

## §2)

Piccoli "demoniatori"

Per discutere la convenienza (ognuna sia diversa)

delle "frazioni ziane" la cui esistenza è garantita

dal teorema N. 13 è importante discutere le "quantità"  $\lambda_{ij} - \lambda_i$ , cioè "i" cosiddetti "piccoli demoniatori". Per capire questo fatto si osserva

che quando si risolve l'equazione  $\lambda = \lambda_i + \lambda_{ij}$  si divide per il coefficiente  $\lambda_{ij}$  del

termine noto per  $\lambda_{ij} - \lambda_i$ , si ha un fattore

$$n(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\nu_{ij}}{\lambda_{ij} - \lambda_i} x^j$$

Se  $n$  è un polinomio di grado  $n$ .

A llora ci si può spettare che l'ordine di

grandezza di  $n$  è l'ordine di grandezza

$$\text{di } \lambda_{ij} - \lambda_i \text{ per } i < n \quad \text{Ora questa è una}$$

$$\left\{ \lambda_j - \lambda_i \right\}_{i=1, j=1}^{i=n, j=n}$$

"iniezione" finita e quindi ha una dimensione diversa da zero, ma la sua cardinalità

ha lo stesso di  $i$ , e per dimensione le

nostre equazioni si dicono almeno polinome

di "ogni ordine". È quindi fondamentale

stabilire il comportamento del piccolo dominio quando  $x \rightarrow \infty$ .

A questo scopo è utile distinguere due casi. Per questo dobbiamo dare definita.

Preliminarmente si considera una retta  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  e si dispongono sul piano complesso ( $\mathbb{C}$ ) i punti  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

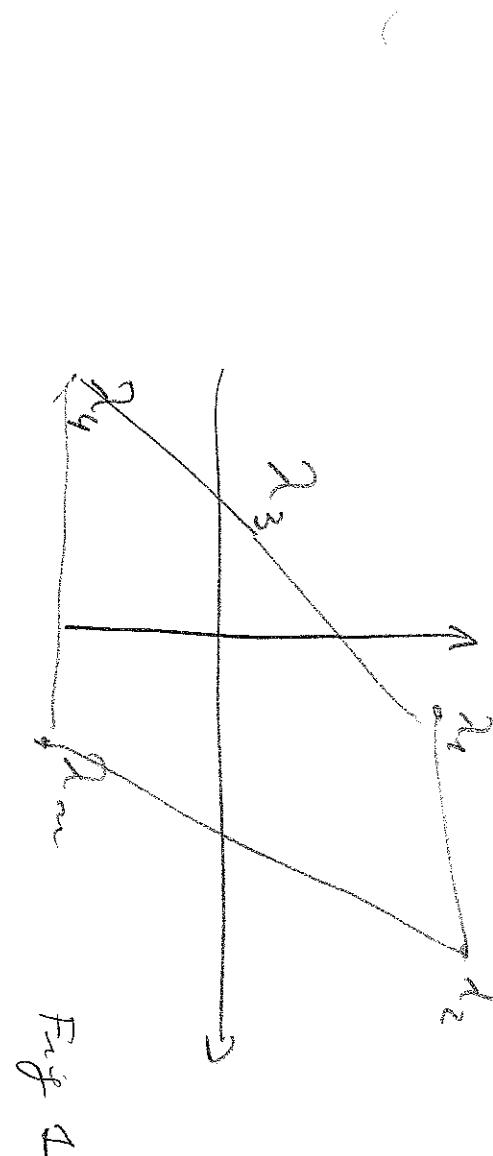


Fig 1

Si considera l'insieme convesso di "tali punti"

Definizione Si chiama insieme convesso contiene l'origine si dice che  $\lambda$  appartiene ad un dominio di Siegel (nella Fig 1)  $\square$

Definizione Si chiama insieme non contenente

l'origine in si dice che  $\lambda$  appartiene ad un

dominio di "Picone" (vedi Fig 2)  $\square$

Osservazione 31

Se  $\lambda$  sta in un dominio di

Picone anche tutti i punti di esse messe insieme formano un solo dominio di Picone. La stessa cosa vale per Siegel

