

# Esercizi di Fisica Matematica 3, anno 2011-2012

Dario Bambusi, Andrea Carati

25.01.2012

## Abstract

Tra i seguenti esercizi verranno scelti gli esercizi dell'esame di Fisica Matematica 3.

## 1 Meccanica Hamiltoniana

**Esercizio 1.1.** *Nel piano si consideri il gruppo di matrici*

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

*Si consideri il gruppo di trasformazioni di coordinate  $\mathbf{x} = R(t)\mathbf{y}$  e si completi tale trasformazione di coordinate nello spazio delle configurazioni ad una trasformazione canonica nel corrispondente spazio delle fasi. Calcolare la quantità conservata associata all'invarianza sotto il gruppo di trasformazioni canoniche così ottenuto.*

**Esercizio 1.2.** *Nel piano si consideri il gruppo di trasformazioni*

$$\begin{aligned} x' &= x + t \\ y' &= y \end{aligned} \quad (1.2)$$

*Si completi tale trasformazione di coordinate nello spazio delle configurazioni ad una trasformazione canonica nel corrispondente spazio delle fasi. Calcolare la quantità conservata associata all'invarianza sotto il gruppo di trasformazioni canoniche così ottenuto.*

**Esercizio 1.3.** *Dire per quali valori dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$  la seguente trasformazione di coordinate è canonica.*

$$P = \alpha p e^{\beta q}, \quad Q = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta q} \quad (1.3)$$

**Esercizio 1.4.** *Dire per quali valori dei parametri  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  la seguente trasformazione di coordinate è canonica.*

$$P = p^\alpha \sin(\beta q), \quad Q = p^\gamma \cos(\beta q) \quad (1.4)$$

## 2 Meccanica Hamiltoniana e quantizzazione

**Esercizio 2.1.** *Data la langragiana*

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} - 3q^2 . \quad (2.1)$$

- *Si calcoli la corrispondente Hamiltoniana*
- *risolvere le equazioni di Hamilton*
- *si scriva la Hamiltoniana quantistica del sistema.*

**Esercizio 2.2.** *Data la langragiana*

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + 2q^2\dot{q}) - q^2 \quad (2.2)$$

- *Si calcoli la corrispondente Hamiltoniana*
- *risolvere le equazioni di Hamilton*
- *si scriva la Hamiltoniana quantistica del sistema.*

**Esercizio 2.3.** *Data la langragiana*

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{1+q^2} - \frac{3}{4}q^2 \quad (2.3)$$

- *Si calcoli la corrispondente Hamiltoniana*
- *si scriva la Hamiltoniana quantistica del sistema.*

## 3 Meccanica quantistica

A premessa di tutti gli esercizi si ricordano le seguenti formule; quelle rilevanti verranno anche ricordate nel testo dei compiti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2 + bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{4a^2}} ,$$
$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Le autofunzioni dell'oscillatore armonico

$$\hat{H} := -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} K x^2 \quad (3.1)$$

sono

$$u_n(x) = N_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} , \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

con  $H_n$  i polinomi di Hermite e  $\alpha = (mK/\hbar^2)^{1/4}$ . I primi sono dati da

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2. \quad (3.3)$$

Nell'oscillatore armonico con  $K = m = \hbar = 1$  gli operatori di creazione e distruzione  $a, a^\dagger$  sono dati da

$$a = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}$$

**Esercizio 3.1.** Si consideri  $\psi_0(x) = Ce^{-x^2/2}$ .

- Determinare  $C$  in modo che valga  $\|\psi_0\|_{L^2} = 1$
- Si consideri l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico con  $K = \hbar^2/m$  e si calcoli il valor medio dell'energia in  $\psi_0$ . Commentare.

**Esercizio 3.2.** Si consideri  $\psi_0(x) = Ce^{-x^2}$ .

- Determinare  $C$  in modo che valga  $\|\psi_0\|_{L^2} = 1$
- Si consideri l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico con  $K = \hbar^2/m$ . Si calcoli la probabilità che una misura dell'energia fornisca il valore  $\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K}{m}}$ .

**Esercizio 3.3.** Si consideri  $\psi_0(x) = Ce^{-x^2/2}$ .

- Determinare  $C$  in modo che valga  $\|\psi_0\|_{L^2} = 1$
- Calcolare la soluzione  $\psi(x, t)$  dell'equazione di Schrödinger per la particella libera con dato iniziale  $\psi_0$ .
- quanto vale  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(0, t)$ ?

**Esercizio 3.4.** Si consideri l'equazione di Schrödinger per una particella libera di massa  $m$  e si assuma che all'istante iniziale la funzione d'onda valga

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Calcolare  $\psi(x, t)$  in termini di trasformata di Fourier. Calcolare la probabilità che la quantità di moto all'istante  $t$  sia tra  $p$  e  $p + dp$ .

**Esercizio 3.5.** Dato il più generale stato a spin  $\hbar/2$  e cioè

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos \delta \\ e^{i\beta} \sin \delta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

calcolare il valor medio della misura dello spin lungo un asse arbitrario.

**Esercizio 3.6.** Dato il più generale stato a spin  $\hbar/2$  e cioè

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos \delta \\ e^{i\beta} \sin \delta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

calcolare la probabilità che una misura dello spin lungo l'asse  $(1,1,0)$  dia risultato  $\hbar/2$ .

**Esercizio 3.7.** Dopo aver misurato la componente  $z$  dello spin di una particella di spin  $\hbar/2$  e aver trovato  $\hbar/2$ , si applica al sistema un campo magnetico intensità  $B$  nella direzione  $(1,0,0)$ .

- Calcolare la probabilità che una misura dello spin lungo l'asse  $z$  all'istante  $t$  dia risultato  $\hbar/2$ .
- Calcolare la probabilità che una misura dello spin lungo l'asse  $x$  all'istante  $t$  dia risultato  $\hbar/2$ .

Si ricorda che la Hamiltoniana di una particella di spin  $\hbar/2$  in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  è  $\mu_s \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , dove  $\mu_s = e/(mc)$

**Esercizio 3.8.** Al tempo  $t = 0$  lo stato di un sistema è dato da

$$\psi = \frac{1+i}{\sqrt{3}} u_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} u_1 \quad (3.7)$$

dove  $u_0$  ed  $u_1$  sono rispettivamente lo stato fondamentale e il primo stato eccitato di un oscillatore armonico con  $K = m = \hbar = 1$ .

- Calcolare il valor medio delle osservabili momento e posizione (si ricordi la loro espressione in termini dei creatori e distruttori).
- Calcolare lo scarto quadratico medio  $\Delta x$  e  $\Delta p$ . Verificare la relazione di indeterminazione di Heisenberg.

**Esercizio 3.9.** Calcolare in funzione dell'energia (positiva) il coefficiente di riflessione della buca di potenziale

$$U(x) = \begin{cases} -1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

**Esercizio 3.10.** Calcolare in funzione dell'energia (maggiore di  $1/2$ ) il coefficiente di riflessione della buca di potenziale corrispondente ad un'onda che arriva da destra

$$U(x) = \begin{cases} -1 & |x| \leq 1 \\ 0 & x > 1 \\ \frac{1}{2} & x < -1 \end{cases} \quad (3.9)$$

**Esercizio 3.11.** Calcolare in funzione dell'energia il coefficiente di riflessione della barriera di potenziale

$$U(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

**Esercizio 3.12.** *Calcolare in funzione dell'energia (positiva) il coefficiente di riflessione della buca di potenziale per un'onda che arriva da destra*

$$U(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & x > 1 \\ -\frac{1}{2} & x < -1 \end{cases} \quad (3.11)$$