost}$  (fluidi incompressibili).

<sup>12)</sup> Invece, come è ben noto, nel caso delle onde elastiche generali (nei solidi), si hanno sia moti longitudinali sia moti trasversali: risulta dunque che i fluidi sono il caso particolare dei corpi elastici in cui, essendo nulla una delle due costanti caratteristiche dell'elasticità, risulta nulla la velocità di propagazione delle corrispondenti onde, che sono proprio quelle trasversali. Come è anche ben noto, le onde elettromagnetiche hanno invece carattere puramente trasversale (nel senso che entrambi i vettori  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  sono trasversali alla direzione di propagazione).

il caso generale sarà considerato successivamente. Per descrivere le piccole oscillazioni della densità e della pressione in un fluido comprimibile (tipicamente l'aria), si considera un suo *stato normale*: per definizione questo è una soluzione statica  $(\mathbf{u}_*, \rho_*, p_*)$  del sistema (7.9), cioè una soluzione particolare caratterizzata dall'essere  $\mathbf{u}_* = 0$ . Come mostra immediatamente l'equazione di Eulero, nella quale si annulla allora il primo membro, una tale soluzione statica richiede necessariamente che sia anche

$$\text{grad} p_* = 0 . \quad (7.28)$$

Da questa equazione si deduce che la pressione  $p_*$  corrispondente alla soluzione statica non dipende dal posto (sono nulle tutte le sue derivate spaziali); segue allora che anche  $\rho_*$ , non dipende dal posto. E' chiaro che  $\rho_*$  e  $p_*$  non dipendono neppure dal tempo; formalmente ciò segue dall'equazione di continuità, perché, ponendovi  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_* = 0$ , si deduce allora  $\frac{\partial \rho_*}{\partial t} = 0$ . In conclusione, abbiamo la soluzione particolare (*stato normale*)  $\mathbf{u}_*, \rho_*, p_*$  caratterizzata da

$$\mathbf{u}_* = 0 , \quad \frac{\partial \rho_*}{\partial t} = 0 , \quad \text{grad} p_* = 0 . \quad (7.29)$$

Consideriamo ora una soluzione  $\mathbf{u}, \rho, p$  che differisca di poco da quella dello stato normale. In altri termini, introducendo gli *scarti* (o *fluttuazioni*)  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\rho}, \tilde{p}$ , definiti da

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \tilde{\mathbf{u}} , \quad \rho = \rho_* + \tilde{\rho} , \quad p = p_* + \tilde{p} ,$$

(in particolare è  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ , poiché  $\mathbf{u}_* = 0$ ), consideriamo l'approssimazione in cui  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\rho}, \tilde{p}$  e le loro derivate possano ritenersi piccoli. Compriamo allora un procedimento di linearizzazione<sup>13)</sup> trascurando, nelle equazioni di Eulero, di continuità e complementare, i termini quadratici in  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\rho}, \tilde{p}$  o nelle loro derivate. Utilizzando le informazioni che abbiamo sulla soluzione statica, otteniamo così le equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho_* \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} = - \text{grad} \tilde{p} \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} - \text{div}(\rho_* \tilde{\mathbf{u}}) = 0 . \end{cases} \quad (7.30)$$

Derivando la seconda rispetto al tempo e usando la prima si ottiene allora l'equazione del secondo ordine  $\tilde{\rho}_{tt} - \text{div} \text{grad} \tilde{p} = 0$ ,<sup>14)</sup> ovvero

$$\tilde{\rho}_{tt} - \Delta \tilde{p} = 0 . \quad (7.31)$$

Per ottenere un'equazione "chiusa" nella fluttuazione di pressione  $\tilde{p}$ ,<sup>15)</sup> occorre eliminare la fluttuazione di densità  $\tilde{\rho}$ . A tal fine si usa l'equazione complementare nella forma (7.26), dalla quale segue, per il teorema di derivazione di una funzione composta,  $p_t(\rho) = \frac{dp}{d\rho}(\rho) \rho_t$ . Linearizzando, si ottiene subito

$$\tilde{p}_t = c^2 \tilde{\rho}_t , \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_*) ; \quad (7.32)$$

<sup>13)</sup> Questo procedimento è il medesimo già utilizzato nelle equazioni a derivate ordinarie, per ottenere le cosiddette equazioni alle variazioni.

<sup>14)</sup> Come di consueto, per una generica funzione  $f$  si è denotato  $f_{tt} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ .

<sup>15)</sup> Cioè contenente come incognita solo la  $\tilde{p}$ .

dunque, derivando ancora rispetto al tempo, si ha

$$\bar{p}_{tt} = c^2 \bar{p}_{tt}, \quad (7.33)$$

e l'equazione (7.31) diviene

$$\bar{p}_{tt} - c^2 \Delta \bar{p} = 0, \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_*). \quad (7.34)$$

E' questa la nota equazione di d'Alembert, già studiata per la propagazione delle onde nel problema della corda vibrante (caso monodimensionale), e per la membrana vibrante (caso bidimensionale). Come è noto,  $c$  rappresenta la velocità di propagazione (nel caso presente, propagazione delle onde di pressione).

Veniamo ora al problema del valore di  $c$ . Se si assume la relazione tra  $p$  e  $\rho$  come per l'equazione dei gas perfetti,  $p = C\rho$  (ipotesi isoterma) si ha  $\frac{dp}{d\rho}(\rho_*) = \frac{p_*}{\rho_*}$ , e dunque:<sup>6)</sup>  $c = \sqrt{p_*/\rho_*}$ . Sostituendo i valori normali di densità e pressione, si ottiene, con Newton, il valore  $c \simeq 280$  m/sec. che è buono qualitativamente, ma troppo basso. Fu Laplace, intorno al 1800, a notare per primo che si dovesse fare riferimento a processi adiabatici anziché isotermi, perché la rapidità delle oscillazioni renderebbe impossibili gli scambi termici tra le "particelle fluide". Ciò induce a assumere per il gas la legge delle adiabatiche

$$\frac{p}{p_*} = \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^\gamma; \quad (7.35)$$

in particolare si ha  $\gamma = 1.4$  per i gas biatomici, come quelli che prevalentemente costituiscono l'atmosfera. Si trova pertanto  $c = \sqrt{1.4} \sqrt{p_*/\rho_*}$ , che fornisce in condizioni normali  $c \simeq 332$  m/sec. in buon accordo con l'esperienza.

Nel caso delle onde sonore qui considerato si ha a che fare con un *fenomeno ondulatorio di tipo longitudinale*, in cui cioè le particelle del fluido si muovono longitudinalmente rispetto alla direzione di propagazione delle onde. Per rendersi conto di ciò nel modo più semplice possibile, si consideri il caso particolare in cui si ha per la fluttuazione di pressione un'onda piana propagantesi lungo l'asse delle  $x$ , cioè sia  $\bar{p}(x, t) = f(x - ct)$  con una arbitraria funzione  $f$ . Allora  $\text{grad } \bar{p}$ , che costituisce l'unica forza presente, è un campo vettoriale diretto lungo l'asse delle  $x$ . Le accelerazioni delle particelle fluide sono pertanto sempre dirette lungo la direzione di propagazione dell'onda.

