

LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

D. BAMBUSI

1. INTRODUZIONE

1.1. In questo capitolo introdurremo la formulazione Lagrangiana della meccanica, studieremo le principali proprietà delle equazioni di Lagrange e infine utilizzeremo i metodi della meccanica Lagrangiana per studiare alcuni problemi concreti, quali la dinamica di un pianeta o la dinamica di un satellite soggetto alle forze di marea.

1.2. Vi sono sostanzialmente due tipi di problemi che conducono alla formulazione Lagrangiana della meccanica: il problema di scrivere le equazioni di Newton di una o più particelle usando coordinate arbitrarie (quali le coordinate polari o sferiche) e il problema di scrivere le equazioni di un sistema vincolato.

1.3. Spesso, lavorando in \mathbb{R}^n è utile usare coordinate diverse da quelle cartesiane. Ciò risulta in particolare quando si abbia a che fare con lo studio di problemi che abbiano delle simmetrie, così ad esempio per studiare un problema a simmetria circolare in \mathbb{R}^2 è utile usare coordinate polari, o per studiare un problema a simmetria cilindrica in \mathbb{R}^3 è utile usare coordinate cilindriche.

Una volta introdotto un sistema di coordinate vi sono alcuni oggetti che sono naturalmente associati ad esso, il primo è costituito dall'insieme delle linee coordinate di tale sistema. Esse sono quelle curve ottenute facendo variare una sola delle coordinate e tenendo fisse tutte le altre. Ad esempio nel caso di coordinate polari piane si ha che le linee coordinate associate alla variabile r sono rette spiccate dall'origine degli assi e dirette verso l'esterno, mentre le linee coordinate associate alla variabile angolare θ sono circonferenze centrate sull'origine.

Un secondo oggetto che è naturalmente associato al sistema di coordinate è la cosiddetta *base coordinata*. Essa è costituita da una base di \mathbb{R}^n , tipicamente diversa in ogni punto dello spazio, che viene utilizzata per decomporre i vettori spiccati dal punto in considerazione. Per costruire tale base si procede come segue: fissato un punto dello spazio si considerano le linee coordinate passanti per tale punto. Il j -esimo vettore della base coordinata è definito come il vettore tangente alla j -esima linea coordinata, opportunamente normalizzato. Risulta che tali vettori formano una base di \mathbb{R}^n . Così, nel caso delle coordinate polari piane il vettore \mathbf{e}_r della base coordinata, che è associato alla variabile r è sempre un vettore diretto radialmente verso l'esterno, mentre, fissato un punto del piano, il vettore \mathbf{e}_θ in tale punto è un vettore tangente alla circonferenza centrata nell'origine e passante per quel punto.

La questione che si pone è infine quella di scrivere le equazioni di Newton in un sistema di coordinate qualsiasi. Precisamente quello che si vuole fare (e che in casi concreti risulta la cosa più utile fare) è dapprima decomporre l'equazione vettoriale di Newton sulla base coordinata del sistema in considerazione e poi trasformare le equazioni così ottenute in equazioni differenziali per la variazione nel tempo delle

coordinate in considerazione. Nell'esempio delle coordinate polari piane, si vuole trasformare l'equazione vettoriale di Newton per una particella nel piano in una coppia di equazioni differenziali scalari che determinino l'andamento nel tempo delle coordinate polari (r, θ) della particella in studio.

Come è facile intuire si tratta di una procedura che se affrontata direttamente è piuttosto complicata, il metodo delle equazioni di Lagrange fornisce un metodo molto semplice per arrivare a tali equazioni. Procederemo in due passi: nel paragrafo 2 daremo la definizione precisa di sistema di coordinate ed effettueremo in modo preciso la costruzione della corrispondente base coordinata, arrivando infine alle equazioni (2.11) che sono il punto di partenza per il secondo passaggio che verrà svolto nel paragrafo 4 e permetterà di arrivare alle equazioni del moto di una particella in coordinate qualsiasi.

1.4. Come anticipato al punto 1.2 un secondo problema che conduce alla formulazione Lagrangiana della dinamica è quello dei moti vincolati. Per fissare le idee si pensi ad una particella vincolata a muoversi lungo un guida¹, ad esempio lungo una parabola contenuta in un piano verticale, cioè di equazione $z = x^2, y = 0$. La posizione della particella è fissata se si conosce la sua coordinata x ; ci si propone di scrivere l'equazione differenziale che regola l'andamento temporale di tale variabile. A tal fine, la principale difficoltà è legata al fatto che oltre alla forza peso ci sono in gioco altre forze, cioè quelle esercitate dalla guida sulla particella e che obbligano la particella a rimanere sulla guida. Tali forze, dette reazioni vincolari, non sono note a priori in quanto è intuitivamente chiaro che esse dipendono dal moto della particella stessa². Nel paragrafo 3 mostreremo come risolvere tale problema arrivando ad equazioni chiuse per la dinamica di un sistema vincolato. Nel paragrafo 4 infine mostreremo come le equazioni di Lagrange forniscano un metodo algoritmico e semplice per scrivere direttamente le equazioni del moto di un sistema vincolato in termini della variabili più convenienti.

2. SISTEMI DI COORDINATE E EQUAZIONI DI NEWTON IN COORDINATE CURVILINEE

2.1. Definizione di sistema di coordinate. Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n dotato delle sue coordinate naturali (x_1, \dots, x_n) . Intuitivamente un sistema di coordinate è una legge regolare che ad n numeri associa un unico punto di \mathbb{R}^n . Una definizione formale è la seguente

Definizione 2.1. *Sia $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aperto; una mappa $\varphi \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$, $q \mapsto x = \varphi(q)$ si dice sistema di coordinate se è iniettiva e se la sua matrice Jacobiana è invertibile in ogni punto di \mathcal{U} .*

2.2. (Esempio) Siano (x, y) coordinate cartesiane in \mathbb{R}^2 , e si consideri la mappa $(r, \phi) \mapsto (x, y)$ che introduce coordinate polari

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi; \tag{2.1}$$

¹concretamente tale modello descrive tra l'altro il moto di un vagone su delle rotaie, come nelle ferrovie o sulle montagne russe

²Per una discussione più approfondita del concetto di reazione vincolare e della sua necessità rinviamo al punto 3.16.

la matrice Jacobiana è data da

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

il cui determinante è r , segue che (2.2) è invertibile nell'intorno di ogni punto diverso dall'origine e le coordinate polari sono un buon sistema di coordinate in ogni punto diverso dall'origine.