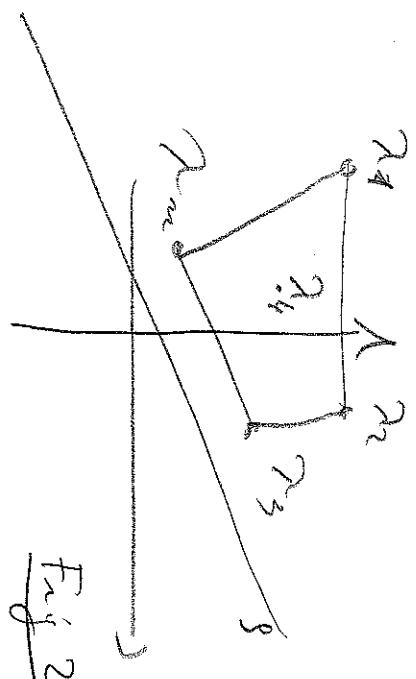


Fig 2

Rimette che se non sono verificate relazioni di minoranza esiste allora in un domino di "Primo" i piccoli denominatori sono divisi da zero.

Precisamente si ha

Proposizione N.15 Sia  $\lambda$  appartenente ad un dominio <sup>(non minorante)</sup>

oh "Primo", allora esiste  $C > 0$  tale che

$$\lambda_n \geq 2 \text{ mentre}$$

$$\min_{\substack{|j|=n \\ i=1, \dots, n}} |\lambda_i - \lambda_j| \geq C_n \quad (20) \quad \square$$

Ese' un vero dominio di "Primo" non solo se piccoli denominatori non sono nulli ma se crescono al crescere dell'ordine  $n$ .

Dimostrazione. Per definizione esiste una

retta  $s$  (vedi fig 2) che separa l'envolto convesso del "Primo". Assumiamo per semplicita' che  $\lambda_1 > 0$  e sia parallela all'asse  $n_1$  (vedi fig 3), se

loro generale è analogo.

(14)

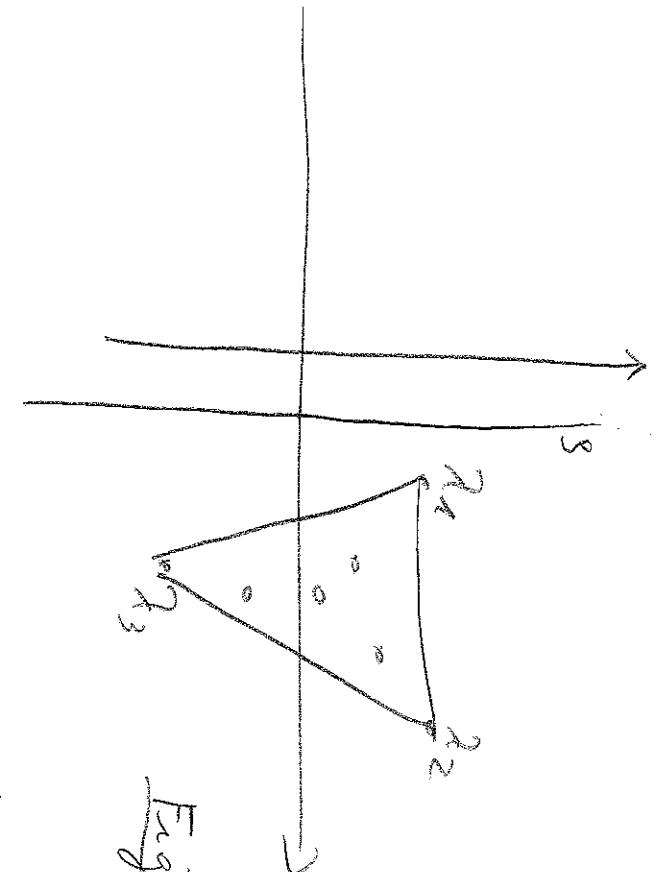


Fig. 3

Ora dimostriamo che  $|\lambda_j - \lambda_i| \geq |\operatorname{Re}(\lambda_j - \lambda_i)|$ .