Diamo ora, per completezza di informazione, un cenno alla trattazione del caso generale, in cui si tiene conto anche della forza di volume dovuta alla gravità,

$$\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{k}. \quad (7.36)$$

In tal caso, rispetto alla trattazione precedente si ha già una modificazione per lo stato normale, cioè per la soluzione particolare  $(u_*, \rho_*, p_*)$  caratterizzata da  $u_* = 0$ . Infatti,

<sup>6)</sup> Si osservi l'analogia con il caso della corda vibrante, in cui è  $c = \sqrt{\tau/\rho}$ .

in luogo della (7.28) si ha ora l'equazione<sup>17)</sup>

$$\rho_* g \mathbf{k} - \text{grad } p_* = 0. \quad (7.37)$$

Dall'equazione di continuità si deduce poi ancora che  $\rho_*$ , e quindi anche  $p_*$ , sono indipendenti dal tempo. In conclusione, abbiamo la soluzione particolare (*stato normale*)  $u_*, \rho_*, p_*$  caratterizzata da

$$u_* = 0, \quad \frac{\partial \rho_*}{\partial t} = 0, \quad \rho_* g \mathbf{k} + \text{grad } p_* = 0. \quad (7.38)$$

Si procede poi come nel caso precedente, tenendo però conto dei nuovi termini che ora figurano, e si trova così a secondo membro della prima equazione del sistema (7.30) il termine aggiuntivo  $-\bar{\rho} g \mathbf{k}$ ; pertanto, invece della (7.31), si ottiene l'equazione

$$\bar{\rho}_{tt} - \Delta \bar{p} = g \bar{\rho}_z.$$

Per ottenere un'equazione chiusa nella fluttuazione di pressione  $\bar{p}$  occorre eliminare  $\bar{\rho}_{tt}$  e  $\bar{\rho}_z$ . Per quanto riguarda  $\bar{\rho}_{tt}$ , procedendo come sopra si ottiene ancora una relazione della forma  $\bar{\rho}_{tt} = c^2 \bar{\rho}_{tt}$ , essendo ora però la velocità  $c^2 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_*)$  dipendente dal posto, perché ne dipende  $\rho_*$ . Un poco più complicata è l'eliminazione di  $\bar{\rho}_z$ . A tal fine si fa uso dell'ovvia relazione  $p_z = \frac{dp}{d\rho} \rho_z$ ; linearizzando si trova allora  $\bar{p}_z = c^2 \bar{\rho}_z - a \rho_* \bar{\rho}$ ,  $a = \frac{d^2 p}{d\rho^2}(\rho_*)$ . In tal modo si ottiene per la fluttuazione di pressione un'equazione della forma

$$\bar{p}_{tt} - c^2 \Delta \bar{p} = gb(\bar{p}, \bar{p}_z), \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_*(\mathbf{x})). \quad (7.39)$$

con una opportuna funzione  $b$ . Si ha dunque, rispetto al caso di assenza di gravità ( $g = 0$ ), l'ulteriore termine a secondo membro, indipendente però dalle derivate seconde di  $\bar{p}$ , e anche la circostanza che la velocità  $c$  dipende dal posto. Tuttavia, in base alla trattazione svolta nel capitolo sulle equazioni a derivate parziali, si può concludere che anche in questo caso la propagazione del suono avviene lungo le superfici caratteristiche relative all'equazione di d'Alembert, benché con velocità  $c$  dipendente dal posto.

### 7.3 Fluidi incomprimibili (approssimazione dell'idrodinamica): moti irrotazionali e teorema di Bernoulli

Considereremo qui e nel seguito il caso di fluidi omogenei incomprimibili (approssimazione dell'idrodinamica), per cui cioè  $\rho$  è costante. Ci riferiremo poi al caso in cui la (densità di) forza esterna di volume ammette potenziale,  $\mathbf{f} = -\text{grad } V$ ; il caso tipico è quello della la forza peso,  $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{k}$ ,  $V = \rho g z$ .

<sup>17)</sup> Si noti che questa è una equazione in cui sono incognite sia  $p^*$  sia  $\rho^*$  (solo nel caso dei fluidi incomprimibili  $\rho$  è una costante assegnata a priori). Utilizzando l'equazione complementare si può eliminare  $\rho_*$ , ottenendo così un'equazione nella sola incognita  $p^*$  (che dipende dalla scelta fatta per l'equazione complementare). Lo studio di questa equazione è particolarmente importante per la fisica dell'atmosfera.

## 7.3.1 Il teorema di Bernoulli per fluidi incomprimibili in moto irrotazionale

Nelle ipotesi sopra considerate le equazioni (7.9) divengono semplicemente

$$\begin{cases} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} \right] = -\text{grad}(p + V) \\ \text{div } \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (7.40)$$

Una forma più significativa dell'equazione di Eulero si ottiene usando l'identità

$$(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = \text{grad} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u}, \quad (7.41)$$

che si controlla rapidamente,<sup>18)</sup> e porta a scrivere il sistema (7.40) si scrive nella forma

$$\begin{cases} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u} \right] = -\text{grad} \left( \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V \right) \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (7.42)$$

Particolarmente significativo è il caso dei *moti irrotazionali*, per i quali vale in ogni istante

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad (7.43)$$

perché allora si annulla il secondo termine al primo membro dell'equazione di Eulero, e il sistema (7.42) diviene

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad} \left( \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V \right) \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (7.44)$$

- Osservazione. E' importante osservare che la condizione di irrotazionalità (7.43) è compatibile con la dinamica (data dalla (7.42)), nel senso che se il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  è irrotazionale al tempo  $t = 0$ , allora esso è irrotazionale a ogni altro tempo. Ciò fu stabilito per la prima volta da Helmholtz nel suo famoso lavoro del 1858 in cui diede l'analisi cinematica del moto vorticoso. Precisamente, introdotto il vettore

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}, \quad (7.45)$$

Helmholtz stabilì che l'equazione di Eulero comporta

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}, \quad (7.46)$$

dove, come di consueto, si è denotato  $\frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . L'equazione (7.46) si ricava subito prendendo il rotore della prima delle (7.42), sicché il secondo membro non contribuisce, e usando l'identità

$$\text{rot}(\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega},$$

<sup>18)</sup> Denotando  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , la prima componente delle (7.41) si scrive nella forma

$$u u_x + v u_y + w u_z = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) - v(v_x - u_y) - w(w_x - u_z),$$

che si controlla subito essere vera. Analogamente si procede anche per le altre due componenti della (7.41).

che si verifica facilmente.

Dalla (7.46) si vede che la derivata totale di  $\boldsymbol{\omega}$  è proporzionale a  $\boldsymbol{\omega}$  stesso, sicché  $\boldsymbol{\omega}$  sarà sempre nullo se è nullo inizialmente.<sup>19)</sup> Ricordando che, come anche stabilito da Helmholtz,  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$  rappresenta la velocità angolare del moto attorno ad  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ , sicché può dirsi che il non annullarsi di  $\boldsymbol{\omega}$  corrisponde alla presenza di vortici, si conclude che l'equazione (7.46), dedotta dall'equazione di Eulero, comporta che è *impossibile produrre o distruggere vortici*. La produzione o la distruzione di vortici può essere descritta solo quando si tenga conto della viscosità, come ad esempio si fa nell'equazione di Navier-Stokes.

Tralasciamo qui ogni discussione più rigorosa di tali problemi, cui si è accennato con il solo intento di indicare che la condizione di irrotazionalità  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  è compatibile con la dinamica: ad esempio se un fluido è inizialmente in quiete, sicché  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$ , oppure in moto uniforme, sicché  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{b}$ , e dunque  $\text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$ , o comunque in ogni caso in cui sia  $\text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$ , si avrà anche  $\text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$  se il fluido è descritto dall'equazione di Eulero.