2.3. Sempre in \mathbb{R}^2 investighiamo la possibilità di utilizzare come coordinate la coordinata x delle coordinate cartesiane e la coordinata r delle coordinate polari. Esplicitamente esse sono coordinate (q_1, q_2) definite dalla mappa

$$x = q_1, \quad y = \sqrt{q_2^2 - q_1^2} \quad (2.3)$$

(da cui in particolare $q_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$), che chiaramente sono definite solo per $|q_2| \geq |q_1|$. In questo caso la matrice Jacobiana è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-q_1}{\sqrt{q_2^2 - q_1^2}} & \frac{q_2}{\sqrt{q_2^2 - q_1^2}} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

il cui determinante è dato da $\frac{q_2}{\sqrt{q_2^2 - q_1^2}}$. Segue che (2.4) è definita ed invertibile sull'insieme $q_2 \neq |q_1|$. Poiché l'insieme $q_2 \neq |q_1|$ coincide con l'asse delle x (su cui $r = |x|$), il suo complemento è costituito da due aperti, il semipiano superiore e il semipiano inferiore. Scegliendone uno, ad esempio il semipiano superiore, si ha che la coppia $(q_1, q_2) = (x, r)$ soggette al vincolo $q_2 > |q_1|$ costituisce un buon sistema di coordinate per tale semipiano.

2.4. Dalla definizione 2.1 segue subito il

Teorema 2.2. *Sia $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate, allora*

- (i) $\mathcal{V} := \varphi(\mathcal{U})$ è aperto
- (ii) φ è invertibile e la sua inversa è differenziabile.

Dimostrazione. Mostriamo che se $\tilde{x} \in \mathcal{V}$ allora esiste un intorno di \tilde{x} interamente contenuto in \mathcal{V} . Sia \tilde{q} tale che $\tilde{x} = \varphi(\tilde{q})$ (esiste per definizione di \mathcal{V}), allora la matrice Jacobiana $\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q})$ è invertibile (per definizione di sistema di coordinate). Dal teorema della funzione inversa segue che esiste un intorno di \tilde{x} su cui la funzione φ è invertibile (con inversa differenziabile), quindi tale intorno è contenuto nell'immagine di φ e quindi in \mathcal{V} . Essendo la mappa iniettiva essa è invertibile, ma per la proprietà appena dimostrata la funzione inversa è differenziabile in ogni punto di \mathcal{V} . \square

Tale teorema garantisce la validità di due proprietà estremamente importanti e precisante: (1) un sistema di coordinate descrive bene non un solo punto di \mathbb{R}^n , ma una "porzione" di esso (un aperto); (2) al variare con regolarità di un punto in \mathbb{R}^n anche le sue coordinate variano con regolarità (regolarità dell'inversa).

2.5. Come illustreremo nel punto 2.10 le due condizioni della definizione 2.1 sono indipendenti. Ciononostante, dalla costruzione del precedente teorema segue che data una mappa $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cui matrice Jacobiana è invertibile in un punto \tilde{q} allora esiste un intorno \mathcal{U}_0 di \tilde{q} su cui φ è invertibile con inversa differenziabile. Per questo in casi concreti è sufficiente verificare l'invertibilità della Jacobiana per

avere che, pur di restringerne opportunamente l'insieme di definizione, φ definisca un buon sistema di coordinate.

2.6. Nel seguito useremo una notazione comune a tutti i testi di geometria differenziale e di meccanica, cioè, salvo quando necessario per evitare confusioni, dato un sistema di coordinate $x = \varphi(q)$ scriveremo semplicemente $x = x(q)$ omettendo di introdurre una notazione specifica per la mappa che alle q associa le x .

2.7.

Definizione 2.3. *Linee coordinate.* Dato un sistema di coordinate $\mathcal{U} \ni q \mapsto x(q) \in \mathbb{R}^n$ e un punto $\bar{x} = x(\bar{q})$, la curva

$$\gamma_k(t) := x(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{k-1}, \bar{q}_k + t, \bar{q}_{k+1}, \dots, \bar{q}_n) \quad (2.5)$$

si dice *k-esima linea coordinata passante per \bar{x}* .

Pensando agli esempi delle coordinate cartesiane o polari è immediato rendersi conto che gli oggetti appena definiti corrispondono al concetto intuitivo di linee coordinate.

2.8. Fissato un punto $\bar{x} = x(\bar{q})$ il vettore

$$\frac{\partial x}{\partial q_h}(\bar{q}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{h-1}, \bar{q}_h + t, \bar{q}_{h+1}, \dots, \bar{q}_n) - \bar{x}}{t} \quad (2.6)$$

è il vettore tangente alla linea coordinata h -esima nel punto \bar{x} . Dalla condizione sullo Jacobiano risulta che al variare di h da 1 ad n tutti questi vettori sono indipendenti e quindi formano una base di \mathbb{R}^n . Tale base si dice *base coordinata associata al sistema di coordinate (q)* .

