APPUNTI DI SISTEMI DINAMICI

Dario Bambusi*
Dipartimento di Matematica dell'Università,
Via Saldini 50, 20133 MILANO, Italy.

disponibili nell'ultima versione in http://www.mat.unimi.it/~ bambusi

* e-mail:bambusi@mat.unimi.it

27.3.06

1

INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1.1 Introduzione

1. In questo primo paragrafo viene introdotto ed illustrato brevemente il concetto di equazione differenziale, vengono inoltre introdotte la notazione e la nomenclatura di base del campo.
2. Denoteremo spesso con un punto la derivata rispetto al tempo, cioè, se $x(t)$ è una funzione del tempo denotiamo $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$ e $\ddot{x} := \frac{d^2x}{dt^2}$. Inoltre tranne quando esplicitamente richiesto per rendere più chiaro il contesto non faremo distinzioni notazionali tra un numero reale (o complesso) e un vettore. Infine, data una funzione f, che a una variabile indipendente t associa il valore di una variabile $x \in \mathbb{R}^n$, cioè $x = f(t)$, indicheremo spesso tale funzione semplicemente con la notazione $x = x(t)$.
3. Per equazione differenziale si intende una relazione che lega tra loro il valore di una funzione, il valore delle sue derivate e il valore delle variabili indipendenti. Ci occuperemo qui solo di funzioni di un'unica variabile indipendente t, che sono dette *equazioni differenziali ordinarie.* Le equazioni differenziali che consideremo saranno tutte *in forma normale*, cioè risolte rispetto alle derivate di grado massimo. Infine ci occuperemo solo di equazioni del primo o del secondo ordine, cioè contenenti al più derivate prime e seconde rispettivamente. Le forme più generali di tali equazioni sono rispettivamente

$$\dot{x} = f(x,t) \ . \tag{1}$$

e

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) \ . \tag{2}$$

4. Poiché $x \in \mathbb{R}^n$ tanto (1) quant (2) sono sistemi. Ad esempio scrivendo $x = (x_1, ..., x_n)$, $f = (f_1, ..., f_n)$, (1) è equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

5. Una funzione $x = x(t)$ si dice *soluzione dell'equazione differenziale (1)* se per ogni tempo t per cui è definita soddisfa a

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t),t) \ . \tag{3}$$

analogamente una funzione $x(t)$ si dice soluzione dell'equazione (2) se per ogni tempo soddisfa a

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t) \ . \tag{4}$$

Si consideri ad esempio l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \lambda x \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \ ; \tag{5}$$

allora, per le note proprietà dell'esponenziale si ha che, per ogni scelta della costante reale a, la funzione $x(t) := ae^{\lambda t}$ è soluzione di (5), mentre ad esempio la funzione $\tilde{x}(t) := t/\lambda$ non è soluzione poichè si ha che la sua derivata, cioè $1/\lambda$, coincide con $\lambda x(t)$ per $t = 1/\lambda$, ma non per tutti gli altri valori di t.

6. È facile rendersi conto del fatto che è sempre possibile ricondursi al caso di equazioni differenziali del primo ordine. Infatti si consideri l'equazione (2) e si introduca la nuova variabile $v := \dot{x} \in \mathbb{R}^n$, allora è possibile riscrivere l'equazione nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases} , \tag{6}$$

che, definendo

$$y := \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \ , \quad F(y, t) := \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$$

assume la forma $\dot{y} = F(y, t)$. Quindi per capire le proprietà generali delle equazioni differenziali è sufficiente studiare le equazioni del primo ordine. Va però segnalato che le equazioni di ordine superiore godono spesso di proprietà speciali, per questo a volte ci occuperemo dello studio di alcune di esse.

7. Ad esempio data un'equazione del secondo ordine in una variabile reale

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

il corrisponendente sistema di equazioni del primo ordine è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases} ;$$

si osservi che il più generale sistema di equazioni del primo ordine è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, v, t) \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases} ,$$

e che dunque il caso di sistemi provenienti da sistemi del secondo ordine è quello particolare in cui $g(x, v, t) \equiv v$.

8. Si consideri un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine (cioè della forma (1) con $x \in \mathbb{R}^n$) con lato destro dipendente dal tempo (cioè tale che $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$). È facile rendersi conto che esso è equivalente ad un sistema di $n+1$ equazioni differenziali indipendenti dal tempo. Tale sistema è dato da

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(0)} &= 1 \\ \dot{x} &= f(x, x_{(0)}) \end{aligned} \tag{7}$$

Per questo, per studiare i sistemi in generale basta studiare i sistemi indipendenti dal tempo. Talvolta è però utile studiare il caso dipendente dal tempo, in quanto gode di proprietà speciali.

9. L'esempio più semplice di equazione differenziale è :

$$\dot{x} = 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \ ,$$

la cui unica soluzione è nota da analisi 1 ed è data da $x(t) = k$ (costante indipendente dal tempo). Appena più complicato è risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(t) \ , \qquad x \in \mathbb{R} \tag{8}$$

integrando tra t_0 e t si ha infatti

$$x(t) - x(t_0) := \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \ .$$

10. In generale non è possibile trovare la soluzione tramite operazioni "elementari" quali calcolo di integrali e inversione di funzioni. Si osservi in particolare che data l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x) \ , \tag{9}$$

è possibile integrare entrambi i membri, diciamo tra un valore t_0 ed un generico valore del tempo t, ma quella che otteniamo è l'equazione

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(x(s)) ds \ , \tag{10}$$

in cui la funzione incognita $x(t)$ compare sia a lato sinistro che a lato destro dove appare sotto il segno di integrale. Segnaliamo che l'equazione (10) va sotto il nome di equazione integrale di Volterra associata all'equazione differenziale (9) e che la sua soluzione è equivalente alla soluzione dell'equazione differenziale orginale (cui sia stato aggiunto il dato iniziale $x(t_0)$).

11. Vi è un'importante classe di equazioni che possono essere risolte analiticamente in modo molto semplice: si tratta delle *equazioni a variabili separabili.* Tra di esse si trovano le equazioni della forma

$$\dot{x} = f(x) \ , \quad x \in \mathbb{R} \tag{11}$$

cioè le equazioni del primo ordine indipendenti dal tempo in una sola variabile spaziale. Per vedere come risolvere tali equazioni fissiamo un aperto $\mathcal{U}$ in cui f sia diversa da zero, cioè assumiamo $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathcal{U}$. Sia $x_0 \in \mathcal{U}$, e consideriamo una soluzione continua con la proprietà $x(0) = x_0$, allora, poiché $\dot{x}(0) = f(x_0) \neq 0$ esiste un intorno di $t = 0$ in cui la funzione $x(t)$ è invertibile. Denotiamo semplicemente con $t(x)$ la sua inversa. Dal teorema sulla derivata della funzione inversa si ha allora

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{dx/dt} = \frac{1}{f(x)}$$

che è un'equazione della forma elementare (8) (con i ruoli di x e t scambiati tra loro), e quindi integrabile banalmente dando

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(s)} ds = t(x) - t(x_0) \tag{12}$$

da questa formula tramite un'inversione è poi possibile trovare la funzione $x(t)$.

Val la pena di segnalare un modo di procedere formale che permette di ricordare bene la procedura di cui sopra: moltiplicando per dt l'equazione differenziale e dividendo per f si trova

$$\frac{dx}{f(x)} = dt$$

che integrata fornisce l'equazione (12).

12. Un caso particolare e molto importante di equazione differenziale a variabili separabili è dato dall'equazione lineare (5):

$$\dot{x} = \lambda x \ . \tag{13}$$

Si fissi $x_0 \neq 0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui $x \neq 0$ e quindi si ha

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\lambda s} ds = t \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} \ln |s| \Big|_{x_0}^{x} = t \Longleftrightarrow \ln \left| \frac{x}{x_0} \right| = \lambda t \ ,$$

dove abbiamo scelto $t(x_0) = 0$; poiché nell'intorno considerato il segno di x è uguale al segno di x_0 il modulo può essere tolto e si ottiene quindi

$$x = x_0 e^{\lambda t} \ . \tag{14}$$

Formula che è facile vedere essere valida anche nel caso in cui $x_0 = 0$.

1.2 Alcuni Modelli

13In questo paragrafo discuteremo alcuni modelli che conducono ad equazioni differenziali. Daremo in particolare l'equazione per il decadimento radioattivo, ed un'equazione che emerge dal problema della datazione di fossili basata sul decadimento radioattivo di alcune sostanze. Infine ci occuperemo di alcuni casi concreti di equazione di Newton per la dinamica di una particella. Considereremo in particolare il caso del pendolo meccanico ed il caso dell'equazione del moto di una particella in un fluido. Mostreremo anche come tale equazione giochi un ruolo importante nell'esperimento di Millikan per la misura della carica dell'elettrone.