Se d è la distanza di S dall'origine

chiameremo  $n$  le  $\operatorname{Re} \lambda_k > d$  e  $k$  è grande

$$\operatorname{Re}(\lambda_j - \lambda_i) = \sum_{k=1}^n j_k \operatorname{Re} \lambda_k \geq d \sum_{k=1}^n j_k = n d > d$$

$n = N$ , risulta essere finito  $N = \max_{k=1, \dots, m} \operatorname{Re} \lambda_k$ ,

Suggero

$$|\lambda_j - \lambda_i| \geq |\operatorname{Re}(\lambda_j - \lambda_i)| \geq n d - N,$$

dove l'ultima disegualità è vera perché

è abbia  $n d \geq N$ . Siccome  $n_* = \frac{4N}{d}$ , allora

per  $n \geq n_*$  ha

$$|\lambda_j - \lambda_i| \geq \frac{n d}{2} \left(1 - \frac{2N}{nd}\right) \geq \frac{n d}{2} \left(1 - \frac{2N}{2^* d}\right) = \frac{n d}{4}.$$

Quindi (20) vale per  $n \geq n_*$ . Si prosegue con

$$\tilde{C} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ 2 \leq j \leq n}} \frac{|\lambda_j - \lambda_i|}{|j|}$$

(15)

$$2 \leq j \leq n$$

Perche' l'origine e' finita tale minima ente  
e d' per lui. La (20) vale allora con

$$C = \min \left\{ \frac{d}{n}, \tilde{C} \right\}$$

H

Individuo (1) (Parte)

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \quad \rightarrow \text{Spazio o. p. 17}$$

Proposizione N. 16 Se  $\lambda$  appartiene ad un

dominio di Siegel si ha

$$\inf_{n \geq 2} \min_{i=1, \dots, n} |\lambda_i - \lambda_1| = 0 \quad (21) \quad D$$

Risulta "piccola" distanza tra le "cennate" e  
a zero e in puo' saper che il "problema" di  
classificazione non puo' consistere nel con-  
dizionamento di Siegel.

Dimostrazione Si finisce la dimostrazione  
mostrando che il triangolo costituito dalle val-  
ori di concentrazione  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (vede Fig. 4)

Dalla proposizione N. 15 segue che

(15)

se  $\lambda$  è un valore dominante di  $P_{\mu}$  allora  
c'è uno spettore allo stesso  $\lambda$  (in  $C^{\mu}$ )  
ma non c'è altro  $\mu \neq \mu_0$  tale  
che risulti. Si può fare questo studio nelle varie  
di norme piccole oltre studiati nelle norme  
di dimensione addisposta da  $\lambda + \mu$ .

Sia  $\lambda = \lambda_0$  ( $\lambda_0 \neq \mu_0$ )

$$\begin{aligned} |(\lambda + \mu)^{\alpha}| &= |\lambda^{\alpha} \mu^{\alpha}| \geq |\lambda|^{\alpha} - |\mu|^{\alpha}| \\ &\geq C^{\alpha} - (|\mu^{\alpha}| + |\mu|) \geq C^{\alpha} - 2\|\mu\|^{\alpha} \end{aligned}$$

che è possibile poiché  $2\|\mu\|^{\alpha} < C$

Questa dimostrazione si deve fare  
in base alla definizione di Sylow. Per concludere  
che  $\lambda$  è un valore dominante bisogna che risulti

Definizione Un piano  $\pi$  è un'equazione

$$\int \lambda - \lambda_i = 0$$

n' due piani ribassate

$\Delta$

Proposizione

Se  $\lambda$  è un valore dominante di  $P_{\mu}$  allora  $\lambda > 0$

ad un dominio di  $S_{\mu}$  si può estendere  $V > 0$

Esiste un piano risarcire o distingue  
la riunione ed es



Fig. 4

S' indica l'angolo che fa l'O<sub>1</sub> e

O<sub>2</sub>. Si considerano tutte le combinazioni

linee a coefficienti in base ai valori di x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>,  
che formano un reticolo contenuto nell'angolo.