Come è noto, se  $\mathbf{u}$  è irrotazionale,  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ , allora esiste una funzione  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , che può essere detta il *potenziale di velocità*, per cui si ha

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi. \quad (7.47)$$

Dunque, dalla prima delle (7.44) si ha

$$\text{grad} \left( \rho \phi_t - \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V \right) = 0, \quad (7.48)$$

sicché il termine entro parentesi non dipende dalle coordinate spaziali, e si ottiene

$$\rho \phi_t + \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V = C(t), \quad (7.49)$$

dove  $C(t)$  è un'arbitraria funzione del tempo. Anzi, notando la circostanza che, come si vede dalla (7.47), il potenziale di velocità  $\phi(\mathbf{x}, t)$  è definito a meno di una arbitraria funzione del tempo (nel senso che se in luogo di  $\phi$  si introduce  $\hat{\phi} = \phi + f(t)$ , con  $f$  arbitraria, è  $\text{grad } \phi = \text{grad } \hat{\phi}$ , sicché il campo di velocità  $\mathbf{u}$  non viene modificato<sup>20)</sup>), si può senz'altro prendere costante (in particolare si potrebbe prendere anche nullo) il secondo membro della (7.49), passando a  $\hat{\phi} = \phi + f(t)$ , dove  $f(t)$  è una qualunque primitiva di  $-C'(t)$ . Denotando  $\hat{\phi}$  ancora con  $\phi$ , abbiamo quindi ottenuto la seguente

**Proposizione 7.1 (Teorema di Bernoulli per moti irrotazionali):** Per i fluidi perfetti incomprimibili in moto irrotazionale l'equazione di Eulero comporta

$$\rho \phi_t - \frac{\rho}{2} (\text{grad } \phi)^2 - p + V = \text{cost}. \quad (7.50)$$

dove  $\phi$  è un potenziale di velocità, cioè una funzione  $\phi$  tale che sia  $\mathbf{u} = \text{grad } \phi$ .

<sup>19)</sup> Anzi, l'analoga conclusione si ha anche localmente: se in qualche punto è inizialmente  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , sarà anche  $\boldsymbol{\omega} = 0$  nei corrispondenti punti evoluti secondo il movimento indotto dal fluido.

<sup>20)</sup> E' questa una proprietà di invarianza simile alle ben note invarianze di gauge dell'elettrodinamica.

### 7.3.2 Complementi: il teorema di Bernoulli per fluidi in regime stazionario, e alcune classiche applicazioni

Dall'equazione di Eulero scritta nella forma (7.44) si ottiene immediatamente una importante conseguenza relativa ai fluidi *in regime stazionario irrotazionale* (ricordiamo che un fluido si dice in regime stazionario se il campo euleriano di velocità  $\mathbf{u}$  è indipendente dal tempo). Infatti, essendo allora  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$  e  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = 0$  si ottiene che il trinomio  $\frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V$  è indipendente dalle coordinate spaziali. Abbiamo dunque la

**Proposizione 7.2 (Teorema di Bernoulli in regime stazionario irrotazionale):** Per i fluidi perfetti incomprimibili in moto irrotazionale ( $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ ) e stazionario ( $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ ) il trinomio

$$\frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V \quad (7.51)$$

è costante in tutto il fluido.

- Osservazione. In particolare, nel caso della forza peso si ha  $\frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + \rho g z = \text{cost}$ : questa relazione generalizza al caso stazionario irrotazionale la relazione, nota come *Teorema di Stevino*,

$$p + \rho g z = \text{cost}, \quad (7.52)$$

che si ottiene subito dall'equazione originaria di Eulero (7.40) nel caso *statico* (cioè  $\mathbf{u} = 0$ ), con  $V = \rho g z$ .

Una ulteriore classica versione del Teorema di Bernoulli si può dare anche in ipotesi più deboli, precisamente per fluidi in moto stazionario qualsiasi (senza richiedere la condizione di irrotazionalità). A tale scopo si usa la equazione di Eulero nella sua forma generale (7.42); per la condizione di stazionarietà  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$  si ha allora

$$\text{grad} \left( \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V \right) = \rho \mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u}.$$

Preso poi una qualsiasi curva  $\gamma$ , e due punti  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_1$  su di essa, si trova (con ovvio significato dei simboli)

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \mathbf{u}_1^2 + p_1 + V_1 - \frac{\rho}{2} \mathbf{u}_0^2 - p_0 - V_0 &= \int_{\gamma} \text{grad} \left( \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V \right) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \rho \int_{\gamma} \mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Ora, se la linea  $\gamma$  è una linea di corrente, si ha per definizione che  $d\mathbf{s}$  e  $\mathbf{u}$  sono paralleli, e di conseguenza, per la nota proprietà del prodotto misto, l'integrando si annulla in ogni punto. Si ottiene pertanto la

**Proposizione 7.3 (Teorema di Bernoulli in regime stazionario):** Per i fluidi perfetti incomprimibili in regime stazionario, il trinomio

$$\frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p + V$$

è costante per tutti i punti che si trovano su una medesima linea di corrente.

Veniamo ora a una rapida esposizione di alcune applicazioni del teorema di Bernoulli, nella quale ci limitiamo al caso della forza peso  $V = \rho g z$ . Già la relazione statica (7.52), contenuta nel teorema di Bernoulli come caso particolare, ha interessantissime conseguenze ben note: ad esempio, la pressione cresce linearmente con la profondità, come subito si legge dalla (7.52), e vale inoltre il ben noto principio di Archimede (A.Sommerfeld, *Meccanica dei continui deformabili* § II.6); per l'analogo problema nel caso di fluidi comprimibili si veda A.Sommerfeld, § II.7.

L'applicazione più significativa del teorema di Bernoulli è tuttavia legata al fatto che, a parità di quota, essendo costante  $V$  e dunque la somma  $\frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + p$ , la pressione è maggiore dove è minore la velocità. Così, ad esempio, in un flusso stazionario in un condotto a sezione variabile, essendo evidentemente maggiore la velocità nei punti a minor sezione,<sup>21)</sup> si ottiene che è *minore la pressione nei punti di minor sezione*.<sup>22)</sup> In questo modo si spiega ad esempio perché venga risucchiato un foglio di carta appoggiato sul palmo della mano quando vi si soffi sopra attraverso la fessura tra due dita dell'altra mano. Infatti, tra le due dita e il foglio si ha come un condotto che si allarga verso l'esterno, dove la pressione  $p_0$  è pari a quella (atmosferica) sotto il foglio. Dunque, nello spazio tra le dita e il foglio è  $p < p_0$ , e si ha il risucchio.