14. In un materiale radioattivo i nuclei degli atomi sono instabili e tendono a trasformarsi in nuclei di altro materiale. Tale fenomeno va sotto il nome di decadimento radioattivo. Si tratta di un fenomeno governato dalla meccanica quantistica, e come tale probabilistico. In particolare si trova che la probabilità p che un nucleo decada in certo tempo Δt è proporzionale al tempo Δt ed indipendente da tutti gli altri fattori. In particolare, data una certa massa di materiale contenente diciamo N atomi, segue che il numero di atomi che decadono nell'intervallo di tempo Δt è dato da $pN\Delta t$; denotando con $\Delta N := N(t+\Delta t) - N(t)$ si ha

$$\Delta N = -pN\Delta t \ , \Longleftrightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = -pN \ .$$

Supponendo ora che i numeri in gioco siano cosí grandi che la funzione N possa essere considerata a valori reali invece che interi[1]e che Δt sia piccolo, si può sviluppare N in serie di Taylor, ottenendo $N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta t \frac{dN}{dt}(t) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$ e quindi ottenere

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}(t) = \frac{dN}{dt}(t) + \mathcal{O}(\Delta t) \ ,$$

e approssimare tale quantità con $\frac{dN}{dt}$ ottenendo cosí l'equazione differenziale

$$\dot{N} = -pN \tag{15}$$

la cui soluzione fornisce la quantità di materiale dell'elemento originario presente dopo un tempo t. La quantità p che governa il processo è tipica del materiale. L'equazione (15) coincide con l'equazione (5) con $\lambda = -p$, e la sua soluzione è data da (14), che nel caso presente assume la forma

$$N(t) = N_0 e^{-pt} \ , \tag{16}$$

da cui si vede che la quantità di materiale diminuisce esponenzialmente col tempo. Si ritrova inoltre la nota legge del decadimento radioattivo secondo cui, in ogni materiale, esiste un certo tempo τ dopo cui la quantità di materiale si dimezza (tempo di dimezzamento). Tale τ è dato dalla relazione $N(\tau) = N_0/2$ cioè, inserendo in (16)

$$e^{-p\tau} = \frac{1}{2} \ , \Longleftrightarrow \tau = \frac{\ln 2}{p} \simeq \frac{0.6931}{p} \ ,$$

che formisce il legame tra la probabilità di decadimento e il tempo di dimezzamento.
15. In particolare è possibile sfruttare il fenomeno del decadimento radioattivo per datare i reperti fossili tramite il cosiddetto procedimento del carbonio 14. L'idea è la seguente: il carbonio 14 è un isotopo radioattivo del carbonio, prodotto dall'interazione dell'atmosfera con i raggi cosmici. Esso entra nell'organismo di piante ed animali assieme al carbonio ordinario tramite tutti i processi connessi all'attività vitale degli esseri viventi. Quando l'organismo è in vita si stabilisce un equilibrio per cui la quantità di carbonio 14 che decade

[1] Con questo si intende che, se N è dell'ordine di 10^{23} (numero di Avogadro, cioè numero di atomi tipicamente contenuto in un certo numero di grammi di materiale), tipicamente le variazioni di un'unità non sono misurabili

è soppiantata da quella ingerita dall'esterno. Appena l'essere vivente muore il carbonio smette di essere ingerito, e quindi la quantità di carbonio 14 diminuisce nel corso del tempo. Ora, la quantità di carbonio 14 all'equilibrio si puo' misurare negli organismi attualmente in vita, e, misurando la quantità di carbonio 14 presente attualmente in un fossile, si può risalire alla data in cui l'organismo è morto.

Sia dunque x la quantità di carbonio 14 presente in un organismo in vita. Essa soddisferà all'equazione

$$\dot{x} = -px + c_i - c_e \tag{17}$$

dove il primo termine a destra è dovuto al decadimento radioattivo, c_i rappresenta la quantità di carbonio 14 ingerita nell'unità di tempo, e c_e la quantità espulsa nell'unità di tempo. Posto $c := c_i - c_e$, e osservato che si ha necessariamente $c > 0$. L'equazione diventa quindi

$$\dot{x} = -px + c \tag{18}$$

È istruttivo osservare che l'equazione (18) presenta una unica soluzione stazionaria; cioè in cui $\dot{x} = 0$. Imponendo $\dot{x} = 0$ si trova che essa è data da $x_{+\infty} = c/p$. Veniamo ora alla soluzione generale di (18); per separazione di variabili si trova

$$x(t) = x_0 e^{-pt} + \frac{c}{p}(1 - e^{-pt}) \ ,$$

ed è facile rendersi conto che per ogni dato iniziale si ha $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty \equiv c/p$, cioè tutte le soluzioni dell'equazione (18) convergono alla soluzione stazionaria, in altre parole la quantità di carbonio 14 presente nell'organismo tende a stabilizzarsi al valore c/p. Vedremo nel seguito che, se la soluzione di un'equazione differenziale tende ad un valore limite quando $t \to \infty$, allora tale valore è necessariamente costituito da una soluzione di equilibrio.

Quando l'organismo muore l'equazione diventa quella del decadimento radioattivo, cioè (15). Si ha dunque che la corrispondente soluzione è

$$x(t) = \frac{c}{p} e^{-pt} \ ,$$

dove abbiamo preso come dato iniziale la quantità di carbonio presente nell'organismo al momento della morte, cioè c/p e t rappresenta il tempo passato dalla morte dell'organismo. Misurando la radiottività del reperto (cioè $\dot{x}$) si risale immediatamente a t.

16. Il caso senz'altro più importante di equazione differenziale è dato dall'equazione di Newton per un sistema di particelle in interazione:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \ , \tag{19}$$

Qui F gioca il ruolo di forza diviso la massa. La (19) può essere scritta come sistema del primo ordine nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= F(x, v, t) \ . \end{aligned}$$

17.L'equazione del pendolo matematico è data da

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \ , \tag{20}$$

si tratta di un'equazione non lineare la cui soluzione non è esprimibile in funzioni elementari ma mediante integrali ellittici completi. Nel caso di $|x| \ll 1$ (piccole oscillazioni) l'equazione si riduce all'equazione dell'oscillatore armonico

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{21}$$

che discuteremo al punto **52**.
18. Un altro esempio concreto è fornito dall'equazione del moto di una particella che cade dentro ad un fluido. Quando si tenga conto della forza di attrito viscoso essa è data da

$$\ddot{x} = -\frac{\rho}{m}\dot{x} + g$$

dove ρ è una costante chiamata coefficiente d'attrito viscoso, ed m è la massa della particella. Denotando $v := \dot{x}$, l'equazione può essere scritta nella forma

$$\dot{v} = -\frac{\rho}{m}v + g \ , \tag{22}$$

che coincide con la (18). La soluzione è quindi data da

$$v(t) = v_0 e^{-\rho t} + \frac{mg}{\rho}\left(1 - e^{-\rho t}\right) \ ,$$

e come in (18) si ha che $v(t)$ tende al valore limite $v_\infty = mg/\rho$.
19*(Complementare).* Val la pena di ricordare come l'equazione che descrive la caduta di un grave in fluido viscoso giochi un ruolo fondamentale in un esperimento classico della fisica: l'esperimento di Millikan che ha permesso di mostrare come la carica elettrica si presenti in multipli interi di una certa quantità e di misurare tale quantità (la carica dell'elettrone). L'idea dell'esperimento di Millikan è la seguente: una gocciolina d'olio è lasciata cadere all'interno di un condensatore, la gocciolina d'olio tipicamente risulta carica elettricamente a causa dell'interazione casuale con l'atmosfera; agendo sul condensatore si equilibra la forza di gravità, che agisce sulla particella. Conoscendo la massa della particella e il campo elettrico utilizzato per equilibrare la gravità è facile risalire alla carica della particella. Il problema è misurare la massa della particella. A questo scopo si lascia cadere la goccilina d'olio nel condensatore scarico e si misura la velocità di caduta. Ora, è noto che per una sfera di raggio R il coefficiente d'attrito viscoso è dato da

$$\rho = 6\pi R\eta \ ,$$

dove η dipende solo dalle caratteristiche del fluido in cui la particella si muove. D'altra parte la massa della particella è data da $\delta 4\pi R^3/3$ dove δ è la densità dell'olio. Si trova quindi che la velocità limite della particella è data da

$$v_\infty = \frac{2}{9}R^2\frac{\delta}{\eta} \ .$$

27.3.06

Poiché tanto δ che η sono noti, la misura di v_∞ permette di risalire al raggio della particella e quindi alla sua massa e alla forza di gravità che agisce sulla particella stessa. Da questa, misurando il campo necessario a equilibrare la forza di gravità si ottiene facilmente la carica presente sulla particella stessa.

20. Un esempio interessante di sistema di equazioni che proviene da un campo diverso è dato dall'equazione di Lotka Volterra che descrive l'interazioni tra due popolazioni di animali, una formata di predatori ed una di prede. Il modello, inizialmente concepito per descrivere le variazioni nel tempo di due specie di pesci del lago di Como può essere descritto come segue. Sia x il numero di prede presenti nell'ambiente e y il numero di predatori. In assenza di interazioni si immagina che le prede si riproducano indisturbate, mentre i predatori, a causa della mancanza di risorse si riducano costantemente, matematicamente si assume che valgano le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x \\ \dot{y} &= -\gamma y \end{aligned}$$

La presenza dell'interazione fa sí che le prede diminuiscano con un tasso proporzionale al proprio numero ed al numero di predatori e che i predatori aumentino con un tasso proporzionale al proprio numero e al numero di prede. Si ottiene cosìil sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy \end{aligned}$$

che è il sistema di Lotka Volterra. Si osservi che il sistema ammette due soluzioni indipendenti dal tempo (equilibrio tra prede e predatori): e cioè (0,0), assenza totale di animali, oppure

$$x = \frac{\gamma}{\delta}\ , \quad y = \frac{\alpha}{\beta}$$

in cui vi è un effettivo equilibrio tra le specie.

1.3 Il problema di Cauchy

21. Nella maggior parte dei casi le equazioni differenziali non sono risolubili analiticamente[2], ciononstante è possibile dimostrare che la soluzione esiste e, una volta assegnato il dato iniziale, è unica. In questo paragrafo sarà dato l'eunuciato del corrispondente teorema. Sarà quindi data una sua giustificazione euristica basata sull'argomento capito da Newton e reso rigorso da Cauchy. Il procedimento sarà illustrato nel caso di sistemi lineari. Sarà inoltre data la definizione di esponenziale di una matrice.

Poiché questo paragrafo è dedicato alla teoria generale, ci limiteremo qui a considerare equazioni del primo ordine indipendenti dal tempo, il che come illustrato ai punti **6**, **8** copre anche il caso generale.