Sie dico dunque che sono dei parallelogrammi formati dalle elementari delle

re l'angolo. Si finisce intanto N

se si considera - H<sub>23</sub>. Per ripetere una cosa che  
dell'interno dell'angolo considerato è quindi  
nella parte del parallelogrammo. Essa non coincide col  
una distanza infinita ed ha uno solo punto  
del reticolo, distinguibile j<sub>1</sub>, j<sub>2</sub> t.c.

$$| j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \lambda_3 | < d$$

e quindi si ha che

(12)

$$\left| \int_1^{\lambda_1} \lambda_1 + \int_2^{\lambda_2} (\lambda_1 + 1) \lambda_3 - \lambda_3 \right| < d$$

Cioè le distanze di  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  dal

piano nivonente  $j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + (j_1 + j_2) \lambda_3 = 0$

e minore di  $d_H$ . Ricorda che dato

che per la s. equazione  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = d_H$  la sua

distanza dall'origine è  $d_{Hull}$ .

□

Quindi vi sono intorno al  $\lambda$  esiste almeno un altro  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$  nivonante.

Sarà questa dimostrazione ragionata

Proposizione 16.

Per altre volte ipoteza più nivonante (che non si rispetta).

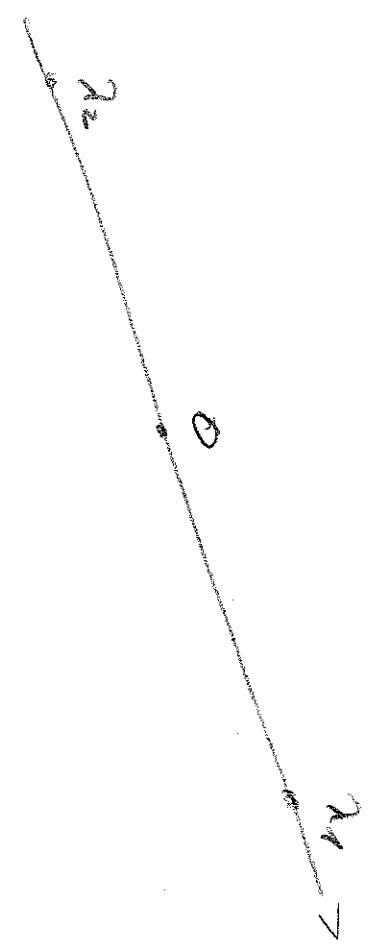
Si considerano se le cose  $n=2$  che presento  
per difficoltà. Si osserva che nel caso  $n=2$  l'

l'unica possibilità è opposta e l'unico pos  
converge di  $\lambda_1, \lambda_2$  con la quale l'origine è

che  $\lambda_1 > \lambda_2$  giacendo su una retta che  
contiene l'origine e che l'origine non

comprende tra le 'colori' (Fig. 5)

(18)



Sia  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  generatrici uscite da 'x',  
tale che le siano  $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(x)$ ,  
esse in 'xa'

$$\alpha_1 - \alpha_1 = (\alpha_1)_1 - \alpha_2)_2 - \alpha_1) w = \\ = [\alpha_1(j_1-1) - \alpha_2]_2 \quad \text{e}$$

il cui modulo è  $\sigma$ , denotando

$$|\alpha_1 - \alpha_2|_2 = |\alpha_2|_1 \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{j_2}{j_1} \right|. \quad (31)$$

E' quindi chiaro che tale quantità non ammette  
che  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  è razionale. D'altra parte, se anche  
la  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  è irrazionale, poiché numeri razionali

sono strettamente legate tra loro in una proporzionalità  
che può dunque essere  $j_2, \alpha_2$  oppure vice  
versa, il numero  $j_1$  può appartenere

presente in "snello". Il problema è tuttavia (19)

che se per far ciò si deve prendere  $q$  molto grande allora dista di (31) potrebbe non essere piccola. L'è non capita. Vediamo che

Teorema (Dirichlet)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $\forall Q \geq 1$  esistono due numeri "con"  $p$  e  $q$  con  $q \leq Q$  t.c.