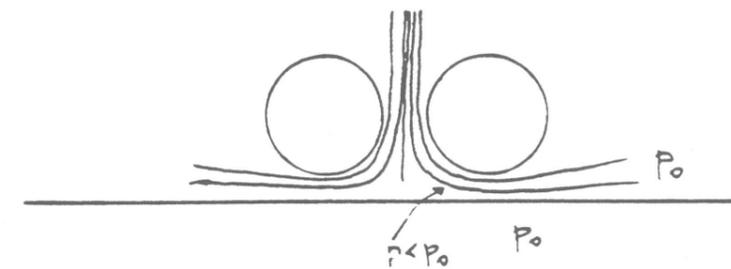


Fig. 7.2

Un fenomeno analogo si ha per le correnti traslocircolatorie (*effetto Magnus*). Si investa un cilindro con una corrente di intensità costante  $u_0$  e si faccia ruotare il cilindro. Se si ammette che, per effetto della viscosità, in prossimità del cilindro si abbia per l'aria una velocità circolatoria come se l'aria fosse da esso trascinata rigidamente (si pensi all'atmosfera trascinata dalla terra), si capisce che al disotto del cilindro si abbia in conseguenza una velocità minore che non sopra, e quindi un eccesso

<sup>21)</sup> Si deduce immediatamente dall'equazione di continuità (utilizzando il teorema di Gauss) che la velocità è inversamente proporzionale alla sezione del condotto.

<sup>22)</sup> Si potrebbe essere invece tentati di pensare che avviene il contrario!

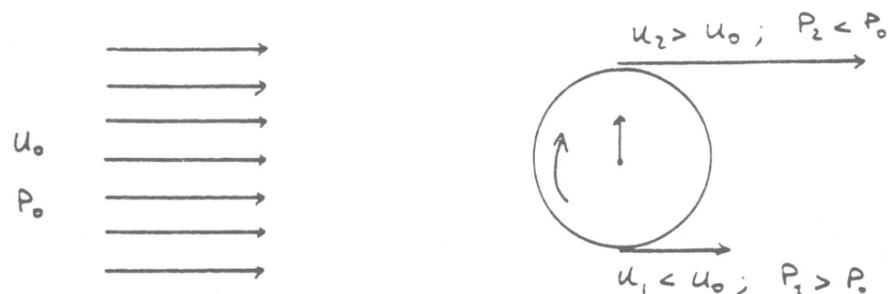


Fig. 7.3

di pressione al disotto, che spinge il cilindro verso l'alto (si pensi alle traiettorie del pallone, calciato di taglio).

Un fenomeno analogo si presenta nell'azione sustentatrice dell'ala, quando si ammetta analogamente l'esistenza di una corrente traslocircolatoria, fatto sul quale non possiamo qui addentrarci.

#### 7.4 Fluidi incomprimibili irrotazionali: teoria delle onde

Per i fluidi perfetti incomprimibili irrotazionali possiamo dunque sostituire l'equazione vettoriale di Eulero con l'unica equazione scalare di Bernoulli, avendo per incognita il potenziale di velocità  $\phi$ ; da questo si ricava poi il campo di velocità  $u = \text{grad } \phi$ . Per quanto riguarda l'equazione di continuità, essa si riduce evidentemente all'equazione  $\text{div } u = 0$  che, in termini del potenziale di velocità  $\phi$  si scrive  $\text{div grad } \phi = 0$  ovvero  $\Delta \phi = 0$ . Scegliamo per semplicità unità di misura tali che per il valore costante della densità si abbia  $\rho = 1$ , e consideriamo il caso della forza peso  $V = gz$ ; le equazioni rilevanti sono allora

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\text{grad } \phi)^2 + p + gz = \text{cost} \end{cases} \quad (7.53)$$

Dunque, il potenziale di velocità (che è l'incognita del problema, assieme alla pressione  $p$ ) soddisfa l'equazione di Laplace, che è tipica per fenomeni non propagatori. Si verifica così la strana circostanza che il più noto esempio di fenomeno propagatorio, quello delle onde ad esempio del mare, non è retto dall'equazione delle onde di d'Alembert, ma dall'equazione di Laplace congiunta con l'equazione di Bernoulli (e con le condizioni al contorno, la cui rilevanza apparirà più sotto). Si può tuttavia anticipare che proprio a tale circostanza è dovuto il fatto che si avranno in questo caso fenomeni dispersivi — velocità di fase dipendente dalla frequenza, anziché costante come avviene per l'equazione di d'Alembert.

Veniamo ora all'alquanto delicato problema delle *condizioni al contorno*. Trattiamo il caso di un fluido in un bacino di profondità costante (a quota  $z = -h$ ), e illimitato nelle direzioni degli assi  $x, y$ ; per il fluido in quiete, la superficie libera si trovi a  $z = 0$ .

La più spontanea condizione sul fondo è che ivi la velocità sia orizzontale, e dunque

$$o_z = 0 \quad \text{per } z = -h. \quad (7.54)$$

Per quanto riguarda la superficie libera la situazione è invece alquanto più complicata. Anzitutto la superficie (il *pelo libero*) può essere descritta in forma esplicita mediante una funzione  $\eta(x, y, t)$  dalla relazione  $z = \eta(x, y, t)$ ; equivalentemente, si può introdurre la funzione

$$S(x, t) = \eta(x, y, t) - z. \quad (7.55)$$

ed allora la superficie di separazione tra fluido e aria è descritta in forma implicita dall'equazione  $S(x, t) = 0$ . Si osservi che la funzione  $\eta$  (e dunque la funzione  $S$ ) rappresenta anch'essa un'incognita del problema (è quella che descriverà appunto le "onde del mare") e che quindi si ha propriamente a che fare con un problema cosiddetto "a frontiera libera", in cui cioè una delle frontiere, o dei contorni, è anch'essa un'incognita (a differenza del contorno per  $z = -h$ , che è prefissato). Come vedremo, tuttavia, con un procedimento di linearizzazione ( $\eta$  e  $\text{grad } \phi$  piccoli) ci ridurremo a un problema a frontiera fissa per  $z = 0$ . È facile convincersi che la condizione al contorno sul pelo libero, analoga alla (7.54) sul fondo, è

$$\eta_t - o_z \eta_z - o_y \eta_y - o_x = 0 \quad \text{per } z = \eta(x, y, t). \quad (7.56)$$

Infatti la (7.56) è nient'altro che la relazione  $\frac{dS}{dt} = 0$ , quando si rammenti  $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} - u \cdot \text{grad } S$  e anche  $u = \text{grad } \phi$ . Dunque la (7.56) esprime la condizione che *le particelle di fluido per cui vale  $S = 0$*  (cioè sono sulla superficie  $z = \eta(x, y, t)$ ) *sono sempre le medesime*.<sup>23)</sup> In altri termini, denotando con  $x_0$  un punto generico che si trova sulla superficie al tempo  $t = 0$ , ovvero che soddisfa a  $S(x_0, 0) = 0$ , e denotando con  $x(t; x_0)$  l'evoluto al tempo  $t$  del punto  $x_0$  secondo l'equazione del moto del fluido  $\dot{x} = u(x, t)$ , allora si impone che tale punto si trovi ancora sulla superficie, ovvero valga  $S(x(t; x_0), t) = 0$ .<sup>24)</sup> In conclusione, alle equazioni indefinite (7.53) vanno aggiunte le condizioni al contorno (7.54), (7.56), dove  $\eta(x, z, t)$  è una nuova incognita, che si aggiunge alle incognite  $\phi, p$ .

Cominciamo con l'osservare che esiste la soluzione particolare  $o_x, \eta_x, p_x$  data da  $o_x = 0, \eta_x = 0, p_x - gz = p_0$  (con  $p_0 = \text{cost}$ ), ovvero con liquido fermo ( $u = 0$ ) e pelo libero orizzontale.<sup>25)</sup> Veniamo dunque al procedimento di linearizzazione.