2.9. Cominciamo ad affrontare il problema di scrivere le equazioni del moto di una particella in coordinate curvilinee. Si consideri dunque una particella di massa m soggetta ad una forza F . Denotando con x il vettore delle sue tre coordinate cartesiane, le equazioni di Newton hanno la forma

$$m\ddot{x} = F(x) . \quad (2.7)$$

Sia $x = x(q)$ un sistema di coordinate nell'intorno di un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, allora si vogliono scrivere le equazioni differenziali cui soddisfano le variabili q . Più precisamente, si vogliono determinare quelle equazioni differenziali per le q con la proprietà che se $q(t)$ è una loro soluzione allora $x(q(t))$ è soluzione di (2.7).

A tal fine conviene procedere decomponendo l'equazione vettoriale (2.7) sulla base coordinata associata al sistema di coordinate (q) . Consideriamo quindi il sistema di equazioni

$$\frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot m\ddot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot F(x(q)) \quad (2.8)$$

dove si deve intendere

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2} x(q(t)) . \quad (2.9)$$

Per uniformità con quanto faremo più avanti conviene definire ancora il vettore quantità di moto

$$p := m\dot{q} \quad (2.10)$$

e riscrivere la (2.8) nella forma

$$\frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot \dot{p} = \frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot F(x(q)) \quad (2.11)$$

che è la formula principale del paragrafo e costituisce il punto di partenza della teoria del paragrafo 4.

2.10. Complementare. Diamo una breve discussione della definizione di sistema di coordinate. Come mostra l'esempio della mappa $x \mapsto x^3$ l'invertibilità della mappa non implica l'invertibilità della sua matrice Jacobiana (la derivata in questo caso). Un esempio semplice di mappa che ha Jacobiana in ogni punto invertibile, ma non è globalmente invertibile è fornito dall'otto, o meglio dal prodotto cartesiano di un otto per un segmento di piccola lunghezza. Descriviamo brevemente tale esempio: si consideri la mappa

$$(-\pi, \pi) \ni t \mapsto i(t) := (\sin t, 2 \sin t \cos t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.12)$$

la cui immagine è un otto centrato nell'origine. Preso un valore qualsiasi \bar{t} si considerino $i(\bar{t})$, e il vettore $V = (\cos \bar{t}, 2 \cos(2\bar{t}))$ tangente all'otto in tale punto (si osservi che esso è il vettore velocità del moto (2.12) e quindi è effettivamente tangente all'otto). Si consideri il vettore $n(\bar{t}) := (-2 \cos(2\bar{t}), \cos \bar{t})$ ortogonale a V . Sia $\epsilon > 0$ piccolo, e si definisca ora la mappa

$$(-\pi, \pi) \times (-\epsilon, \epsilon) \ni (t, d) \mapsto i(t) + dn(t) = (\sin t - 2d \cos(2t), 2 \sin t \cos t + d \cos t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.13)$$

la cui immagine è una striscia di larghezza 2ϵ attorno all'otto. È facile verificare che la sua matrice Jacobiana ha ovunque determinante diverso da zero, ma è chiaro che molti dei punti che si trovano in un intorno dell'origine non hanno un'unica rappresentazione in termini delle variabili (t, d)

3. SISTEMI VINCOLATI E SOTTOVARIETÀ

3.1. In questa sezione considereremo un insieme di particelle interagenti e soggette a vincoli. In particolare daremo la definizione di vincoli olonomi e di vincoli ideali e arriveremo a scrivere la cosiddetta prima equazione simbolica della dinamica per questi sistemi. *In questo paragrafo denoteremo in grassetto i vettori di \mathbb{R}^3 .*

3.2. Consideriamo un sistema di N particelle di massa m_1, \dots, m_N , interagenti tra loro ed eventualmente soggette a forze esterne. Denotando con $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}$ i vettori delle loro posizioni, esse soddisferanno alle equazioni di Newton

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) \\ \dots \\ m_N \ddot{\mathbf{x}}^{(N)} = \mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) \end{cases} \quad (3.1)$$

Esempio 3.1. *Si considerino due particelle pesanti collegate da una molla di costante elastica k , allora le corrispondenti equazioni di Newton si scrivono*

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}^{(1)} = -k(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}) - m_1 g \mathbf{k} \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}^{(2)} = -k(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) - m_2 g \mathbf{k} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.3. Accanto alla situazione descritta dalle equazioni (3.1) capita spesso di osservare situazioni in cui le particelle non si muovano liberamente in \mathbb{R}^3 , ma vi siano solo alcune configurazioni accessibili. Alcuni esempi sono

- (i) una particella vincolata ad una guida parabolica posta in un piano verticale.

- (ii) il pendolo sferico, in cui una particella è vincolata a muoversi restando all'estremità di un'asta, e l'asta ha l'altro estremo vincolato a rimanere in un punto. Equivalentemente il sistema si può considerare come composto da una particella vincolata a muoversi su una sfera.
- (iii) Una, o più, particelle vincolate a muoversi su di una superficie bidimensionale arbitraria, ad esempio descrivente il profilo di una buca nel terreno in cui cadono dei sassi.
- (iv) Corpo rigido. Due o più particelle vincolate a muoversi in modo che la distanza reciproca restino costanti. Tali vincoli sono modellizzabili come asticelle che collegano tra loro le varie particelle.

3.4. Tutti questi esempi rientrano nella definizione di vincoli olonomi. Si consideri dunque un sistema di N particelle e siano $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}$ i loro vettori posizione.

Definizione 3.2. Sia $\Psi : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^r$ una funzione regolare. Diremo che il sistema soddisfa ad r vincoli olonomi se le uniche configurazioni che il sistema può assumere sono quelle per cui vale

$$\Psi(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) = 0 \quad (3.3)$$

e se per ogni configurazione $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}$ che soddisfa a (3.3) la matrice jacobiana di Ψ ha rango r .

Si osservi che se $r \geq 2$ la funzione Ψ ha più componenti. Denoteremo con $\Psi_1(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}), \dots, \Psi_r(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$ tali componenti.