22. Poniamo la seguente

[2] Nel senso che è possibile dimostrare che non esistono formule basate su operazioni elementari quali calcoli di integrali definiti e inversione di funzioni, che permettono di trovare la soluzione generale

Definizione 1.1. *Il problema costituito dal sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{23}$$

si dice problema di Cauchy; la seconda delle equazioni (23) si dice condizione iniziale, e x_0 *si dice dato iniziale.*

Teorema 1.2. *Si consideri il problema di Cauchy (23), e si assuma che la funzione* f *sia Lipschitziana*[3] *in un intorno del punto* x_0*, allora esiste* $T > 0$ *ed una unica funzione* $x : (-T, T) \to \mathbb{R}^N$ *di classe* C^1 *che risolve (23).*

23. L'idea alla base della dimostrazione di Cauchy di tale teorema (dimostrazione valida nel caso in cui la funzione f sia di classe analitica, cioè C^∞ e tale che la sua serie di Taylor converga) è quella di considerare lo sviluppo di Taylor della soluzione nel punto $t = 0$ e di mostrare come tutti i suoi coefficienti siano univocamente determinati dalla specifica del dato iniziale e dalla richiesta che sia soddisfatta l'equazione differenziale.

Per semplicità notazionale discutiamo l'argomento nel caso semplificato in cui $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo che la soluzione $x(t)$ sia differenziabile infinite volte e che la sua serie di Taylor converga, allora si ha

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k x}{dx^k}(0) t^k \ . \tag{24}$$

Per trovare la funzione x basta allora determinare il valore della funzione stessa e di tutte le sue derivate nell'origine. Il valore $x(0)$ è determinato dalla condizione iniziale. Consideriamo quindi la sua derivata. Dall'equazione differenziale si ha, valutando per $t = 0$

$$\frac{dx}{dt}(0) = f(x_0) \ . \tag{25}$$

Per calcolare la derivata seconda calcoliamo la derivata della relazione

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \ ;$$

utilizzando la regola di derivata di funzione di funzione si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} \ , \tag{26}$$

che valutata per $t = 0$ fornisce

$$\frac{d^2x}{dt^2}(0) = \frac{df}{dx}(x_0)\frac{dx}{dt}(0) = \frac{df}{dx}(x_0) f(x_0) \ , \tag{27}$$

e quindi il secondo termine della serie di Taylor in termini di f e del dato iniziale. Derivando ulteriormente (26), valutando in $t = 0$ ed utilizzando le relazioni già trovate (25), (27) si

[3] *Una condizione di regolarità implicata ad esempio dalla differenziabilità*

trova anche il valore della derivata terza di x nell'origine. È chiaro che iterando tale argomento si trova una formula per tutti i coefficienti dello sviluppo di Taylor[5] e quindi (nel caso in cui tale serie converga) si determina univocamente la funzione $x(t)$.

24. Un caso interessante in cui il procedimento sopra è eseguibile esplicitamente è quello delle equazioni lineari

$$\dot{x} = \lambda x \qquad ((5)) \ .$$

Lemma 1.3. *Nel caso di (13) si ha*

$$\frac{d^k x}{dt^k}(0) = \lambda^k x_0 \qquad (28)$$

Dimostrazione. Per induzione. Per $k = 0$ si ha $x^{(0)}(0) \equiv x(0) = x_0$. Si assuma dunque vera (28) per $k-1$, si ha

$$\frac{d^k x}{dt^k}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\frac{dx}{dt}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\lambda x(t) = \lambda \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(t) \ .$$

Valutando in zero si trova

$$\frac{d^k x}{dt^k}(0) = \lambda \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(0) = \lambda\lambda^{k-1}x_0 = \lambda^k x_0 \ .$$

□

Inserendo (28) in (24) si trova

$$x(t) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\lambda^k t^k x_0 = e^{\lambda t}x_0 \ .$$

25. Il procedimento di cui al punto **24** si generalizza immediatamente al caso di equazioni lineari indipendenti dal tempo in più variabili, cioè ad equazioni del tipo

$$\dot{x} = Ax \ , \quad x \in \mathbf{C}^n \ , \quad A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n \ . \qquad (29)$$

Infatti, sempre per induzione è facile verificare che si ha

$$\frac{d^k x}{dt^k}(t) = A^k x(t)$$

[5] A tal fine si osservi che si ha

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(x(t))$$

quantità calcolabile esplicitamente utilizzando la formula di Faa di Bruno che permette di esprimere la derivata di una funzione composta in termini della derivata delle due funzioni in questione. Il valore di tale funzione per $t = 0$ si trova poi iterativamente.

da cui
$$\frac{d^k x}{dt^k}(0) = A^k x_0$$
e quindi
$$x(t) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k t^k x_0 = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k t^k \right) x_0 \ . \tag{30}$$
È immediato rendersi conto che tale serie converge, infatti dalla teoria generale degli operatori lineari è noto che esiste una costante C (denotata di solito $\|A\|$) tale che
$$\|Ax\| \leq C \|x\| \ , \forall x \in \mathbb{R}^n \ ,$$
da cui si trova che il termine generale della serie in (30) è stimato da $C^k t^k \|x_0\| / k!$, che è il termine generale di una serie convergente. È allora naturale definire l'*esponenziale della matrice* A tramite
$$e^{At} := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k t^k \ ,$$
e scrivere la formula risolutiva di (29) nella forma:
$$x(t) = e^{At} x_0 \ .$$
Il problema di risolvere le equazioni lineari a coefficienti costanti è allora equivalente al probelma di calcolare l'esponenziale di una matrice. Si osservi che per una matrice diagonale della forma $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ l'esponenziale è dato semplicemente da $e^{At} = diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t})$. Un altro caso interessante è quello della matrice nilpotente
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
in cui si ha $A^2 = 0$, e dunque
$$e^{At} = \mathbb{1} + tA \Longleftrightarrow e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t y_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \ .$$
26. Si consideri un'equazione del secondo ordine.
$$\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$
che, dalla discussione generale è noto essere equivalente al sistema
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ F(x, v) \end{pmatrix} \ .$$
Il teorema 1.2 garantisce allora che assegnato il valore iniziale del vettore (x, v) vi è una sola soluzione del problema di Cauchy per il nostro sistema. Ora è chiaro che assegnare il vettore (x, v) equivale ad assegnare posizione è velocità iniziale della variabile x *cioè il problema di Cauchy per un sistema di equazioni del secondo ordine ammette una ed una sola soluzione quando si assegnino il valore iniziale di posizione e velocità.*
27. Lo spazio delle fasi.
Definizione 1.4. *Si consideri l'equazione differenziale*
$$\dot{x} = f(x) \ , \quad x \in \mathbb{R}^n \ ; \tag{31}$$
lo spazio $\mathbb{R}^n$ si dice spazio delle fasi (o dei dati) per tale equazione.

La ragione di tale definizione sta nel fatto che il teorema 1.2 garantisce che *per ogni punto dello spazio delle fasi passa una ed una sola soluzione.* Per questo è essenziale che l'equazione in considerazione non dipenda dal tempo. Nel caso di equazioni dipendenti esplicitamente dal tempo (vedi (1)), lo spazio delle fasi è cosituito da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (x,t)$.

28. Dal teorema 1.2 segue che, per ogni dato iniziale x_0 esiste un unica soluzione del problema di Cauchy. È interessante vedere come tale soluzione dipenda da x_0, cioè come cambi la soluzione al variare di x_0.

Teorema 1.5. *Sia f di classe C^r e sia $x(t,x_0)$ la soluzione del problema di Cauchy (23), si fissi t con $|t| < T$ (dove T è la costante definita dal teorema 1.2), allora esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 tale che la mappa*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\to \mathbb{R}^n \\ \bar{x} &\mapsto x(t,\bar{x}) \end{aligned}$$

è di classe C^r, inoltre, fissato $\bar{T} < T$, per ogni coppia $\bar{x}, \tilde{x} \in \mathcal{U}$ si ha

$$\sup_{|t|\le\bar{T}} \|x(t,\bar{x}) - x(t,\tilde{x})\| \le C\,\|\bar{x} - \tilde{x}\| \ ; \tag{32}$$

analoghe disuguaglianze valgono per le derivate di x fino all'ordine $r-1$.

29. Tale dipendenza continua permette di definire il *flusso di fase.*

Definizione 1.6. *Sia $\mathcal{U}$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $t \in \mathbb{R}$; si consideri la mappa*

$$\begin{aligned} F^t : \mathcal{U} &\to \mathbb{R}^n \\ x_0 &\mapsto x(t,x_0) \end{aligned}$$

allora l'insieme di tali mappe $\{F^t\}_t$ si dice flusso a tempo t dell'equazione differenziale.

Si osservi che in generale l'insieme dei tempi t per i quali è definito F^t non coincide con tutto $\mathbb{R}$ e dipende dall'aperto $\mathcal{U}$.

Proposizione 1.7. *Per ogni t la mappa F^t di un'equazione differenziale è un diffeomorfismo*[6]. *Inoltre la mappa $t \mapsto F^t$ rispetta la struttura di gruppo addittivo di $\mathbb{R}$, cioè valgono le uguaglianze*

$$F^0 = \mathbb{1} \ , \quad F^{t+\tau} = F^t \circ F^\tau \ , \quad F^{-t} = \left(F^t\right)^{-1} \ , \tag{33}$$

per tutti i tempi per cui esistono F^t, F^τ e $F^{t+\tau}$.

Dimostrazione. La prima delle (33) è un'immediata conseguenza della definizione di flusso, secondo cui si ha $F^0(x_0) = x(0,x_0) = x_0$. Veniamo alla seconda. Essa si basa sull'osservazione che se $x(t)$ è una soluzione di (31) con dato iniziale x_0 allora la funzione $x_\tau(t) := x(t+\tau)$ è anch'essa soluzione di (31) ed ha dato iniziale $x(\tau)$. Si fissi dunque x_0; allora, utilizzando la notazione appena introdotta, si ha

$$F^{t+\tau}(x_0) = x(t+\tau) = x_\tau(t) = F^t(x(\tau)) = F^t(F^\tau(x_0)) \ ,$$

[6] *Cioè è una mappa differenziabile ed invertibile con inversa differenziabile.*

da cui la tesi. Caso particolare di questa relazione è

$$\mathbb{1} = F^{t-t} = F^t \circ \left(F^{-t}\right)$$

che mostra come F^{-t} sia l'inversa di F^t. □

30. Si consideri l'equazione lineare $\dot{x} = \lambda x$; allora il suo flusso è dato da

$$F^t(x_0) := e^{\lambda t} x_0$$

ed è una applicazione lineare definita su tutto $\mathbb{R}$.