<sup>23)</sup> In altri termini, usando la terminologia del paragrafo 7.1.2, con lo spazio materiale  $Z$  e lo spazio fisico  $X$ , si assume che il moto sia descrivibile come una famiglia di diffeomorfismi  $Z \rightarrow X$ . D'altra parte è ben noto che un diffeomorfismo manda bordo in bordo, e ciò corrisponde proprio al fatto che le particelle che si trovano sulla superficie di separazione tra fluido e aria sono sempre le medesime.

<sup>24)</sup> Si noti che questa prescrizione comprende come caso particolare anche quella relativa al fondo (fisso). Infatti, prendendo  $\eta = -h$ , la (7.56) dà proprio  $o_z = 0$ , cioè proprio la (7.54).

<sup>25)</sup> Anzi, si constata immediatamente che il richiedere  $\phi = 0$  comporta necessariamente anche  $\eta = 0$  (pelo libero orizzontale), se si considera il caso consueto in cui la pressione atmosferica sul pelo libero sia una assegnata costante: infatti dalla condizione al contorno (7.56) si ricava anzitutto  $\eta_t = 0$ , e poi, scrivendo l'equazione di Bernoulli sul pelo libero, cioè per  $z = \eta_x$  e denotando con  $p_0$  il valore costante della pressione sul pelo libero, si ha  $p_0 - g\eta_x = \text{cost}$  e quindi  $\eta_x = \text{cost}$ , e possiamo sempre assumere  $\eta_x = 0$ .

che si ottiene ricercando delle soluzioni  $\phi = \phi_* - \bar{\phi}$ ,  $\eta = \eta_* - \bar{\eta}$ ,  $p = p_* - \bar{p}$  con perturbazioni  $\bar{\phi}, \bar{\eta}, \bar{p}$  piccole, e ritenendo nel sistema originale solo i termini al primo ordine nelle quantità tildate  $\bar{\phi}, \bar{\eta}, \bar{p}$  e nelle loro derivate (nel nostro caso è poi  $\bar{\phi} = \phi, \bar{\eta} = \eta$ ). Dunque, dovendo considerare il corrispondente problema linearizzato, e pertanto al primo ordine anche in  $\|\text{grad } \phi\|$  ed  $\eta$ , si trascura anzitutto il termine  $(\text{grad } \phi)^2$  nell'equazione di Bernoulli (7.53) e i termini quadratici  $\phi_z \eta_z$ ,  $\phi_z \eta_z$  nella (7.56). Di più, nella (7.56) figura  $\phi_z(x, y, z, t)$  valutato in  $z = \eta(x, y, t)$ , e quindi figura  $\phi_z(x, y, \eta(x, y, t), t) = \phi_z(x, y, 0, t) - \phi_{zz}(x, y, 0, t)\eta(x, y, t) + \dots$ ; ma già  $\phi_{zz}\eta$  è del secondo ordine e quindi potremo ritenere soltanto  $\phi_z(x, y, 0, t)$ , sicché la condizione al contorno sulla superficie libera diventa

$$\eta_t(x, y, t) - \phi_z(x, y, 0, t) = 0. \quad (7.57)$$

Analogamente, quando si considera l'equazione di Bernoulli sulla superficie libera  $z = \eta(x, y, t)$ , nel termine  $\phi_t(x, y, \eta(x, y, t), z, t)$  basterà ritenere  $\phi_t(x, y, 0, t)$ . Infine l'equazione di Laplace  $\Delta \phi = 0$  dovrebbe essere risolta nel dominio

$$D_n = \{x, y, z: -h \leq z \leq \eta\}$$

anzichè nel dominio

$$D_0 = \{x, y, z: -h \leq z \leq 0\};$$

ma chiaramente le due corrispondenti soluzioni differiscono per termini del primo ordine in  $\eta$ , e dunque, poiché  $\phi$  è essa stessa del primo ordine, per avere risultati al primo ordine basterà risolvere l'equazione di Laplace in  $D_0$ .

Possiamo ora eliminare due delle incognite, precisamente  $\eta$  e  $p$ . A tal fine si considera l'equazione di Bernoulli sulla superficie libera ( $z = \eta$ ) dove è  $p = p_0 =$  pressione atmosferica costante, e la si considera congiuntamente alla condizione al contorno linearizzata (7.57):

$$\begin{cases} \phi_t(x, y, 0, t) - g\eta(x, y, t) - p_0 = \text{cost} \\ \eta_t(x, y, t) - \phi_z(x, y, 0, t) = 0. \end{cases} \quad (7.58)$$

Derivando poi la prima equazione del sistema (7.58) rispetto al tempo e usando la seconda, si elimina  $\eta$  e si resta con l'equazione per la sola  $\phi$

$$\phi_{tt}(x, y, 0, t) - g\phi_z(x, y, 0, t) = 0; \quad (7.59)$$

per il modo in cui è stata ottenuta, in questa equazione figura  $\phi$  valutata per  $z = 0$ .

In conclusione, abbiamo così ottenuto il *problema lineare a frontiera fissa nell'unica incognita*  $\phi(x, y, z, t)$ :

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{per } -h \leq z \leq 0 & \text{e ogni } x, y, t \\ \phi_{tt} - g\phi_z = 0 & \text{per } z = 0 & \text{e ogni } x, y, t \\ \phi_z = 0 & \text{per } z = -h & \text{e ogni } x, y, t \end{cases} \quad (7.60)$$

Ottenuta  $\phi$ , si potrà poi immediatamente calcolare la forma  $\eta$  del pelo libero, mediante la prima delle (7.58), ovvero  $\eta(x, t) = \frac{1}{g}(\text{cost} - p_0 - \phi_t(x, 0, t))$ , e la pressione  $p$  mediante l'equazione di Bernoulli linearizzata.

In particolare, ricercheremo soluzioni che non dipendano da una delle coordinate orizzontali, diciamo  $y$ , e dunque l'incognita è  $\phi = \phi(x, z, t)$ . Come nel caso della corda vibrante o della membrana vibrante, si potrebbero ricercare ad esempio soluzioni particolari stazionarie, fattorizzate nel tempo (ed anche nelle variabili  $x, z$ ) e per sovrapposizione di queste trovare poi onde propagantisi. Più direttamente, ricerchiamo qui subito *soluzioni particolari* descrittive onde propagantisi lungo l'asse  $x$ , precisamente della forma (con  $k, \omega$  reali)

$$\phi(x, z, t) = Z(z) \cos(kx - \omega t). \quad (7.61)$$

Per sostituzione nell'equazione di Laplace  $\phi_{zz} - \phi_{zz} = 0$  si ha allora  $\cos(kx - \omega t) (-k^2 Z(z) - Z''(z)) = 0$ , ovvero l'equazione alle derivate ordinarie per  $Z(z)$  nell'intervallo  $-h < z < 0$

$$Z'' - k^2 Z = 0. \quad (7.62)$$

Scritta la soluzione generale della (7.62) nella forma  $Z(z) = A'e^{kz} - B'e^{-kz}$ , o nelle forme equivalenti  $Z(z) = A'' \cosh(kz) - B'' \sinh(kz)$  o  $Z(z) = A \cosh[k(z - \alpha)]$ , si verifica immediatamente che la condizione al contorno sul fondo  $Z'(-h) = 0$  comporta  $\sinh[k(-h - \alpha)] = 0$ , ovvero  $\alpha = h$ ; dunque si ha

$$Z(z) = A \cosh[k(z - h)]. \quad (7.63)$$

dove figura ancora una costante indeterminata  $A$  (ampiezza dell'onda). Pertanto abbiamo la soluzione particolare

$$\phi(x, z, t) = A \cosh[k(z - h)] \cos(kx - \omega t),$$

dove i parametri reali  $k, \omega$  sono arbitrari. Un legame tra di essi (*relazione di dispersione*) viene però fissato dalla condizione al contorno sul pelo libero  $\phi_{tt} - g\phi_z = 0$  per  $z = 0$ ; infatti essa fornisce  $[-\omega^2 \cosh(kh) - gk \sinh(kh)] \cos(kx - \omega t) = 0$ , ovvero