Nel seguito denoteremo con \mathcal{M} lo spazio delle configurazioni, cioè l'insieme

$$\mathcal{M} := \left\{ (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) \in \mathbb{R}^{3n} : \Psi(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) = 0 \right\} \quad (3.4)$$

Inoltre denoteremo con $x = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$ il vettore $3N$ dimensionale formato dalle posizioni di tutte le particelle.

3.5. Negli esempi di cui al punto 3.3, il numero r e la funzione Ψ sono dati rispettivamente da

- (i) $r = 2$ e $\Psi_1(x, y, z) = z$, $\Psi_2(x, y, z) = x^2 - y$.
- (ii) $r = 1$ e $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ (dove abbiamo fissato la lunghezza dell'asta uguale ad 1).
- (iii) Per fissare le idee consideriamo il caso ad una particella. Qui $r = 1$ e, se la superficie è un grafico sul piano orizzontale $\Psi(x, y, z) = \varphi(x, y) - z$, dove $z = \varphi(x, y)$ è l'equazione della superficie.
- (iv) Se per fissare le idee consideriamo il caso di 4 particelle si ha $r = 6$ (numero di distanze che fissano completamente la forma del solido) e ad esempio $\Psi_1 = \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|^2 - l_1^2$, $\Psi_2 = \|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)}\|^2 - l_2^2$, $\Psi_3 = \|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(4)}\|^2 - l_3^2$, $\Psi_4 = \|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(4)}\|^2 - l_4^2$, $\Psi_5 = \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(3)}\|^2 - l_5^2$, $\Psi_6 = \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(4)}\|^2 - l_6^2$, dove l_1, \dots, l_6 sono le distanze tra le varie particelle.

3.6. **(Complementare).** In queste note ci occuperemo solo di vincoli olonomi, ma segnaliamo che esistono anche vincoli che olonomi non sono, tali vincoli sono detti anolonomi. Tipici vincoli anolonomi pongono restrizioni sui valori possibili della velocità. A questo proposito val la pena di osservare che ci sono vincoli solo apparentemente anolonomi e altri realmente anolonomi. Tra quelli solo apparentemente anolonomi segnaliamo il caso di un disco vincolato a rotolare senza strisciare su di un piano orizzontale, ma vincolato a rimanere sempre contenuto in un piano

verticale fissato. A priori il vincolo stabilisce che la velocità di rotolamento del disco e la velocità di traslazione del suo baricentro sono collegate in modo che il punto di contatto del disco col piano sia istantaneamente fermo. È però chiaro che tale vincolo può essere espresso semplicemente come un legame tra la posizione del baricentro e l'angolo di inclinazione di una direzione fissa sul disco. Si tratta come si usa dire di un vincolo integrabile (espressione che ha un significato letterale e preciso). Tipico esempio di vincolo non integrabile, cioè genuinamente anolonomo è quello di una moneta che rotola senza strisciare su di un piano (senza essere anche obbligata a rimanere contenuta in un piano verticale). Qui il punto di contatto è istantaneamente fermo ed è autorizzato a spostarsi sul piano solo spostandosi nella direzione tangente al disco.

3.7. Si consideri un sistema vincolato e sia $\bar{x} \in \mathcal{M}$ un punto del suo spazio delle configurazioni \mathcal{M} ; denotando $n := 3N - r$ si ha

Teorema 3.3. *Esiste un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ e una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$, $q \mapsto x = \varphi(q)$ tale che per ogni $q \in \mathcal{U}$ si ha $\varphi(q) \in \mathcal{M}$ ed esiste un intorno \mathcal{U}_0 di \bar{x} tale che $\forall x \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{M}$ esiste $q \in \mathcal{U}$ tale che $x = \varphi(q)$. Inoltre gli n vettori di \mathbb{R}^{3N} definiti da*

$$\mathbf{e}_1(q) := \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}(q), \dots, \mathbf{e}_n(q) := \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}(q) \quad (3.5)$$

sono indipendenti.

Dimostrazione. Dalla condizione sul rango della matrice Jacobiana di Ψ esistono r colonne di tale matrice indipendenti. Per fissare le idee assumiamo che siano le ultime r . Sia $x \in \mathbb{R}^{3N}$ il vettore $x = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$; denotiamo ora con q_1, \dots, q_n , $n = 3N - r$ le sue prime $3N - r$ componenti, e con $y = (y_1, \dots, y_r)$ le rimanenti r componenti. Considerando la funzione Ψ come funzione di q ed y , allora il vincolo stabilisce che

$$\Psi(q, y) = 0. \quad (3.6)$$

Ma la matrice Jacobiana $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ è non singolare (le colonne sono indipendenti per costruzioni), quindi si può applicare il teorema della funzione implicita a (3.6) in modo da definire un'unica funzione $y = y(q)$ tale che

$$\Psi(q, y(q)) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{U} \quad (3.7)$$

con \mathcal{U} un aperto opportuno. Definiamo allora $\varphi(q) := (q, y(q))$.

Viceversa, sia $x \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{M}$; se \mathcal{U}_0 è abbastanza piccolo si ha che il vettore $q \in \mathbb{R}^n$ definito da $q_1 := x_1, \dots, q_n := x_n$ sta in \mathcal{U} . Allora è definita la funzione $y(q)$ e, per unicità si avrà che $x_{n+1} = y_1(q), \dots, x_{n+r} = y_r(q)$, cioè $x = \varphi(q)$.

L'indipendenza dei vettori (3.5) segue dal fatto che, per costruzione, sono indipendenti i vettori ottenuti considerando solo le prime n componenti di tali vettori. \square

3.8. **Complementare.** Consideriamo il caso in cui \mathcal{M} sia un sottinsieme compatto di \mathbb{R}^{3N} allora vale il seguente

Teorema 3.4. *Esiste una collezione finita di aperti $\{\mathcal{U}_j\}_{j=1}^k$, con $\mathcal{U}_j \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni j una mappa differenziabile $\varphi^{(j)} : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{M}$ con le seguenti proprietà*

- (i) $\mathcal{M} = \bigcup_j \varphi^{(j)}(\mathcal{U}_j)$
- (ii) Se $\varphi^{(j)}(\mathcal{U}_j) \cap \varphi^{(l)}(\mathcal{U}_l) \neq \emptyset$ per qualche l e j , allora la mappa $[\varphi^{(j)}]^{-1} \circ \varphi^{(j)}$ è definita su un aperto e qui è differenziabile.