1.4 Analisi del moto in casi completamente risolubili.

31. In questo paragrafo studieremo la dinamica di equazioni differenziali del primo ordine in un variabile spaziale e di sistemi del secondo ordine conservativi in un grado di libertà. Essi costituiscono i principali casi in cui è possibile ottenere una descrizione completa della dinamica.

32.È possibile dare una descrizione completa ed estremamente semplice della dinamica di un'equazione del primo ordine in una variabile spaziale, cioè di

$$\dot{x} = f(x) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{34}$$

Per capire come si procede discutiamo un caso semplice. Si consideri quindi il caso

$$f(x) = x^2 - 1 \ .$$

Il moto avviene lungo una retta su cui x è una coordinata. In un piano, si consideri un sistema di assi cartesiani di cui la retta delle x sia quella su cui avviene il moto e si disegni il grafico di $y = f(x)$, in questo caso una parabola rivolta verso l'alto che interseca l'asse delle x in ± 1 (si veda la figura `da mettere`). Preso a caso un punto dell'asse delle x si ha che la se la particella si trova in tale punto allora la sua velocità la si legge andando a vedere la quota di f su tale punto. In particolare se in tale punto $f(x)$ sta sopra l'asse delle x significa che la velocità è positiva e la particella si muove verso destra, se invece $f(x)$ sta sotto l'asse delle x allora la velocità è negative e la particella si muove verso sinistra. Si ha quindi che in tutti i moti che partono con $x < -1$ il moto avviene verso destra, e lo stesso vale per tutti i moti che partono con $x > 1$. I moti che partono tra -1 ed 1 si muovono invece verso sinistra. Come vedremo tra poco si trova poi che necessariamente le orbite che partono con $x < -1$ terminano in $x = -1$ a $t = \infty$, le orbite che partono tra -1 ed 1 terminano ad $x = -1$ sempre a $t = \infty$ e le orbite che partono a destra di 1 scappano all'infinito.

33. Alla dimostrazione premettiamo una proprietà delle funzioni reali che sarà utile anche nel seguito

Proposizione 1.8. *Sia $x(t)$ una funzione a valori reali che ammette limite finito per $t \to +\infty$, allora esiste una successione $t_k \to \infty$ tale che*

$$\lim_{k \to +\infty} \dot{x}(t_k) = 0$$

Dimostrazione. Costriuamo tale successione. Sia $\bar{t}_k \to \infty$, il teorema di Lagrange garantisce che esiste t_k soddisfacente $\bar{t}_k < t_k < \bar{t}_k + 1$ tale che

$$|x(\bar{t}_k) - x(\bar{t}_k + 1)| = |\dot{x}(t_k)|$$

Si fissi $\epsilon > 0$, mostriamo che purché k sia abbastanza grande $|\dot{x}(t_k)| < \epsilon$. Per la proprietà di Cauchy si ha: $\exists N$ tale che $\bar{t}_k > N$ implica

$$|x(\bar{t}_k) - x(\bar{t}_{k+1})| < \epsilon \ ,$$

da cui la tesi. □

34. *(Complementare)*.iamo ora due proposizioni, la prima che garantisce che un'orbita possa terminare solo su un punto d'equilibrio, la seconda assicura che una soluzione non può attraversare un punto d'equilibrio.

Proposizione 1.9. *Sia $x(t)$ una soluzione di (34) ed esista $\bar{x} \neq \infty$ tale che*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}$$

allora $\bar{x}$ è punto d'equilibrio dell'equazione

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che $\dot{x}(t)$ tende a zero per $t \to \infty$. Si osservi che prendendo il limite dell'equazione differenziale per $t \to +\infty$ si trova che il limite della velocità per $t \to +\infty$ esiste. Sia α tale limite, allora per ogni sottosuccessione $t_k \to \infty$ si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \dot{x}(t_k) = \alpha \ ,$$

e quindi la proposizione 1.8 garantisce $\alpha = 0$. Da qui, sostituendo nell'equazione differenziale si trova anche

$$f(\bar{x}) = \lim_{t \to +\infty} f(x(t)) = \lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = 0 \ .$$

□

Proposizione 1.10. *Sia x_0 punto di equilibrio per (34), e sia $\bar{x}(t)$ una soluzione con la proprietà che esistono t_0 e t_1 tali che $x(t_0) \neq x_0$ e $x(t_1) = x_0$; allora $t_1 = \infty$.*

Dimostrazione. Per assurdo: sia $t_1 < \infty$, allora, se $x(t)$ è soluzione, anche $\tilde{x}(t) := x(t+t_1)$ è anch'essa soluzione con dato iniziale $\bar{x}(t_1)$, ma per ipotesi si ha che $\tilde{x}(0) = x_0$ è punto di equilibrio e quindi vi è una sola soluzione con tale dato iniziale, cioè $x(t) \equiv x_0$, il che è in contraddizione con l'ipotesi che esista un istante in cui $x(t_0) \neq x_0$. □

35. Si consideri un sistema meccanico in una sola variabile spaziale

$$\ddot{x} = F(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \tag{35}$$

e la funzione

$$E(x, v) := \frac{1}{2} v^2 + V(x) \ ,$$

dove $V(x)$ è una primitiva (cambiata di segno) di F, cioè è tale che $F = -\frac{dV}{dx}$, allora vogliamo dimostrare che E è costante lungo le soluzioni dell'equazione (35). Sia dunque $x(t)$ una soluzione di (35) e si consideri la quantità

$$E(t) := E(x(t), \dot{x}(t)) \ ;$$

derivando rispetto al tempo si ha

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial v}\ddot{x} = V'(x)\dot{x} + vF(x) = -F(x)\dot{x} + \dot{x}F(x) = 0 \ ,$$

cioè E è costante lungo le soluzioni della nostra equazione.

36. Tale osservazione permette di descrivere completamente le soluzioni del'equazione (35). Infatti la soluzione è obbligata a muoversi nel sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai punti (x, v) che soddisfano a

$$E(x, v) = E_0 \tag{36}$$

dove E_0 è l'energia iniziale del sistema. Ora, è chiaro che i punti del piano che soddisfano a (36) costituiscono una curva in $\mathbb{R}^2$, e che tale curva è la traiettoria del sistema nello spazio delle fasi. Più precisamente vale la seguente

Proposizione 1.11. *Si assuma che l'insieme di livello di energia E_0 sia semplicemente connesso, e che per ogni punto (x, v) di tale insieme di livello il vettore $(v, F(x))$ sia diverso da zero, allora l'insieme di livello è una curva regolare e coincide con un'orbita del sistema.*

Dimostrazione. Il fatto che l'insieme di livello sia una curva regolare segue dalla teoria generale secondo cui le curve di livello di una sommersione sono varietà. Veniamo alla dimostrazione del fatto che l'insieme di livello coincide con l'orbita. Dato un punto dell'insieme di livello $\mathcal{I}$ si consideri la soluzione avente per dato iniziale tale punto. Si denoti con $x(t)$ tale curva. Si supponga che tale soluzione sia definita per $T_2 < t < T_1$ e Si consideri ora la corrispondente orbita, cioè

$$\gamma := \bigcup_{T_2 < t < T_1} x(t) \ .$$

Chiaramente si ha $\mathcal{I} \supset \gamma$. Supponiamo per assurdo che l'inclusione sia stretta. Dal teorema di esistenza ed unicità γ è aperta. Sia $\bar{z} \in \partial\gamma$. Si consideri la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\bar{z}$; per ipotesi la funzione che risolve tale problema di Cauchy è un diffeomorfismo locale tra un intorno di $0 \in \mathbb{R}$ e un intorno di $\bar{z}$ in $\mathcal{I}$. Segue che tale soluzione in realtà è un prolungamento della soluzione $x(t)$ considerata all'inizio, e quindi il punto $\bar{z}$ sta in γ contro l'ipotesi. □

37. Come caso concreto di tale situazione consideriamo l'oscillatore armonico (21) e mettiamoci nel caso $\omega = 1$. Esso corrisponde al caso

$$F(x) = -x \iff V(x) = \frac{1}{2}x^2 \iff E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2 \ .$$

La curva $E(x, v) = E_0$ è allora una circonferenza di raggio $\sqrt{2E_0}$ nel piano (x, v). Si ha quindi che per ogni dato iniziale il moto dell'oscillatore armonico con frequenza 1 descrive una circonferenza nello spazio delle fasi[7].

38. Nel caso di potenziali diversi da quello armonico (cosí è chiamato il potenziale dell'oscillatore armonico) non si hanno formule cosí facilmente leggibili per la traiettoria nello spazio delle fasi, ma ciononostante è possibile descrivere tale traiettoria in modo estremamente preciso. Per illustrare il procedimento riscriviamo l'equazione (36) che esprime la conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{1}{2}v^2 = E_0 - V(x) \Longleftrightarrow v = \pm\sqrt{2[E_0 - V(x)]} \ . \tag{37}$$

Si capisce subito che tale funzione è definita solo nella regione in cui $E_0 \geq V(x)$, che quindi rappresenta la regione dello spazio accessibile alla particella quando l'energia sia data da E_0. Per descrivere il moto conviene rifarsi ad un esempio esplicito. Sia dunque $V(x) = x^4$. Se l'energia E_0 è minore di zero non sono possibili moti. Se $E_0 = 0$, allora la regione accessibile è costituita dal solo punto $x = 0$, che quindi costituisce un punto d'equilibrio del sistema. Se $E_0 > 0$ la situazione è la seguente: l'equazione $E_0 = V(x)$ ha due soluzioni $\pm E_0^{1/4}$ e la regione accessibile è quella compresa tra di esse. Analizziamo una soluzione cha abbia energia E_0 e parta all'istante zero dal punto $x = -E_0^{1/4}$: la sua velocità è nulla all'inizio (altrimenti la sua energia sarebbe diversa da E_0), ma la sua accelerazione è rivolta verso destra, e quindi comincia muoversi verso destra, il che vuol dire che x aumenta. Ciò significa che l'energia potenziale V decresce, e quindi per conservare l'energia deve crescere la velocità. Tale situazione prosegue fino a quando $x = 0$, in questo punto la velocità è massima e comincia a diminuire toccando di nuovo lo zero quando $x = E_0^{1/4}$. A questo punto la velocità si inverte (l'accelerazione è qui negativa) e la particella comincia a muoversi verso sinistra, percorrendo una traiettoria speculare della precedente rispetto all'asse delle x. Ciò conduce alla traiettoria disegnata in figura 1. Se ora alziamo ancora l'energia ci accorgiamo che non cambia nulla, e quindi in particolare tutte le soluzioni percorrono delle curve chiuse nello spazio delle fasi e sono periodiche.