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

Abbiamo dunque ottenuto la<sup>26)</sup>

**Proposizione 7.4:** Per il problema linearizzato (7.60), si hanno le soluzioni particolari

$$\phi(x, z, t) = A \cosh[k(z - h)] \cos(kx - \omega t), \quad (7.64)$$

descrittive una propagazione ondosa lungo l'asse  $x$  con ampiezza  $A$ , numero d'onda  $k$ , pulsazione  $\omega$ . La pulsazione e il numero d'onda sono legati dalla relazione di dispersione  $\omega = \omega(k)$  data dalla

$$\omega^2 = gk \tanh(kh). \quad (7.65)$$

<sup>26)</sup> Nel capitolo sulle equazioni a derivate parziali si è insistito sul fatto che l'equazione di Laplace non descrive fenomeni di propagazione, perché non ammette caratteristiche reali. Nel caso presente, tuttavia, si considera una situazione ben diversa. Infatti, nel problema (7.60) si ha sì l'equazione di Laplace  $\Delta \phi = 0$  in un dominio fissato ( $-h \leq z \leq 0$ ,  $x, y$  arbitrari), ma l'incognita  $\phi$  dipende da una ulteriore variabile (il tempo  $t$ ), e si ha poi una condizione al contorno dipendente da tale ulteriore variabile.

Ricordiamo (si veda l'appendice) che ogni onda rappresentata da una funzione del tipo  $A \cos(kx - \omega t)$  ha lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , e periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , ha velocità di fase  $V(k) = \frac{\omega}{k}$  (la funzione ha lo stesso valore nei punti  $x, t$  tali che  $kx - \omega t = \text{cost}$ ) e velocità di gruppo  $U(k) = \frac{d\omega}{dk}(k)$ , secondo la nota formula di Stokes (1876): si dice che si ha *dispersione normale* quando  $V$  è funzione crescente di  $\lambda$  (le onde più lunghe vanno più veloci) e *dispersione anomala* nel caso opposto.

Veniamo ora a una più particolareggiata discussione della relazione di dispersione (7.65). Si hanno i due casi limite di *acque basse* ( $h/\lambda \simeq 0$ , o  $hk \simeq 0$ ) e di *acque profonde* ( $h/\lambda \simeq \infty$ ). Nel primo caso si può rimpiazzare  $\tanh(hk)$  con  $hk$  e dunque la (7.65) diviene

$$\omega^2 = ghk^2 \quad (\text{acque basse}), \quad (7.66)$$

sicché si ha

$$V(k) = \sqrt{gh} = \text{cost}; \quad (7.67)$$

pertanto non si ha dispersione. Nel secondo caso si può rimpiazzare  $\tanh(hk)$  con 1 e la (7.65) diviene

$$\omega^2 = gk \quad (\text{acque profonde}), \quad (7.68)$$

sicché

$$V(k) = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \sqrt{\lambda}, \quad (7.69)$$

e si ha dispersione normale, cioè le lunghezze d'onda maggiori hanno velocità maggiore. A ciò è dovuto il fatto che, quando si osserva l'insieme delle onde create ad esempio lanciando un sasso, si trova che le onde più lontane dal centro di eccitazione sono più lunghe. (Si veda Stoker, *Water waves*, figura 6.6.2).

Può ancora osservarsi quanto segue: nel caso di acque basse, come si vede dalla (7.67), la velocità di fase (costante rispetto a  $\lambda$ ) cresce con la profondità  $h$ . Forzando il discorso, si può quindi anche pensare che la parte alta dell'onda (la cresta), comportandosi come se fosse in presenza di una maggiore profondità, tenda a muoversi più rapidamente della parte bassa (la valle), e dunque la cresta avanzi: è quello appunto che avviene al frangersi delle onde (*surf formation*).

Le onde sopra discusse vengono dette *onde di gravità*. Per lunghezze d'onda estremamente piccole sono rilevanti fenomeni di tensione superficiale e si hanno le cosiddette *onde di capillarità*, in cui si ha dispersione anomala. Si veda Sommerfeld, § V.25.

Chiudiamo questo paragrafo con il calcolo (approssimato) delle orbite dei punti del fluido, in corrispondenza del passaggio di un'onda di gravità con potenziale di velocità (7.64). Il campo di velocità  $u$  è allora dato da  $u = \text{grad} \phi$ . Le equazioni di moto delle particelle di fluido,  $\dot{x} = u$ , hanno allora un aspetto alquanto complicato, precisamente

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ak \cosh[k(z-h)] \sin(kx - \omega t) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = Ak \sinh[k(z-h)] \cos(kx - \omega t) \end{cases} \quad (7.70)$$

Di queste, solo la seconda è banale, fornendo  $y(t) = y_0$ . Delle altre due si può trovare una soluzione perturbativa. Si osserva che, in assenza d'onda, cioè per  $A = 0$ , si

annullano i secondi membri, sicché si ha la soluzione  $x(t) = x_0, z(t) = z_0$ . Cercheremo dunque soluzioni  $x(t) = x_0 + \bar{x}(t), z(t) = z_0 + \bar{z}(t)$ , ritenendo soltanto i termini del primo ordine nelle perturbazioni ( $\bar{x}, \bar{z}, A$ ), cioè eliminando ad esempio termini ove figurino prodotti del tipo  $A\bar{x}$  o  $A\bar{z}$ . Poiché al secondo membro già compare il fattore  $A$ , basterà valutare gli altri fattori in corrispondenza di  $x = x_0, z = z_0$ .<sup>27)</sup> Essendo poi  $\dot{x} = \dot{\bar{x}}, \dot{z} = \dot{\bar{z}}$ , si avranno le equazioni al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = -Ak \cosh[k(z_0 - h)] \sin(kx_0 - \omega t) \\ \dot{\bar{z}} = Ak \sinh[k(z_0 - h)] \cos(kx_0 - \omega t), \end{cases} \quad (7.71)$$

in cui le incognite  $\bar{x}, \bar{z}$  non compaiono ai secondi membri. Possiamo anche scrivere tale sistema nella forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = -a\omega \sin(kx_0 - \omega t) \\ \dot{\bar{z}} = b\omega \cos(kx_0 - \omega t), \end{cases} \quad (7.72)$$

dove si sono introdotte le *costanti*  $a, b$  definite da

$$a = \frac{Ak}{\omega} \cosh[k(z_0 - h)], \quad b = \frac{Ak}{\omega} \sinh[k(z_0 - h)]; \quad (7.73)$$

le condizioni iniziali sono  $\bar{x}(0) = \bar{z}(0) = 0$ , come segue subito da  $x(0) = x_0, z(0) = z_0$ .