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathcal{M}$ possiamo costruire una mappa φ_x ed un aperto \mathcal{U}_x con le proprietà stabilite dal teorema 3.3. Gli insiemi $\varphi_x(\mathcal{U}_x)$ costituiscono una copertura di \mathcal{M} , per la proprietà di compattezza possiamo estrarre dalla copertura $\{\varphi(\mathcal{U}_x)\}_{x \in \mathcal{M}}$ una sottocopertura finita che denoteremo con $\varphi^{(j)}(\mathcal{U}_j)$ (\mathcal{U}_j gli aperti la cui esistenza è enunciata nel teorema). Mostriamo che se $\varphi^{(j)}(\mathcal{U}_j) \cap \varphi^{(l)}(\mathcal{U}_l) \neq \emptyset$ allora si ha che $[\varphi^{(l)}]^{-1} \circ \varphi^{(j)}$ (che fa passare dalle coordinate q introdotte da $\varphi^{(j)}$ alle coordinate p introdotte da $\varphi^{(l)}$) è differenziabile. Si cominci a fissare l'attenzione sulla mappa $\varphi^{(l)}$. Ricordiamo che per costruirla abbiamo considerato la matrice Jacobiana di φ_l e fissato l'attenzione su r delle sue colonne che fossero indipendenti. Diciamo che siano le ultime r allora le coordinate p_1, \dots, p_n erano le prime n componenti di x . Allora la funzione di transizione $[\varphi^{(l)}]^{-1} \circ \varphi^{(j)}$ è definita come $p_\ell := \varphi_\ell^{(j)}(q_1, \dots, q_n)$, $\ell = 1, \dots, n$ che è differenziabile in quanto proiezione (sugli assi $1, \dots, n$) della funzione differenziabile $\varphi^{(j)}(q)$. \square

3.9. Complementare. Le proprietà assicurate dal teorema 3.4 sono in realtà le proprietà definitorie del concetto di varietà differenziale. Più precisamente dato uno spazio topologico \mathcal{M} se esistono degli aperti e delle funzioni con le proprietà (i-ii) del teorema, allora l'insieme si dice *Varietà Differenziale* e risulta che su di esso è possibile sviluppare un buon calcolo differenziale. In tale contesto un sistema di coordinate è chiamato “carta locale” ed una collezione di carte con le proprietà sancite dal teorema 3.4 si dice atlante della varietà. L'idea che sta sotto a tale nomenclature è quella secondo cui un sistema di coordinate corrisponde ad un modo rappresentare un aperto della varietà su \mathbb{R}^n , esattamente come le carte geografiche sono utilizzate per rappresentare un aperto della terra (una sfera) su di un piano (la carta geografica) e una collezione di carte che copra tutta la varietà gioca il ruolo che in geografia è giocato dagli atlanti che collezionando molte rappresentazioni parziali permettono di rappresentare tutta la terra.

Il punto di vista che abbiamo preso qui è sostanzialmente il punto di vista dovuto a Gauss secondo cui era possibile sviluppare lo studio di sottinsiemi di \mathbb{R}^{3N} introducendo i sistemi di coordinate così come abbiamo fatto qui sopra. Nel campo della geometria differenziale il passo successivo è stato fatto da Riemann che ha mostrato come fosse possibile dimenticarsi del fatto che si ha a che fare con sottoinsiemi di \mathbb{R}^{3N} giocando solo sul fatto che esistono sistemi di coordinate in grado di ricoprire tutta la varietà.

3.10. La mappa φ costruita al punto 3.7 costituisce il prototipo di ciò che si intende in questo ambito per sistema di coordinate. L'idea è che usando mappe con le proprietà appena descritte sarà possibile rappresentare un aperto di \mathcal{M} tramite la collezione delle sue coordinate (q_1, \dots, q_n) . Una definizione precisa è data da

Definizione 3.5. Una mappa $\varphi : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{3N}$, $q \mapsto \varphi(q)$ si dice sistema di coordinate se è iniettiva e se per ogni $q \in \mathcal{U}$ la matrice Jacobiana di φ ha rango n .

3.11. Enunciamo ora un teorema che corrisponde in questa situazione al teorema 2.2 del paragrafo 2 e che garantisce che in un certo senso l'immagine di un sistema di coordinate è aperta, cioè “copre almeno una porzione di \mathcal{M} ”.

Teorema 3.6. Sia $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ un sistema di coordinate, allora

- (i) se $\tilde{x} \in \varphi(\mathcal{U})$ esiste un suo intorno $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^{3N}$ tale che $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{M} \subset \varphi(\mathcal{U})$.

(ii) *La mappa φ è invertibile.*

Ometto la dimostrazione che è una semplice variante della dimostrazione del teorema 2.2. Si osservi che qui non ha senso parlare di differenziabilità della funzione φ^{-1} in quanto andrebbe prima data la definizione di funzione differenziabile nel caso di funzioni definite solo su sott'insiemi non aperti di \mathbb{R}^n .

Ancora una volta si ha che se φ soddisfa la sola condizione sulla matrice Jacobiana, allora la condizione di iniettività è automatica pur di restringere opportunamente il dominio \mathcal{U} .

3.12. Esattamente come nel caso del punto 2.6 denoteremo un sistema di coordinate semplicemente con $x = x(q)$ omettendo il simbolo specifico della funzione φ che definisce tale sistema.