39Si osservi che la precedente discussione è basata solo sulla forma del potenziale, e quindi che la dinamica sia sostanzialmente la stessa per tutti i potenziali aventi un unico punto stazionario (un minimo) e con la proprietà di tendere a più infinito sia a più che a meno infinito.

40. Val la pena di discutere in dettaglio anche un altro caso: il caso del pendolo matematico (20). Per tale discussione rinviamo per il momento alle dispense di Benettin Galgani Giorgilli, paragrafo 1.2.2, pag. 26 nella versione per matematici.

41. Si può anche utilizzare la conservazione dell'energia per l'equazione di Newton sulla retta per ridurre la soluzione del problema di Cauchy al calcolo di un integrale definito. Il procedimento è il seguente: si consideri la seconda delle (37), si scelga una determinazione e si ricordi che (come segue dalle equazioni del moto) $v = \dot{x}$, allora tale equazione appare come una equazione differenziale a variabili separabili. Si trova cosí che la sua soluzione

[7] Nel caso $\omega \neq 1$ si hanno ovviamente delle ellissi.

(vedi punto **10**) è data da

$$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{\sqrt{2[E_0 - V(s)]}} \ . \tag{38}$$

42. Tale equazione può essere utilizzata per ricavare il periodo delle orbite periodiche. Per illustrarlo si consideri ancora l'esempio trattato nel punto **38** in cui $V(x) = x^4$. Si era visto che in tal caso tutte le orbite sono periodiche. Ci proponiamo qui di determinare il tempo impiegato per percorrere l'orbita di energia E_0. Dividiamo tale orbita in due: la metà in cui $v > 0$ e la metà in cui $v < 0$. Consideriamo la metà superiore e calcoliamo il tempo necessario a percorrerla tutta da sinistra a destra (nel semipiano superiore la velocità è positiva e quindi il moto va verso la direzione positiva dell'asse delle x). Esso è dato da (38) con $x_0 = -E_0^{1/4}$ e $x = E_0^{1/4}$. È facile verificare che questo è anche il tempo necessario a percorrere la seconda metà dell'orbità (quella inferiore), e quindi il periodo dell'orbita in considerazione è

$$T(E_0) = 2 \int_{-E_0^{1/4}}^{E_0^{1/4}} \frac{ds}{\sqrt{2[E_0 - s^4]}} \ .$$

Val la pena di osservare come nel caso del potenziale x^4 è possibile spingere oltre il calcolo. Ciò è dovuto a due fatti: il primo è che tale potenziale è simmetrico rispetto all'operazione $x \to -x$, il secondo è che si tratta di una funzione omogenea. Si ha cosí

$$T(E_0) = 4 \int_0^{E^{1/4}} \frac{ds}{\sqrt{2[E_0 - s^4]}} = \int_0^1 \frac{4E_0^{1/4} du}{E_0^{1/2}\sqrt{2(1-u^4)}} = \frac{1}{E_0^{1/4}} \int_0^1 \frac{4du}{\sqrt{2(1-u^4)}} \ ,$$

dove si è effettuato il cambiamento di variabile $u = s/E_0^{1/4}$. Ora, l'integrale è un certo numero c_1, e quindi tale relazione dice che il periodo in funzione dell'energia è dato da $c_1/E_0^{1/4}$, e in particolare tende a zero quando l'energia tende all'infinito. N.B. Il risultato può apparire paradossale in quanto la particella impiega meno tempo a percorrere oscillazioni molto ampie di quanto impieghi a percorrere oscillazioni di piccola ampiezza. Ciò è dovuto al fatto che la forza aumenta molto con la distanza dal punto di equilibrio. Si tratta di un fenomeno analogo a quello della cosiddetta "fionda planetaria" secondo cui per mandare un satellite molto lontano nel sistema solare non conviene spedirlo direttamente verso il suo obbiettivo, ma conviene invece spedirlo prima in regioni prossime ai pianeti dove le intense forze gravitazionali impongo forti accelerazioni al satellite, ed il risultato netto è un'orbita più rapida di quella diretta.

1.5 Cambiamenti di variabili (complementare).

43. Un potente strumento per lo studio delle equazioni differenziali è fornito dai cambiamenti di variabile, che discutiamo brevemente. Sia $y = G(x)$ una trasformazione di coordinate, cioè una mappa inveritibile da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (eventualmente da un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ad un intorno di $y_0 := G(x_0)$). Sia ora $x(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x) \Longleftrightarrow x_k = f_k(x) \ , \quad k = 1, ..., n \ . \tag{39}$$

Ci chiediamo a che equazione soddisfi la funzione

$$y(t) := G(x(t)) \ .$$

Nel derivare l'equazione per y utilizzeremo la notazione $y = y(x)$ per indicare la funzione G e $x = x(y)$ per indicare la sua inversa. Per semplicità di notazione cominciamo a considerare il caso di equazioni in una variabile, in cui si ha cioè una sola x e la G è una funzione di un'unica variabile reale. Si ha

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} y(x(t)) = \frac{dy}{dx}\dot{x} = \frac{dy}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} f(x(y))$$

cioè $y(t)$ soddisfa a

$$\dot{y} = g(y) \ ,$$

dove

$$g(y) = \frac{dy}{dx}(x(y)) f(x(y)) \ .$$

44. Si consideri ad esempio l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \lambda x$$

e si effettui il cambiamento di variabili

$$y = \mathrm{Sh} x \ ,$$

si ha allora

$$\dot{y} = \mathrm{Ch} x \dot{x} = \mathrm{Ch} x \lambda x = \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 x}\ \mathrm{arSh} y = \sqrt{1 + y^2}\ \mathrm{arSh} y \ ,$$

dove si è denotato con $\mathrm{arSh} y$ la funzione inversa del seno iperbolico.
45. Torniamo ora al caso generale di cambiamenti di variabili per equazioni differenziali in $\mathbb{R}^n$, sia dunque G una funzione come al punto **43**, e calcoliamo la derivata temporale di $y(t) = G(x(t))$; si ha

$$\begin{aligned} \dot{y}_l(t) = \frac{d}{dt} y_l(x(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}(x(t)) \dot{x}_k(t) \\ = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}(x(t)) f_k(x(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}(x(t)) f_k((x(y(t)))) \ , \end{aligned}$$

cioè $y(t)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$\dot{y}_l = g_l(y) \ , \quad \text{dove} \quad g_l(y) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}(x(y)) f_k((x(y))) \ .$$

46. Si consideri ad esempio un'equazione differenziale in $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x) \ ,$$

ed un cambiamento di variabili lineare $y = Sx$, dove S è una matrice invertibile. Si ha allora

$$\dot{y} = S\dot{x} = Sf(x) = Sf(S^{-1}y) \ ,$$

cioè

$$\dot{y} = Sf(S^{-1}y) \ .$$

1.6 Punti fissi e linearizzazione.

47. Nei paragrafi precedenti si sono visti due classi di equazioni il cui ritratto di fase è descrivibile in modo completo con metodi elementari: il caso delle equazioni del primo ordine in una variabile spaziale (cf.punto **32**) ed il caso delle equazioni conservative del secondo ordine in una variabile spaziale (cf. **35**). In entrambi i casi si è visto come il comportamento del sistema cambi radicalmente solo in corrispondenza dei punti fissi. In particolare, nell'esempio del pendolo (cf. punto **40**) si è visto come ciò capiti in corrispondenza dei livelli critici dell'energia, cioè in corrispondenza a quei valori dell'energia che contengono dei punti critici (cioè delle soluzioni indipendenti dal tempo)[8]. Ciò fa intuire come i punti critici di un sistema di equazioni differenziali giochino un ruolo particolarmente importante. Qui studieremo l'esistenza di soluzioni stazionari e le proprietà della dinamica (almeno in prima approssimazione) vicino a tali soluzioni.
48. Si consideri un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\dot{x} = f(x) \ , \quad x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Definizione 1.12. *Una soluzione della forma $x(t) = c$ (indipendente dal tempo) si dice punto stazionario o punto critico del sistema.*

È immediato osservare (sostituendo nella equazione) che c è punto critico per il sistema in questione se e solo se si ha

$$f(c) = 0 \ . \tag{40}$$

Quindi per trovare i punti critici di un sistema di equazioni differenziali basta risolvere il sistema di equazioni ordinarie (non differenziali) (40), il che è un probelma incommensurabilmente più semplice che non la soluzione del sistema di equazioni differenziali origianali. Come anticipato sopra conviene sempre cominciare a studiare la dinamica di un sistema partendo dallo studio dei suoi punti critici. Una volta trovati questi punti critici vi sono alcune questioni che si pongono in modo naturale. In particolare si vorrebbe determinare il comportamento per soluzioni prossime a quelle d'equilibrio, in modo, ad esempio, di essere in grado di discriminare tra soluzioni d'equilibrio tipo "pendolo rovesciato" soluzioni del tipo pendolo a riposo.

---

[8] Non è un caso che succeda questo, vi è una teoria generale, detta teoria di Morse, che garantisce che questo fatto sia generale.