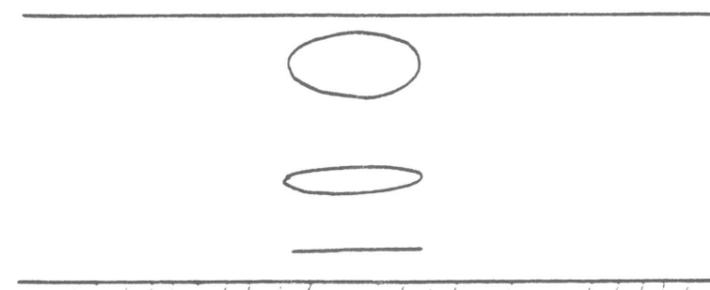


Fig. 7.4

Il sistema si integra banalmente e si ha

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = -a \cos(kx_0 - \omega t) - \xi \\ \bar{z}(t) = -b \sin(kx_0 - \omega t) - \zeta, \end{cases} \quad (7.74)$$

con due costanti arbitrarie  $\xi, \zeta$  che si determinano immediatamente mediante le condizioni iniziali:  $\xi = a \cos(kx_0), \zeta = b \sin(kx_0)$ . Si ha evidentemente

$$\frac{(\bar{x} - \xi)^2}{a^2} + \frac{(\bar{z} - \zeta)^2}{b^2} = 1, \quad (7.75)$$

e dunque le particelle si muovono su delle ellissi. Il rapporto dei semiassi è dato da

$$\frac{b}{a} = \tanh[k(z_0 - h)] = \begin{cases} 0 & \text{per } z_0 = -h \quad \text{sul fondo} \\ \tanh kh & \text{per } z_0 = 0 \quad \text{sulla superficie} \end{cases} \quad (7.76)$$

<sup>27)</sup> Si pensi ad esempio a uno sviluppo in serie di Taylor  $f(x_0 + \bar{x}) = f(x_0) + \bar{x}f'(x_0) + \dots$

mentre la quantità

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{Ak}{\omega}$$

è indipendente dalla quota  $z$ . Si hanno dunque traiettorie del tipo mostrato in fig. 7.4. Per altri dettagli si veda A.Sommerfeld, § IV, 24.

- **Osservazione.** Con i moderni calcolatori è alquanto semplice integrare numericamente le originarie equazioni nonlineari (7.70). E' facile constatare allora che le orbite non si chiudono, ma si hanno delle "ellissi che precedono".

## APPENDICE

### Dispersione e velocità di gruppo

Richiamiamo anzitutto alcuni concetti elementari, riferendoci al caso monodimensionale. Dalla proprietà di periodicità dell'esponenziale  $e^{iz}$  o di  $\cos z$ ,  $\sin z$ , segue che la funzione  $e^{ikz}$  (o  $\cos kz$ , o  $\sin kz$ ) è periodica con periodo minimo  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ; per tale motivo una funzione del tipo<sup>28)</sup>

$$u_{k,\omega}(z,t) = A \cos(kz - \omega t) = A \operatorname{Re} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.77)$$

con  $k > 0$ ,  $\omega > 0$ , si dice avere *lunghezza d'onda*  $\lambda$  e *periodo*  $T$  dati rispettivamente da

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (7.78)$$

mentre  $k$  si dice *numero d'onde* e  $\omega$  si dice *pulsazione* ( $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$  si dice *frequenza*).

La funzione  $u$  definita dalla (7.77)<sup>29)</sup> assume il medesimo valore in corrispondenza di un punto  $z(t)$  per cui la fase sia costante, e che dunque si sposta con legge tale che sia  $kz(t) - \omega t = \text{cost.}$ , ovvero  $z(t) = \frac{\omega}{k}t - \text{cost.}$ , e dunque con velocità

$$V = \frac{\omega}{k} \quad (\text{velocità di fase}). \quad (7.79)$$

Nel caso speciale in cui la funzione  $u$  sia soluzione dell'equazione di d'Alembert (ad esempio per la corda vibrante), si ha che la velocità di fase *non* dipende dal numero d'onda  $k$ : infatti, deducendosi dalla (7.77)

$$u_{tt} = -\omega^2 u, \quad u_{zz} = -k^2 u, \quad (7.80)$$

è subito visto che la (7.77) può soddisfare l'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{zz} = 0, \quad (7.81)$$

solo se vale  $(-\omega^2 - k^2 c^2)u = 0$ , ovvero  $\omega \cdot c = k$ , ovvero

$$\omega = ck, \quad (\text{ovvero } \lambda\nu = c!). \quad (7.82)$$

Ma basta già considerare l'esempio dell'equazione di Klein-Gordon

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{zz} - u = 0 \quad (7.83)$$

per avere un caso in cui funzioni elementari del tipo (7.77) sono soluzioni, con velocità di fase  $V(k)$  dipendente però dal numero d'onda  $k$ . Infatti, inserendo le (7.80) nella (7.83) si ha  $(-\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2)u = 0$  ovvero, ricordando  $V \equiv \frac{\omega}{k}$ ,

$$V(k) = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{k^2 c^2}}.$$

<sup>28)</sup> A si dice l'ampiezza, e  $kz - \omega t$  la fase dell'onda.

<sup>29)</sup> Anzi, più in generale, ogni funzione della forma  $f(kz - \omega t)$ .

In generale, ogni assegnata relazione  $\omega = \omega(k)$  si dice *relazione di dispersione*.

Nel caso generale in cui la velocità di fase  $V = \frac{\omega}{k}$  dipende da  $\omega$ , si dice che si ha un fenomeno di sparpagliamento. Infatti, si pensi al caso generale di una sovrapposizione di onde elementari del tipo (7.77):

$$u(x, t) = \int A(k) \cos(kx - \omega(k)t) dk = \Re \int A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (7.84)$$

allora ogni singola componente (7.77) si muove *rigidamente* con velocità di fase  $V(k) = \frac{\omega(k)}{k}$ , mentre la sovrapposizione (o pacchetto d'onde) (7.84) non si muove rigidamente, la forma variando da istante ad istante.<sup>30)</sup>

Fu osservato prima da Stokes (1876) poi da Rayleigh che si può comunque ritenere in prima approssimazione che una forma descritta da una funzione del tipo (7.84) si sposti rigidamente anche nel caso dispersivo, con una certa velocità chiamata *velocità di gruppo*, almeno nel caso in cui l'integrale su  $k$  è esteso a un intervallo abbastanza piccolo, e si considera un tempo non troppo lungo; si dice in tal caso che si ha a che fare con un *gruppo d'onde* o un *pacchetto d'onde*. A tal fine consideriamo, con Rayleigh, un *pacchetto di onde* con numero d'onda  $k$  distribuito attorno a  $k_0$ , cioè una funzione del tipo

$$u(x, t) = \Re \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (7.85)$$

con  $\frac{\Delta k}{k_0}$  abbastanza piccolo, per una assegnata relazione di dispersione  $\omega = \omega(k)$ . Riscrivendo l'esponente nella forma

$$kx - \omega t = k_0 x - \omega_0 t - (k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t, \quad \omega_0 = \omega(k_0) \quad (7.86)$$

si ha allora

$$u(x, t) = \Re A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (7.87)$$

dove

$$A(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(k - k_0)x - i(\omega - \omega_0)t} dk \quad (7.88)$$

Il fattore  $e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$  si dice rappresentare l'onda *portante*: essa ha il numero d'onda  $k_0$  e la pulsazione  $\omega_0 = \omega(k_0)$  tipici del pacchetto, in generale entrambi elevati. Invece