Analogamente a quanto fatto nei punti 2.7 e 2.8 si definiscono poi le linee coordinate e i vettori ad esse tangenti. Si osservi che adesso le linee coordinate sono interamente contenute in \mathcal{M} , mentre i vettori ad essi tangenti tipicamente non sono contenuti in \mathcal{M} .

Si consideri ancora un sistema vincolato e sia \mathcal{M} il suo spazio delle configurazioni. Sia $\bar{x} \in \mathcal{M}$ e sia $x(q)$ un sistema di coordinate in un intorno di \bar{x} .

Definizione 3.7. *Lo spazio lineare generato dai vettori*

$$\frac{\partial x}{\partial q_h}(\bar{x}), \quad h = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

si dice spazio tangente ad \mathcal{M} in \bar{x} e si denota con $T_{\bar{x}}\mathcal{M}$.

3.13. **Complementare.** Diamo qui il fondamentale risultato secondo cui lo spazio tangente è un oggetto intrinseco indipendente dal sistema di coordinate utilizzato per definirlo.

Teorema 3.8. *Dati due sistemi di coordinate $x = x(q)$ e $x = x(p)$ lo spazio lineare generato dai vettori*

$$\frac{\partial x}{\partial q_h}(\bar{x}), \quad h = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

coincide con lo spazio lineare generato dai vettori

$$\frac{\partial x}{\partial p_k}(\bar{x}), \quad k = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Dimostrazione. Faremo riferimento solo alle coordinate del tipo introdotto nel teorema 3.3, il caso generale si può facilmente ottenere passando da tali coordinate. Il risultato è una banale conseguenza del fatto che data una curva regolare $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_{3N}(t))$ tale che $\gamma(0) = \bar{x}$ e $\gamma(t) \in \mathcal{M}$ si ha che $\dot{\gamma}(0)$ appartiene allo spazio lineare generato dai vettori (3.9). Per dimostrare quest'ultima affermazione ricordiamo che le coordinate introdotte nel teorema 3.3 sono le prime n componenti del vettore x (pur di riordinare opportunamente le coordinate). Allora definiamo $q_j(t) := \gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, n$. Dalla costruzione del sistema di coordinate si ha allora

$$\gamma(t) \equiv x(q_1(t), \dots, q_n(t)) \quad (3.11)$$

da cui, usando il teorema di derivazione di funzione composta si ha

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_j} \dot{q}_j(0), \quad (3.12)$$

che mostra come effettivamente $\dot{\gamma}(0)$ sia combinazione lineare dei vettori 3.9. Per avere la dimostrazione del teorema basta allora osservare che i vettori (3.10) sono i vettori tangenti alle linee coordinate del sistema p , che sono curve regolari e quindi tali vettori sono nello spazio generato dai vettori 3.9. Essendo n vettori indipendenti ne costituiscono una base, ne segue la tesi. \square

3.14. Facendo ancora riferimento agli esempi del punto 3.3 descrivo \mathcal{M} , un esempio di sistema locale di coordinate, le sue linee coordinate e i corrispondenti vettori tangenti.

- (i) Particella vincolata ad una guida parabolica. \mathcal{M} è la parabola cui è vincolata la particella. Un buon sistema di coordinate è dato dalla coordinata x (la parabola è un grafico sull'asse delle x). Lo spazio tangente $T_{\bar{x}}\mathcal{M}$ è la retta tangente alla parabola nel punto \bar{x} .
- (ii) Pendolo sferico. Supponiamo per fissare le idee che la sfera cui la particella è vincolata a muoversi sia di raggio unitario e centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Un buon sistema di coordinate definito sull'aperto costituito da tutta la sfera tranne i poli è dato dagli angoli φ e θ delle coordinate polari, definiti da

$$x = \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \cos \theta. \quad (3.13)$$

Le linee coordinate associate alla variabile θ sono cerchi massimi passanti per il polo nord e il polo sud; Le linee coordinate sono i paralleli, cioè i cerchi paralleli all'equatore. Corrispondentemente il vettore

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \equiv (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta)$$

è un vettore tangente alla sfera tangente in particolare ai cerchi massimi nord-sud, mentre il vettore

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \equiv (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0)$$

è un vettore tangente alla sfera diretto orizzontalmente. Lo spazio tangente coincide con il piano tangente così come inteso in modo intuitivo. Si osservi che per descrivere un intorno dei poli è necessario utilizzare un diverso sistema di coordinate, ad esempio si possono usare le prime due coordinate cartesiane del punto e cioè (x, y) .

- (iii) Qui un buon sistema di coordinate è dato banalmente dalle coordinate x, y . Le linee coordinate sono le linee di equazione $(x+t, y, \varphi(x+t, y))$ e $(x, y+t, \varphi(x, y+t))$ al variare di t . I vettori tangenti sono i vettori tangenti a tale linee e lo spazio tangente è ancora il piano tangente standard.

L'esempio del corpo rigido è più complicato ed una sua trattazione è omessa (richiederebbe l'introduzione di una parametrizzazione del corpo rigido, tradizionalmente data dagli angoli di Eulero).

3.15. Tutto quanto esposto precedentemente si estende al caso in cui si abbia a che fare con "vincoli dipendenti dal tempo", cioè al caso in cui la funzione Ψ dipenda anche dal tempo. In tal caso si avrà che la varietà vincolare

$$\mathcal{M}_t := \{x \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N} : \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0\}$$

dipende anch'essa dal tempo e che un sistema di coordinate è una mappa $x = x(q, t)$ tale che per ogni q e per ogni t si abbia

$$x(q, t) \in \mathcal{M}_t . \quad (3.14)$$

3.16. Reazioni Vincolari. L'idea centrale che sta alla base dell'introduzione del concetto di reazione vincolare è che la meccanica è governata dalle equazioni di Newton, che devono sempre valere. Questo vuol dire che se una particella compie un moto, vale a dire se la sua posizione evolve secondo una certa legge oraria $\mathbf{x}(t)$ allora ciò significa che necessariamente ad essa è applicata una forza uguale a $m\ddot{\mathbf{x}}(t)$ che si pensa provocare quel moto. Una conseguenza di questo assioma di tutta la fisica classica è che, se osservo che una particella si muove rispettando dei vincoli, allora deve esistere un forza che mantiene la particella sul vincolo. Se ad esempio osservo una particella ferma appoggiata su un tavolo, ne deduco che, visto che la sua accelerazione è nulla, la risultante delle forze ad essa applicate è nulla. Ma sappiamo che una particella su un tavolo è soggetta alla forza peso, e quindi ne deduco che il tavolo esercita una forza sulla particella, forza che equilibra esattamente la forza di gravità.