49. Per discutere tale problema si consideri una soluzione d'equilibrio c e si introducano nuove coordinate $\xi = x - c$ che rappresentano il discostamento dal punto d'equilibrio. Siamo interessati al caso di soluzioni vicine al punto d'equilibrio e quindi al caso di ξ piccoli. Inserendo nell'equazione differenzale e denotando con A la matrice Jacobiana di f nel punto c si ha

$$\dot{\xi} = f(c+\xi) = f(c) + A\xi + \mathcal{O}(\|\xi\|^2) \ ,$$

che trascurando i termini di ordine quadratico e ricordando che $f(c) = 0$ diviene

$$\dot{\xi} = A\xi \ . \tag{41}$$

L'idea è quella di studiare la dinamica dell'equazione (41) che ci si aspetta possa descrivere bene la dinamica vicino al punto d'equilibrio. Torneremo nel seguito sul difficile e fondamentale problema della corrispondenza tra le soluzioni del sistema (41) e quelle del sistema orginale.

50. Caratteritica fondamentale delle equazioni lineari è il *principio di sovrapposizione.* Esso afferma che se $x(t)$ è una soluzione di (41) e $y(t)$ è un'altra soluzione della stessa equazione allora anche $z(t) := x(t) + y(t)$ (o più in generale $ax(t) + by(t)$ con a e b costanti reali) soddisfa all'equazione. Ciò si verifica immediatamente andando a calcolare la derivata temporale di $z(t)$ e usando il fatto che l'operazione di destra nell'equazione è lineare:

$$\dot{z} = \dot{x} + \dot{y} = Ax + Ay = A(x+y) = Az \ .$$

51. Per ragioni che tra poco saranno chiare conviene studiare il sistema lineare (41) in $\mathbf{C}^n$. In questa discussione conviene inoltre distinguere tra quantità scalari e quantià vettoriali, denoteremo quindi i vettori di $\mathbf{C}^n$ in grassetto e le quantità scalari in caratteri ordinari. Riscriviamo quindi l'equazione nella forma

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} \ , \quad \mathbf{z} \in \mathbf{C}^n \ , \tag{42}$$

e cominciamo a cercare soluzioni di (42) che restino sempre parallele a se stesse, quindi della forma

$$\mathbf{z} = s(t)\mathbf{e} \ ,$$

dove $s(t)$ è una funzione scalare e $\mathbf{e}$ è un vettore indipendente dal tempo. Sostituendo in (42) si trova

$$\dot{s}\mathbf{e} = sA\mathbf{e} \ ; \tag{43}$$

ora, se si vuole che il vettore a lato destro e quello a lato sinistro siano uguali si deve chiedere che abbiano almeno la stessa direzione. La direzione del lato sinistro è quella di $\mathbf{e}$, mentre quella del lato destro è quella di $A\mathbf{e}$. Quindi, affinché possa valere (43) deve esistere $\lambda \in \mathbf{C}$ tale che

$$\lambda\mathbf{e} = A\mathbf{e} \ ,$$

cioè $\mathbf{e}$ deve essere un autovettore di A e λ deve essere un suo autovalore. Sia dunque $(\lambda, \mathbf{e})$ una coppia autovettore autovalore. Inserendo in (43) si trova

$$\dot{s}\mathbf{e} = \lambda s\mathbf{e} \ ,$$

da cui

$$\dot{s} = \lambda s$$

la cui soluzione è nota dal punto **12** ed è data da $s(t) = s_0 e^{\lambda t}$, il che vuol dire che si è cosí trovata una soluzione della forma

$$\mathbf{z}(t) = s_0 e^{\lambda t} \mathbf{e} \ .$$

Chiaramente il ragionamento si può ripetere per tutti gli autovettori e gli autovalori di A, ottenendo che se si conoscono n autovettori indipendenti si trovano n famiglie ad un parametro di soluzioni. Poiché vale il principio di sovrapposizione (vedi punto **50**) anche la somma di tali soluzioni è una soluzione. Vale la seguente proposizione

Proposizione 1.13. *Sia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una matrice diagonalizzabile e siano $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ una $n-$upla di suoi autovettori indipendenti; siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ i relativi autovalori, allora*

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i \tag{44}$$

è la soluzione generale di (41).

Ricordiamo che per soluzione generale si intende una famiglia di soluzioni che contiene tutte le possibili soluzioni dell'equazione in considerazione.

Dimostrazione. Sia $x(t)$ una soluzione di (41), mostriamo che è possibile determinare i parametri s_i in modo tale che tale soluzione coincida con (44). A tal fine consideriamo il valore di $x(t)$ all'istante zero, cioè $x(0)$, allora esistono dei valori $\bar{s}_i$ tali che si abbia

$$x(0) = \sum_{i=1}^{n} \bar{s}_i \mathbf{e}_i \ ,$$

infatti per ipotesi i vettori $\mathbf{e}_i$ formano una base e quindi $\bar{s}_i$ è semplicemente la componente di $x(0)$ su $\mathbf{e}_i$. Allora la funzione

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{s}_i e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i \ ,$$

è soluzione e coincide per $t = 0$ con la soluzione $x(t)$. Per unicità allora deve coincidere per tutti i tempi. □

52. Si consideri l'oscillatore armonico

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \tag{21}$$

per risolvere tale equazione la si scriva come sistema del primo ordine:

$$\dot{y} = Ay \ , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad y = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \ ,$$

gli autovalori di A sono $\pm i\omega$, e i corrispondenti autovettori sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\omega \end{pmatrix} ,$$

da cui si trova la soluzione generale data da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} e^{-i\omega t} ,$$

da cui in particolare

$$x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} .$$

Se il dato iniziale è reale si trova subito $\beta = \alpha^*$, e quindi $x(t) = 2\mathrm{Re}(\alpha e^{i\omega t})$, da cui, scrivendo $\alpha = a + ib$ e usando la formula di Eulero

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

si trova finalmente

$$x(t) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t) ,$$

o, in termini dei dati iniziali (x_0, v_0) per posizione e velocità

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) .$$

53. Si consideri l'equazione del pendolo matematico (20), e il suo punto fisso $x = \pi$, $\dot{x} = 0$, linearizzando tale equazione in tale punto si trova l'equazione del *repulsore armonico*

$$\ddot{x} = \nu^2 x \tag{45}$$

con $\nu^2 = \omega^2$. Procedendo in modo analogo a quanto fatto al punto precedente si trova

$$x(t) = ae^{\nu t} + be^{-\nu t}$$

o, in termini dei dati iniziali

$$x(t) = x_0\mathrm{Ch}(\nu t) + \frac{v_0}{\nu}\mathrm{Sh}(\nu t) . \tag{46}$$

54. Nel caso di matrici reali è interessante dare alla formula (44) una forma reale. A tal fine ricordo che se λ è un autovalore di una matrice reale corrispondente all'autovettore $\mathbf{e} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, allora anche λ^* è un autovalore della stessa matrice ed il corrispondente autovettore è $\mathbf{e}^* = \mathbf{v} - i\mathbf{w}$. Riordiniamo dunque la base degli autovettori in modo che $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l$ siano vettori complessi con parte immaginaria strettamente positiva, denotiamo con $\mathbf{e}_{-i}$ l'autovettore $\mathbf{e}_i^*$ e siano $\mathbf{e}_{l+1}, ..., \mathbf{e}_{n-l}$ gli autovettori reali. Studiamo la dinamica corrispondente a dati iniziali reali. Sia dunque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora si ha

$$x_0 = \sum_{j=1}^{l} (s_{-j}\mathbf{e}_{-j} + s_j\mathbf{e}_j) + \sum_{j=l+1}^{n-l} s_j\mathbf{e}_j = x_0^* = \sum_{j=1}^{l} \left(s_{-j}^*\mathbf{e}_{-j}^* + s_j\mathbf{e}_j^*\right) + \sum_{j=l+1}^{n-l} s_j^*\mathbf{e}_j^*$$
$$= \sum_{j=1}^{l} \left(s_{-j}^*\mathbf{e}_j + s_j^*\mathbf{e}_{-j}\right) + \sum_{j=l+1}^{n-l} s_j^*\mathbf{e}_j$$

da cui $s_{-j} = s_j^*$, per $j = 1, ..., l$ e $s_j \in \mathbb{R}$ per $j > l$. Si fissi $j \leq l$ positivo, si denoti $s_j = r_j e^{i\theta_j}$ e $\lambda_j = \nu_j + i\omega_j$, e si consideri

$$s_{-j}e^{\lambda_{-j}t}\mathbf{e}_{-j} + s_je^{\lambda_jt}\mathbf{e}_j = 2\mathrm{Re}\left(s_je^{\lambda_jt}\mathbf{e}_j\right) = 2r_je^{\nu_jt}\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega_jt+\theta_j)}(\mathbf{v}_j + i\mathbf{w}_j)\right)$$
$$= r_je^{\nu_jt}\left[\cos\left(\omega_jt + \theta_j\right)\mathbf{v}_j - \sin\left(\omega_jt + \theta_j\right)\mathbf{w}_j\right]$$

da cui la soluzione generale delle equazioni prende la forma

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{l} r_je^{\nu_jt}\left[\cos\left(\omega_jt + \theta_j\right)\mathbf{v}_j - \sin\left(\omega_jt + \theta_j\right)\mathbf{w}_j\right] + \sum_{j>l+1} s_j\mathbf{e}_je^{\lambda_jt} \ . \tag{47}$$

55. Interessante è anche il caso delle equazioni lineari non omogenee e dipendenti dal tempo, cioè della forma

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{48}$$

dove $b(t)$ è una funzione del tempo assegnata e $A(t)$ una matrice dipendente dal tempo. In questo caso NON vale il principio di sovrapposizione. Se infatti $x(t)$ e $y(t)$ sono due soluzioni di (48), allora $z(t) := x(t) + y(t)$ soddisfa all'equazione

$$\dot{z} = A(t)z + 2b(t) \ .$$

Si osservi invece che la funzione $\tilde{z}(t) := x(t) - y(t)$ soddisfa invece all'equazion omogenea

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = A(t)\tilde{z} \ . \tag{49}$$

Da qui segue immediatamente la

Proposizione 1.14. *Sia $x(t)$ una soluzione di (48), e sia $y(t)$ una soluzione dell'equazione omogenea associata (49), allora*

$$z(t) := x(t) + y(t)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea (48).