<sup>30)</sup> Il caso più generale, tuttavia, è addirittura quello in cui si consideri una funzione della forma (7.84), sovrapposizione di onde armoniche elementari, senza che la funzione considerata soddisfi a un'equazione d'onda. Ad esempio, nel caso delle onde di gravità nei fluidi, si è visto che per il potenziale di velocità (denotato con  $\phi$  anziché con  $u$ ) esistono soluzioni elementari armoniche della forma (7.77); il potenziale stesso soddisfa l'equazione di Laplace, e sono le condizioni al contorno a fornire la relazione di dispersione (cioè l'espressione analitica della pulsazione  $\omega(k)$  in funzione del numero d'onda  $k$ ), precisamente

$$V(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{g \tanh(kh)}{k}}$$

con i due casi limite di acque basse non dispersivo e di acque profonde dispersivo con  $V(k) = \sqrt{\frac{g}{k}}$ .

la *modulante*  $A(x, t)$  e sovrapposizione di onde elementari tutte con numero d'onda e pulsazione piccolissimi, che nulla hanno a che vedere con quelli delle onde originarie. Anzi, ciascuna delle componenti armoniche dell'onda modulante, ovvero

$$e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} \quad (7.89)$$

ha una velocità di fase che, per la definizione data sopra, è proprio  $\frac{\omega - \omega_0}{k - k_0}$ , e questa è approssimativamente costante perché  $k$  è abbastanza prossimo a  $k_0$ , precisamente si ha

$$\frac{\omega - \omega_0}{k - k_0} \simeq \frac{d\omega}{dk}(k_0) \quad (7.90)$$

Dunque è evidente che, in prima approssimazione, la modulante può pensarsi come sovrapposizione di onde tutte della medesima velocità di fase  $\frac{d\omega}{dk}(k_0)$ , e tale velocità comune si dice *velocità di gruppo*  $U$ :

$$U(k_0) \equiv \frac{d\omega}{dk}(k_0) \quad (7.91)$$

Per comprendere come appare il movimento di un gruppo d'onde, a causa del fatto che esso si presenta come il prodotto di una modulante e di una portante, cominciamo col considerare come si presenta la situazione a un tempo fissato, in cui si riguarda solo la variabile  $x$ , e la funzione considerata sia il prodotto  $\cos k_1 x \cos k_2 x$ , con  $k_2 \gg k_1$ , come in figura.

$\cos k_1 x$  modulante

$\cos k_2 x$  portante

$\cos k_1 x \cos k_2 x$

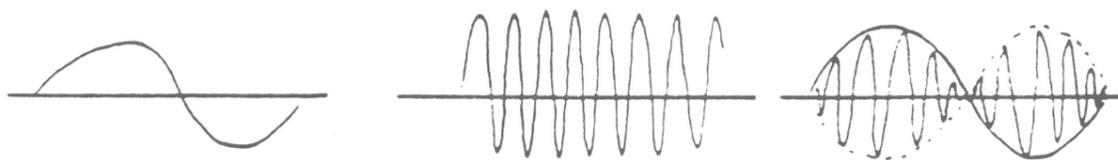


Fig. 7.5

È evidente allora che l'involuppo ha sostanzialmente la forma della modulante  $\cos k_1 x$ , mentre in qualche modo la portante  $\cos k_2 x$  non è rilevante. Per tale motivo, tornando alla funzione (7.87) rappresentante il nostro pacchetto d'onda, in cui tutte le singole componenti della modulante hanno approssimativamente la medesima velocità di fase, ovvero la velocità di gruppo (7.91), è chiaro che in prima approssimazione la forma del pacchetto, descritta dalla modulante (7.88), si sposta *rigidamente* con la velocità di gruppo (7.91).

La dispersione si dice *normale* quando  $V$  è funzione crescente di  $\lambda$  (le onde lunghe vanno più veloci), e *anomala* nel caso contrario. Si ha subito la

**Proposizione 7.5:** Per la velocità di gruppo e la velocità di fase si ha

$$\begin{cases} (\text{dispersione normale: } \frac{dV}{d\lambda} > 0) \Rightarrow U < V \\ (\text{dispersione anomala: } \frac{dV}{d\lambda} < 0) \Rightarrow U > V. \end{cases} \quad (7.92)$$

**Dimostrazione.** Dalla definizione  $V = \frac{\omega}{k}$  si ha  $\omega = V k$  e quindi

$$U \equiv \frac{d\omega}{dk} = V + k \frac{dV}{dk} = V + \lambda \frac{dV}{d\lambda}. \quad (7.93)$$

Q.E.D.

Non si trascuri di osservare l'analogia del ragionamento di Rayleigh con quello ben noto relativo ai *battimenti*, secondo l'intuizione originaria di Stokes. Per quanto riguarda i battimenti, si usa l'identità

$$\sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t = 2 \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right);$$

dunque, se  $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega$ , segue  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \simeq \omega$  e pertanto

$$\sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t \simeq \mathcal{A}(x, t) \sin \omega t, \quad \mathcal{A}(x, t) = 2 \cos \left( \frac{\Delta \omega}{2} t \right),$$

essendo  $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$  piccolo. Per l'argomento dato sopra, si ottiene che ai fini del suono è rilevante la modulante  $\mathcal{A}$ , e quindi nella sovrapposizione delle due onde di frequenza prossima si udrà un suono di pulsazione  $\frac{\Delta \omega}{2}$  (battimento). Ne segue che, quanto meglio sono accordate due corde, tanto più lungo è il periodo del battimento.

Analogamente, per la propagazione di onde, considerando la sovrapposizione di due onde della medesima ampiezza con numeri d'onda  $k_1, k_2$  vicini e dunque pulsazioni  $\omega_1 = \omega(k_1), \omega_2 = \omega(k_2)$  vicine, quando sia assegnata la relazione di dispersione  $\omega = \omega(k)$ , si ha

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A [\sin(k_1 x - \omega_1 t) - \sin(k_2 x - \omega_2 t)] \\ &= 2A \cos \left( \frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \sin \left( \frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right). \end{aligned} \quad (7.94)$$

Dunque è

$$u(x, t) = \mathcal{A}(x, t) \sin(kx - \omega t), \quad (7.95)$$

dove  $k = \frac{k_1 + k_2}{2} \simeq k_1 \simeq k_2$ ,  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$ , e

$$\mathcal{A}(x, t) = 2A \cos \frac{x \Delta k - t \Delta \omega}{2}, \quad (7.96)$$

con  $\Delta k = k_1 - k_2$ ,  $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$ . Si vede così che la modulante ha velocità

$$U = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \simeq \frac{d\omega}{dk} \text{ quando } \Delta k = k_2 - k_1 \simeq 0. \quad (7.97)$$

e pertanto la propagazione avviene con la velocità (di gruppo)  $U = \frac{d\omega}{dk}(k)$  anziché con le singole velocità di fase  $k_1, k_2 \simeq k$ .

- **Osservazione.** Se si ripete al secondo ordine un ragionamento analogo a quello considerato al primo ordine per ottenere la velocità di gruppo, è abbastanza facile mostrare che, in un riferimento che trasla con la velocità di gruppo, la propagazione del pacchetto è descritta da una equazione della stessa forma dell'equazione di Schrödinger. Si veda a tal proposito il libro di Taniuti et al. sulla propagazione delle onde, oppure le note di C. Maroli sullo stesso argomento. In generale, si veda anche T.H. Haveiock, *The propagation of disturbances in dispersive media*, Stechert-Hafner Service Agency (New York and London, 1964).