Alla luce di questa discussione si fa l'ipotesi che le equazioni cui soddisfa un sistema di N particelle vincolate non sia dato da (3.1) ma da

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) + \Phi_1 \\ m_2\ddot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) + \Phi_2 \\ \dots \\ m_N\ddot{\mathbf{x}}^{(N)} = \mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) + \Phi_N \end{cases} \quad (3.15)$$

dove Φ_1, \dots, Φ_N sono delle forze chiamate *reazioni vincolari* che sono a priori incognite. Nel seguito indicheremo con Φ il vettore $3N$ dimensionale avente come componenti i vettori tridimensionali Φ_1, \dots, Φ_N , cioè

$$\Phi := (\Phi_1, \dots, \Phi_N) . \quad (3.16)$$

3.17. Essendo le reazioni vincolari a priori incognite non è possibile determinare il moto di un sistema che ubbidisce alle equazioni (3.15) e vincolato a soddisfare sempre un certo vincolo, cioè a rimanere sempre sulla varietà \mathcal{M} determinata dagli zeri di una funzione Ψ . Per questo è necessario fare delle ipotesi sulla natura dei vincoli. Assumeremo qui che i vincoli siano ideali. Per dare una definizione precisa cominciamo a fissare la funzione Ψ ed un punto arbitrario dello spazio delle configurazioni \mathcal{M} . Nell'intorno di tale punto introduciamo un sistema di coordinate locali (q_1, \dots, q_n) e si considerino i vettori coordinati $\frac{\partial x}{\partial q_h}$.

Definizione 3.9. *I vincoli cui è soggetto il sistema si dicono ideali se si ha*

$$\frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot \Phi \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_h} \cdot \Phi_j = 0 , \quad \forall h = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

cioè se la proiezione della reazione vincolare su tutti i vettori di una base dello spazio tangente ad \mathcal{M} è nulla. Equivalentemente la proiezione della reazione sullo spazio tangente deve essere nulla.

3.18. Complementare. Val la pena di osservare che l'ipotesi di idealità richiede che la reazione vincolare, *quando considerata come vettore nello spazio* \mathbb{R}^{3N} , sia tangente ad \mathcal{M} . Andiamo a verificare come l'ipotesi di idealità sia verificata anche dal vincolo di rigidità (esempio (iv) del punto 3.14), purché le forze che realizzano il vincolo soddisfino al principio di azione e reazione. Si consideri dunque un corpo rigido e si considerino due delle sue particelle, diciamo la i -esima e la j -esima, i cui vettori posizione saranno dati rispettivamente da \mathbf{x}_i e da \mathbf{x}_j . Assumiamo che le corrispondenti equazioni di Newton abbiano la forma

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{F}_i(x) + \sum_{k \neq i} \Phi_{ik} \\ m_j \ddot{\mathbf{x}}_j &= \mathbf{F}_j(x) + \sum_{k \neq j} \Phi_{jk} \end{aligned}$$

dove Φ_{ik} rappresenta la reazione vincolare che è esercitata dalla particella k -esima sulla particella i -esima. Assumeremo che tale reazione vincolare sia diretta lungo la congiungente le due particelle e che valga il principio di azione e reazione, cioè che si abbia

$$\Phi_{ik} = \lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k), \quad \Phi_{ik} = -\Phi_{ki}. \quad (3.18)$$

per qualche scalare λ . Introducendo un sistema di coordinate Lagrangiane q si avrà che per ogni valore di q dovrà valere la relazione imposta dal vincolo cioè

$$\|\mathbf{x}_i(q) - \mathbf{x}_j(q)\|^2 = l_{ij}^2 \quad (3.19)$$

con un opportuna costante l_{ij} . Derivando la (3.19) rispetto a q_h si avrà la relazione

$$2(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_h} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Consideriamo ora

$$\Phi_{ij} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h} + \Phi_{ji} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_h} = \Phi_{ij} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_h} \right) = \lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_h} \right) = 0 \quad (3.21)$$

da cui si ha subito che

$$\Phi \cdot \frac{\partial x}{\partial q_h} = \sum_{i \neq k} \Phi_{ik} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h} = \sum_{i < k} \Phi_{ik} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h} + \Phi_{ki} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_h} = 0.$$

3.19. Si consideri ora un sistema di N particelle soggetto ad r vincoli olonomi ideali e si introduca quindi un sistema di coordinate $x(q)$. Mostriamo come sia possibile dare alle sue equazioni del moto una forma estremamente simile a (2.11). A questo scopo introduciamo le notazioni

$$\mathbf{F} := (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N), \quad \mathbf{p}_j := m_j \dot{\mathbf{x}}_j, \quad \mathbf{p} := (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$$

denoteremo anche (come sopra) con un puntino il prodotto scalare euclideo in \mathbb{R}^{3N} (o in ogni spazio \mathbb{R}^k). Utilizzando tali notazioni le equazioni (3.15) si possono scrivere sinteticamente nella forma

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} + \Phi \quad (3.22)$$

dove \mathbf{F} è da pensarsi come funzione di $x(q)$ e $\dot{\mathbf{p}}$ come funzione di q e delle sue derivate temporali.