1.7 Costanti del moto ed insiemi invarianti

56. Discuteremo qui la nozione di derivata di una funzione rispetto al tempo lungo le soluzioni di un'equazione differenziale e mostreremo come essa possa essere facilmente calcolata. Ciò ci consentirà di stabilire se una funzione sia costante del moto. Mostreremo inoltre come sfruttare tali oggetti per trovare alcuni insiemi invarianti.

57. Abbiamo visto al punto **35** come sia possibile mostrare che l'energia è costante lungo le traiettorie di un sistema ad un grado di libertà, anche senza conoscere a priori la struttura di tali traiettorie. Più in generale, data una funzione $W(x)$ è possibile calcolare la sua derivata lungo le traiettorie di un'equazione differenziale anche senza conoscerne le soluzioni.

Si consideri il sistema (34), e sia $W(x)$ una funzione a valori reali differenziabile in un certo insieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $x(t)$ è una soluzione del sistema (34), consideriamo la funzione composta $W(x(t))$; si ha allora:

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_k}(x(t))\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_k}(x(t)) f_k(x(t)) \ .$$

Tenendo a mente questa discussione poniamo la seguente

Definizione 1.15. Derivata di Lie *Sia W come sopra, allora la funzione*

$$[\pounds_f W](x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_k}(x) f_k(x)$$

si dice derivata di Lie di W lungo f.

Si osservi che la funzione f definisce un vettore $V := f(x)$ in ogni punto x, allora è immediato riconoscere che $\pounds_f W(x)$ altro non è che la derivata direzionale di W nella direzione del vettore $V = f(x)$.

Alla luce della precedente discussione è ovvia la validità della seguente

Proposizione 1.16. *Sia $x(t)$ una soluzione di (34), allora si ha*

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) = [\pounds_f W](x(t)) \ .$$

Un concetto particolarmente importante nella teoria dei sistemi dinamici è quello di costante del moto. Una costante del moto è una funzione che è costante lungo le soluzioni delle equazioni del moto.

Definizione 1.17. *Una funzione W con la proprietà che, per ogni soluzione $x(t)$ di $\dot{x} = f(x)$, si abbia*

$$W(x(t)) = W(x(s)) \tag{50}$$

per ogni coppia di tempi t, s per cui è definita la soluzione si dice costante del moto per il sistema f.

Si osservi che (50) è equivalente a

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) = 0 \ .$$

Osservazione 1.18. *Dalla proposizione 1.16 segue che per verificare se una funzione sia o meno costante del moto non è necessario conoscere le soluzioni del sistema di equazioni differenziali, ma basta calcolare la derivata di Lie di W lungo f. Se essa risulta zero, allora W è costante del moto, altrimenti no.*

58. Si conderi l'equazione di Newton in n dimensioni:

$$\ddot{x} = F(x) \ , \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = F(x) \end{cases} \ , \qquad x \in \mathbb{R}^n \ , \quad v \in \mathbb{R}^n \ , \tag{51}$$

e si assuma che F ammetta potenziale, cioè che esista una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ il cui gradiente sia $-F$, cioè tale che

$$F_i(x) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Allora la funzione

$$E(x,v) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + V(x) \tag{52}$$

è una costante del moto per il sistema (51). La funzione E è detta *energia del sistema (51). La funzione V è detta potenziale del sistema (51).* In molti testi V è anche detta energia potenziale del sistema.

59. Insieme invariante.

Definizione 1.19. *Un insieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ si dice positivamente invariante per (31) se, per ogni $x_0 \in \mathcal{C}$ la soluzione $x(t,x_0)$ con dato iniziale x_0 è definita per tutti i $t > 0$ e resta in $\mathcal{C}$ per ogni tempo positivo, cioè se*

$$x_0 \in \mathcal{C} \Longrightarrow x(t,x_0) \in \mathcal{C} \ , \quad \forall t > 0 \ .$$

60. L'esistenza di costanti del moto è di grande aiuto nello studio della dinamica di una sistema di equazioni differenziali. Infatti, poiché si ha che per ogni tempo vale $W(x(t)) = W(x(0))$, la soluzione è obbligata a muoversi non in tutto $\mathbb{R}^n$, ma nel suo sottoinsieme costituito dalla superficie di livello della funzione W. Cioè ogni superficie

$$W^{-1}(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ W(x) = \alpha\}$$

costituisce un insieme invariante per il sistema.

61. Data una funzione W si consideri il suo *sottografico di W a livello α* cioè l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ W(x) \leq \alpha\}$$

e si assuma che per tutti i punti di tale insieme risulti $\pounds_f W \leq 0$, allora tale sottografico è un insieme invariante.
62. Si consideri un sistema della forma

$$\ddot{x} = F(x) - \sigma \dot{x} \ , \quad x \in \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = F(x) - \sigma v \end{cases} \tag{53}$$

dove $F(x)$ è una forza che ammette potenziale e σ è un parametro positivo. Si consideri l'energia (52) definita al punto **58** e si calcoli la sua derivata di Lie rispetto al sistema (53), essa è data da

$$v \cdot (F(x) - \sigma v) + \frac{\partial V}{\partial x} v = -\sigma v \cdot v = -\sigma \left\| v \right\|^2$$

che è negativa in tutti i punti in cui $v \neq 0$ e nulla in tutti i punti dello spazio delle fasi in cui $v = 0$. Quindi la derivata di Lie dell'energia è minore o uguale a zero. Segue che il sottografico dell'energia è un insieme invariante.

1.8 Stabilità dei punti critici

63. In questo paragrafo discuteremo alcuni aspetti della dinamica nonlineare in prossimità dei punti critici di un campo vettoriale. La considerazione di partenza è che la dinamica del sistema linearizzato discussa nel paragrafo precedente potrebbe a priori non avere nulla a che fare con la dinamica del sistema completo. Lo studio della relazione tra queste due dinamiche costituisce un importante filone della ricerca sui sistemi dinamici. Vi sono alcuni risultati classici dovuti a Lyapunov che danno delle condizioni sotto cui è comunque possibile descrivere la dinamica di un sistema in prossimità di un punto d'equilibrio ed essi sono l'oggetto di questo capitolo.
64. Preliminarmente alla definizione di stabilità ci proponiamo di discutere il valore del teorema di dipendenza continua dal dato quando la soluzione di riferimento è un punto critico (o d'equilibrio del sistema). Sia dunque $x(t) = c$ una soluzione particolare indipendente dal tempo. Allora l'equazione (32) garantisce che

$$\sup_{|t| \leq \bar{T}} \left\| x(t, \bar{x}) - c \right\| \leq C \left\| \bar{x} - c \right\| \ . \tag{54}$$

Supponiamo di essere interessati al seguente problema: assegnamo la distanza finale d_f entro cui vogliamo rimanere dal punto c, allora per ogni tempo T esiste d_0 tale che, se $\|\bar{x} - c\| \leq d_0$ allora (54) implica $\|x(t, \bar{x}) - c\| \leq d_f$.

È interessante valutare esplicitamente d_0 in funzione di T e d_f in un sistema concreto. Consideriamo quindi un coltello appoggiato su un piano rigido (ad esempio di marmo) con la punta. Si tratta di un sistema modellizzabile mediante il pendolo, dove la costante ω è data da $\omega = \sqrt{\sqrt{3} g / l}$ e $g = 9.8 \simeq 10 m/sec^2$ ed l è la lunghezza del coltello, diciamo 10 cm. Come visto nel punto **53** il sistema in prossimità del punto d'equilibrio instabile è descrivibile mediante l'equazione del repulsore armonico (45), la cui soluzione è data da (46). Ci chiediamo con che precisione dobbiamo mettere il coltello in posizione verticale se vogliamo che dopo un tempo T esso abbia un'inclinazione con la verticale inferiore a

d_f. Esprimendo la soluzione (46) in termini dei dati iniziali x_0 e v_0, è facile rendersi conto del fatto che la costante C nella formula (54) cresce esponenzialmente con ωt; ponendo $v_0 = 0$, e risolvendo rispetto ad x_0 troviamo

$$x_0 = \frac{d_f}{\mathrm{Ch}\omega t} \ .$$

Fissiamo ora l'angolo finale massimo tollerato d_f in 10 gradi. Se chiediamo che esso sia raggiunto dopo un tempo pari almeno a 0.1 secondi troviamo x_0 può essere dell'ordine di qualche grado. Se chiediamo che l'inclinazione resti inferiore ai 10 gradi per 1 secondo troviamo che l'angolo iniziale deve essere inferiore a .001 gradi (il che sembra ben difficile da realizzare!), ma se chiediamo che il tempo entro cui l'inclinazione resti inferiore a 10 gradi sia di 10 secondi troviamo che l'inclinazione iniziale non deve superare 10^{-32} gradi. Per rendersi conto di cosa ciò significhi si pensi che questo vuol dire che la cima del coltello deve essere sulla verticale della sua punta a meno di un errore dell'ordine di 10^{-34} metri, quando il raggio dell'atomo è dell'ordine di 10^{-10} metri!

65. Si consideri un sistema di equazioni differenziali $\dot{x} = f(x)$ e sia c un suo punto di equilibrio,

Definizione 1.20. *Il punto d'equilibrio c si dice stabile secondo Lyapunof (per tempi positivei) se, per ogni intorno $\mathcal{U}$ di c esiste un intorno $\mathcal{V}$ di c tale che, per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathcal{V}$ la corrispondente soluzione $x(t)$ resta in $\mathcal{U}$ per* **tutti** *i tempi positivi.*

Definizione 1.21. *Il punto d'equilibrio c si dice asintoticamente stabile se è stabile secondo Lyapunof e se esiste un suo intorno $\mathcal{V}_0$ tale che per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathcal{V}$ la corrispondente soluzione $x(t)$ converge a c, cioè*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c \ .$$

Val la pena di sottolineare come nella definizione di stabilità asintotica la richiesta del punto di essere stabile sia indipendente dalla richiesta di convergere al punto di equilibrio, si possono infatti costruire esempi di sistemi in cui tutte le soluzioni convergono al punto di equilibrio, ma prima si allontanano da esso ad una distanza finita.