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qQ}$$

Volta (13a)

Da qui segue rischiarante che, per ogni scelta di  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  sia una domanda di "Siegel".

$$\lim |x_j - x_1| = 0$$

□

Per lo studio della convergenza delle frazioni continue si dice del teorema di "Kronecker" che è sufficiente che i piccoli denominatori non tendano a zero troppo rapidamente al tendere di "Jilloll" infinito.

Definizione Diriammo che  $\alpha$  è di classe  $(\sigma, r)$  se  $\forall j \in \mathbb{Z}^n$   $|j_i| \geq 0$   $|j| \geq 2$  vale

Terremoto V d'E.R. da due giorni  
(Vincitore)

$$|d - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q(q+1)}$$

Ha significato soluzionare con  $\frac{p}{q}$  serie tale  $\mathbb{E}$   
che significa che approssimazione non è approssimazione  
bella, tenuta razionalmente minima di tutti i numeri  
dell'insieme  $\mathbb{Q}$ .

Dimostrazione L'intervallatura di cosa si desidera,  
de cui si corso generale segue immediatamente, e  
denotiamo con  $\{\alpha\}$  le porte frazionarie di  $\mathbb{Q}(x)$ ,  
cioè  $x - \frac{1}{q}$  dove  $q \in \mathbb{Z}$  è la parte razionale di  $x$ .

S'ipponga che in tali  $\mathbb{Q}$  s'è considerato  
il numero

$$\{0, 1, \dots, Q-1\}, \{Q, 1\}, \dots, \{Q, Q-1\},$$

Si trovi tra  $\mathbb{Q}$  i numeri appartenenti a  $[0, 1]$ , quindi  
si si divide  $[0, 1]$  in  $Q+1$  intervalli uguali (di  
lunghezza  $\frac{1}{Q+1}$ ), sia uno di questi intervalli i quali  
contengono 2 di tali numeri. Se è l'intervalle  $[0, \frac{1}{Q+1}]$   
allora significa che  $\exists p, p$  t.c.

$$\{q, d\} = qd - p < \frac{1}{Q+1} \leq \frac{1}{q+1}$$

e la dimostrazione è conclusa. Analogamente  
se l'intervalle non contiene alcuno è quello contenente 1,

Nel caso di una teoria quantistica che leggi  $\rho$  tra.

$$\left| \{d\rho_1 - d\rho_2\} \right| \leq \frac{1}{Q+1}$$

Si considera  $\rho_1 > \rho_2$ , allora si ha

$$|\rho_1 - \rho_2 - d\rho_2 + \rho_2| = |\rho_1 - (\rho_1 - \rho_2) - (\rho_2 - \rho_2)| = |\rho_1 - \rho_2|$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato  $\rho_1 = \rho_2$ .

D

$$|\lambda_j - \lambda_i| \geq \frac{\sigma}{l_{ij}^2}$$

(20)

(3) - pag. (20)  
 Si è  $\Gamma_{\delta, \alpha}^R$  l'unione dei  $\lambda_i$  di "nuovo" minore  
 o uguale ad  $R$  con la proprietà di essere di classe  
 $\delta, \alpha$ . Si "denota" con  $B_R$  la polle di "nuova"  $R$   
 in  $\mathcal{L}^m$ . Allora vale

Teorema Nelle  $\mathcal{L}^m$  esiste  $C$  t.c.

$$\mu(B_R \setminus \Gamma_{\delta, \alpha}^R) \leq C \delta^2.$$

D

Questa si giustifica che, pur di prendere  $\lambda$  obiettivo grande e  $\delta$  abbastanza piccolo, la misura del complemento di  $\Gamma_{\delta, \alpha}^R$  può essere resa arbitraria mente piccola.