Prendendo il prodotto scalare di (3.22) con $\frac{\partial x}{\partial q_h}$ si trova

$$\frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot \dot{p} = \frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot F \quad (3.23)$$

dove abbiamo sfruttato la condizione (3.17) di idealità dei vincoli. Equazione che è formalmente identica a (2.11)

4. EQUAZIONI DI LAGRANGE

4.1. In questo paragrafo introdurremo la funzione di Lagrange o Lagrangiana di un sistema di particelle eventualmente soggette a vincoli olonomi ideali e mostriamo come essa permetta di scrivere in modo semplice ed efficiente le equazioni del moto del sistema. Se il sistema non è soggetto a vincoli denoteremo con \mathcal{M} l'intero \mathbb{R}^{3N} .

4.2. Si consideri dunque un sistema di N particelle eventualmente soggette a r vincoli olonomi ideali. Si introducano coordinate Lagrangiane $x(q)$, cioè coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$ tali che $x(q) \in \mathcal{M}$. Ci si propone di studiare i moti in termini delle variabili q . Preliminarmente si osservi che, assegnata una funzione $q(t)$ essa definisce un moto su \mathcal{M} di legge oraria $x(q(t))$ la corrispondente velocità è data da

$$\frac{d}{dt}x(q(t)) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_h}(q(t))\dot{q}_h(t); \quad (4.1)$$

per questo, in ambito Lagrangiano, quando si scrive \dot{x} si intende in realtà la quantità

$$\dot{x}(q, \dot{q}) := \sum_{h=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_h}(q)\dot{q}_h \quad (4.2)$$

che è pensata come funzione delle variabili indipendenti q e \dot{q} , che svolgono qui il ruolo di variabili sullo quello che nel capitolo 1 avevamo chiamato spazio delle fasi. In meccanica Lagrangiana tali quantità sono *sempre* pensate come variabili indipendenti.

4.3. Cominciamo con la seguente

Definizione 4.1. *Si dice energia cinetica T del sistema la funzione*

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j \quad (4.3)$$

dove

$$\dot{\mathbf{x}}_j(q, \dot{q}) := \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_h}(q)\dot{q}_h \quad (4.4)$$

Dimostreremo tra poco il

Teorema 4.2. *Le equazioni del moto di un sistema di particelle (cf.(2.11) e (3.19)) eventualmente soggette a vincoli olonomi ideali sono date da*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = F \cdot \frac{\partial x}{\partial q_h} \quad (4.5)$$

4.4. Partiamo con la dimostrazione del teorema 4.2. Cominciamo con il dare due formula puramente cinematiche che saranno utili, ma preliminarmente fissiamo alcune notazioni. Scriveremo (come sopra)

$$x = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = (x_1, \dots, x_{3N}) = \{x_j\}_{j=1}^{3N},$$

e se $x(q)$ è un sistema di coordinate scriveremo, in analogia con (4.4)

$$\dot{x}_j = \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k. \quad (4.6)$$

Lemma 4.3. *Per ogni j e h valgono le due formula*

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_h} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_h}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_h} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_h} \quad (4.7)$$

Dimostrazione. Derivando la (4.6) rispetto a \dot{q}_h si ha

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_h} = \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \delta_{kh} \quad (4.8)$$

dove δ_{kh} è la delta di Kronecker che vale 1 se $k = h$ e zero altrimenti (componenti della matrice identità). Effettuando la somma scompaiono tutti i termini con $k \neq h$ e resta $\frac{\partial x_j}{\partial q_h}$, il che dimostra la prima delle (4.7).

Per dimostrare la seconda si consideri una funzione $q(t)$, allora si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_h}(q(t)) = \sum_k \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k; \quad (4.9)$$

d'altra parte, derivando la (4.6) rispetto a q_h si ha

$$\frac{\partial}{\partial q_h} \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k$$

che coincide con la (4.9). □

Usando tale lemma è possibile concludere la

Dimostrazione del teorema 4.2. Mostriamo che per ogni j ed h si ha

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_h} \ddot{x}_j = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial}{\partial q_h} \right) \frac{1}{2} \dot{x}_j^2 \quad (4.10)$$

infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial q_h} \ddot{x}_j &= \frac{\partial x_j}{\partial q_h} \frac{d \dot{x}_j}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_h} \right) - \dot{x}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_h} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_h} \right) - \dot{x}_j \left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_h} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \frac{1}{2} \dot{x}_j^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{1}{2} \dot{x}_j^2 \end{aligned}$$

che è la (4.10). Da qui moltiplicando per la massa e sommando su j si trova che

$$\frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot p = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial}{\partial q_h} \right) T$$

e quindi, le equazioni (3.23) risultano equivalenti a

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial}{\partial q_h} \right) T = F \cdot \frac{\partial x}{\partial q_h} \quad (4.11)$$

che è la tesi. □

4.5. Nel caso di forze che ammettono potenziale è possibile dare una formula molto semplice anche per il lato sinistro di (4.3). Assumiamo dunque che il sistema di forze F ammetta potenziale V , cioè che esista una funzione $V = V(x)$ tale che $F_j(x) = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$

Definizione 4.4. Si dice *Lagrangiana del sistema* la funzione

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j \cdot \dot{x}_j - V(q) \quad (4.12)$$

dove $V(q) := V(x(q))$.

Dal teorema 4.2 si ottiene facilmente un importantissimo risultato che costituisce la conclusione principale del capitolo.

Corollario 4.5. *Le equazioni del moto di un sistema di particelle soggette a vincoli olonomi ideali le cui forze ammettono potenziale sono date da*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \quad (4.13)$$

Dimostrazione. Basta osservare che dalla regola di derivata di funzione di funzione si ha

$$\frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_h} = -F \cdot \frac{\partial x}{\partial q_h} \quad (4.14)$$

□

4.6. Il teorema 4.2 e il corollario 4.5 valido anche nel caso di vincoli dipendenti dal tempo come descritti nel punto 3.15.