Osservazione N.22 La misura di cui sopra è la misura di  $\mathcal{L}^m$  ridistribuita con  $R$ .

Dimostrazione Si fissa  $\epsilon > 0$  e  $\alpha < \epsilon^{1/m}$   
 e andiamo a dimostrare che misura dell'unione

$$B_R = \{ \lambda \in B_R : |\lambda_j - \lambda_i| < \delta \}$$

A tal fine si osserva che, definito  
 $J := (j_1, j_2, \dots, j_m, j_m)$

Osservazione N. 40 Se  $\lambda$  appartenne ad un dominio di "Poisson" allora si chiama  $(\delta, \omega)$  con  $\delta = -1$  e  $\omega$  approssimata

13

L'insieme di cui ci interessano è caratterizzato da (2)

$$\|\lambda \circ \uparrow\|^2 = \|Re \lambda \cdot \uparrow\|^2 + |Im \lambda \cdot \uparrow|^2 < \alpha^2$$

ed è quindi contenuto nell'intervallone dei due valori

$$I_1 = \{ |Re \lambda| < \alpha \}$$

$$I_2 = \{ |Im \lambda| < \alpha \}$$

Si osserva che

$$Re \lambda \cdot \uparrow = \|Re \lambda\| \cdot \|\uparrow\| \cos(\downarrow, \lambda) \quad (31)$$

dove  $\|\cdot\|$  è la norma euclidea e  $\|Re \lambda\| \cos(\downarrow, \lambda)$

è la proiezione di  $Re \lambda$  sulla direzione di  $\uparrow$ .

Quindi  $I_1$  è costituita da tutti i vettori colo propi di

che la proiezione di  $Re \lambda$  in  $\uparrow$  è più piccola

di  $\alpha$ , quindi  $I_1$  è un intorno del punto

$$\frac{\alpha}{\|\uparrow\|},$$

$Re \lambda \cdot \downarrow = 0$  di spazier  $\frac{\alpha}{\|\downarrow\|}$ . Si può che

$I_1 \cap I_2$  è un intorno dell'intersezione dei piani  $Re \lambda \cdot \uparrow = 0$  e  $Im \lambda \cdot \uparrow = 0$  che nelle 2 direzioni  $Re \lambda \cdot \uparrow$  e  $Im \lambda \cdot \uparrow$  ha spazio

$\frac{\alpha}{\|\uparrow\|}$ . L'intersezione di  $I_1 \cap I_2$  con  $B_{\mathbb{R}^m}$

quindi unica struttura che valgono le sue

spaz  $2^{n-2}$  di dimensione per  $\left(\frac{d}{\|j\|}\right)^2$  (base  $\times$  altezza), (22)

le altre sono  $2^{m-2}$ , ad esempio hanno la stessa pericolosità.

d)  $2R$  è quindi molto vantaggioso

$$\mu(T_1 \cap T_2 \cap B_R) \leq \left(\frac{d}{R}\right)^2 (2R)^{2^{n-2}}$$

Ora

$$\|\sum_j\| = \sqrt{\sum_{j_1}^2 + \dots + \sum_{j_m}^2} \geq \sqrt{|\sum_{j_1}| + |\sum_{j_2}| + \dots + |\sum_{j_m}|} = \frac{|\sum_j|}{\sqrt{m}}$$

(stesse dimostrazioni di Schurter) e quindi

$$\mu(\cup_{ij} B_{ij}^d) \leq C \frac{d^2}{\|j\|^2},$$

dove ad esempio  $d = (2R)^{m-2} 2\sqrt{m}$ . Ora

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{i,j \\ i \neq j, m \\ i+j=m}} B_{ij}^d\right) \leq \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j, m \\ i+j=m}} \mu(B_{ij}^d) \leq m \binom{m+2-1}{m-1} \frac{d^2}{n^2}$$

Ora, (vedi lemma A.2)

$$\binom{m+n-1}{m-1} < \frac{(m+n-1)}{(m-1)!}^{m-1} < n^{m-1}$$

e quindi