66. A commento della definizione 1.20 val la pena di segnalare come essa traduca bene l'idea di stabilità, essa infatti prevede che assegnando un qualsiasi intorno $\mathcal{U}$ entro cui si vuole che la soluzione resti (per tutti i tempi) deve essere possibile trovare un intorno $\mathcal{V}$ abbastanza piccolo con la proprietà che partendo al suo interno la soluzione resti per sempre in $\mathcal{U}$.

67Si osservi che la nozione di stabilità dei punti d'equilibrio è invariante per trasformazioni di coordinate (differenziabili). Infatti essa fa riferimento solo alla struttura topologica dello spazio, che è invariante per trasformazioni di coordinate continue.

68. Si consideri ad esempio il sistema lineare (41). Vale la seguente

Proposizione 1.22. *Si assuma che la matrice A che definisce il sistema*

$$\dot{x} = Ax \tag{41}$$

sia diagonalizzabile, allora

1) l'origine è un punto fisso stabile per tempi positivi se tutti gli autovalori λ_i di A hanno parte reale non positiva, cioè se

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i \le 0\ , \quad \forall i = 1, ..., n\ ;$$

2) se la disuguaglianza è stretta, cioè se

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ , \quad \forall i = 1, ..., n\ ;$$

allora l'origine è asintoticamente stabile;
3) infine se almeno un autovalore ha parte reale positiva l'origine è instabile.

La dimostrazione si ottiene semplicemente applicando la formula (47) che da la soluzione generale del sistema. In particolare conviene procede ad esaminare i singoli addendi della conviene esaminare la formula (47) e poi ricordare la definizione di stabilità ed instabilità.
69. Praticamente l'unico criterio di Stabilità noto per i punti di equilibrio di un sistema dinamico è costuito dal Teorema di Lyapunof. Preliminarmente al suo enunciato e alla sua dimostrazione diamo
Definizione 1.23. *Funzione di Lyapunof: Sia c un punto d'equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$; una funzione regolare $W : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{U}_0 \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{U}_0$ intorno di c) si dice funzione di Lyapunof per c, se vale*
(i) W ha un minimo stretto in c, cioè $W(x) > W(c)$, $\forall x \in \mathcal{U}_0$
(ii)

$$\pounds_f W(x) \le 0 \forall x \in \mathcal{U}_0 \tag{55}$$

Teorema 1.24. *(Teorema di Lyapunof) Sia c un punto d'equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$; se esiste una funzione di Lyapunov per tale punto allora esso è stabile. Se inoltre la disuguaglianza (55) è stretta (cioè vale con il minore stretto) allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.*

70. La dimostrazione che daremo qui del teorema di stabilità si basa su una semplice proprietà topologica delle funzioni di più variabili.

Sia $W : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{U}_0 \to \mathbb{R}$ una funzione continua avente un minimo stretto in $c \in \mathcal{U}_0$; supponiamo sia normalizzata in modo che $W(c) = 0$. Dato $m > 0$ definiamo il sottolivellodd di m

$$\mathcal{S}_m := \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ W(x) < m\} \equiv W^{-1}((-\infty, m))$$

Si osservi che poiché tale insieme è la controimmagine di un aperto sotto una funzione continua, esso è aperto e inoltre è non vuoto poiché contiene almeno c. Si denoti anche con B_R la palla aperta di raggio R e centro c, allora vale la seguente

Proposizione 1.25. *Per ogni $R > 0$ esiste $m_R > 0$ tale che $\mathcal{S}_{m_R} \subset B_R$.*

dd Tale insieme potrebbe avere più componenti connesse, in tal caso per abuso di linguaggio, denoteremo con lo stesso simbolo la componente connessa contenente c.

Dimostrazione. Considereremo solo il caso in cui $\bar{B}_R \subset \mathcal{U}_0$, infatti nel caso in cui tale prproprietà sia violata è possibile semplicemente ripetere la costruzione sostituendo a B_R una palla di raggio più piccolo che risulti interamente contenuta (assieme al suo bordo) in $\mathcal{U}_0$. Poiché ∂B_R è chiuso e limitato esso è anche compatto, quindi esiste $m_R := \min_{x\in\partial B_R} W(x)$. Si ha allora che $\mathcal{S}_{m_R} \cap \partial B_R = \emptyset$ e dunque $\mathcal{S}_{m_R}$ è interamente contenuto in B_R. □

Corollario 1.26. *Sia $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione dallo spazio delle fasi in $\mathbb{R}$, avente un massimo od un minimo stratto in c. Sia x_k una successione tale che $V(x_k) \to V(c)$ allora $x_k \to c$.*

Dimostrazione. Ci mettiamo nel caso del massimo, il minimo si ottiene con semplici generalizzazioni. Basta mostrare che $\forall R > 0$ esiste K tale che $k > K$ implica $x_k \in B_R$. Poiché per ipotesi $W(x_k) \to 0$ $\exists K >$: $0 \leq W(x_k) < m_R$ $\forall k > K$, ma allora per tali valori $x_k \in \mathcal{S}_{m_R} \subset B_R$, che è la tesi. □

.

71.

Proposizione 1.27. *Ci si metta nelle ipotesi del teorema di Lyapunof 1.24 e sia m abbastanza piccolo affinch'é $\mathcal{S}_m \subset \mathcal{U}_0$, (il che è possibile per la proposizione 1.25) allora l'insieme $\mathcal{S}_m$ è invariante.*

Dimostrazione. Intuitivamente il risultato è ovvio: per uscire da $\mathcal{S}_m$ la soluzione deve far crescere W, ma questo è impossibile per l'ipotesi sulla sua derivata di Lie. Formalmente la dimostrazione si può ottenere come segue: Sia $x_0 \in \mathcal{S}_m$ e sia $x(t)$ la corrispondente soluzione. Si assuma per assurdo che la soluzione esca da $\mathcal{S}_m$ e sia t_0 il primo istante in cui essa è fuori da $\mathcal{S}_m$ allora, per definizione di $\mathcal{S}_m$ deve valere

$$W(x(t_0)) \geq m \tag{56}$$

, ma d'altra parte, poiché la soluzione è in $\mathcal{S}_m$ e dunque in $\mathcal{U}_0$ fino a t_0, si ha

$$W(x(t_0)) = W(x_0) + \int_0^{t_0} \dot{W}(t)dt = W(x_0) + \int_0^{t_0} \pounds_f W(x(t))dt \leq W(x_0) < m$$

il che è in contraddizione con (56). □

A questo punto è banale dimostrare la parte di stabilità semplice del teorema di Lyapunof.

Dimostrazione della prima parte del teorema di Lyapunof. Dato un intorno $\mathcal{U}$ del punto di equilibrio dobbiamo costruire un intorno $\mathcal{V}$ con le proprietà richieste dalla definizione di stabilità . Sia dunque B_R una palla contenuta in $\mathcal{U}$ e sia $\mathcal{S}_{m_R}$ l'insieme cotruito nella proposizione 1.25. Per la proposizione 1.27 tale insieme è invariante e dunque la soluzione resterà per sempre in esso e quindi anche in $B_R \subset \mathcal{U}$. □

72. Passiamo ora alla parte di stabilità asintotica del teorema di Lyapunof.

Dimostrazione del teorema di Lyapunov Si consideri la funzione $W(x(t))$, essa è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monotona decrescente, limitata inferiormente e quindi ammette limite per $t \to \infty$. Calcoliamo tale limite. Per la proposizione 1.8 esiste una successione $t_k \to \infty$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \pounds_f W\left(x(t_k)\right) = 0 \ . \tag{57}$$

Ma, poiché $\pounds_f W$ ha massimo in c dal corollario 1.26 segue $x(t_k) \to c$, ma allora si ha anche $W(x(t_k)) \to W(c)$. Da qui, poiché il limite esiste, si ha

$$\lim_{t\to\infty} W(x(t)) = W(c)$$

e dunque, sempre dal corollario 1.26 segue $x(t) \to c$. □

73. Consideriamo ora un generico sistema $\dot{x} = f(x)$ avente un punto d'equilibrio in c; introducendo le variabili $\xi = x - c$ si trova che la variabile ξ soddisfa all'equazione

$$\dot{\xi} = A\xi + v(\xi)$$

con

$$v(\xi) := f(\xi + c) - df(c)\xi$$

avente uno zero del secondo ordine nell'origine e A è la matrice Jacobiana di f in c. Motivati da questa considerazione ci proponiamo ora di dimostrare il seguente teorema

Teorema 1.28. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali*

$$\dot{x} = Ax + v(x)$$

con $v(x)$ *tale che* $\|v(x)\| \leq C\|x\|^2$ *per* $\|x\| \leq R$, $R > 0$. *Se gli autovalori di* A *hanno parte reale strettamente negativa allora* 0 *è un asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione nel caso in cui la matrice A sia diagonalizzabile. Per dimostrare la stabilità introduciamo la base di cui al punto **54**. Allora, preso $z \in \mathbf{C}^n$ definiamo la funzione

$$W(z) := \sum_{k=-l}^{n-l} z_k^* z_k \equiv z^* \cdot z$$

dove z_k sono le componenti sulla base $\mathbf{e}_k$ precedentemente definita, e il punto indica il prodotto scalare standard. Nel caso di punti reali, cioè tali che $z \in \mathbb{R}^n$ si trova che se

$$z = \sum_{k=1}^{l} (x_k \mathbf{v}_k + y_k \mathbf{w}_k) + \sum_{k=l+1}^{n-l} z_k \mathbf{e}_k$$

allora

$$W(z) = 2\sum_{k=1}^{l} (x_k^2 + y_k^2) + \sum_{k=l+1}^{n-l} z_k^2 \ , \tag{58}$$

Tale funzione è ovviamente positiva per ogni punto diverso dal punto d'equilibrio e si annulla solo sul punto d'equilibrio. Sia $\sigma := -2\max(\mathrm{Re}(\lambda_k))$, allora si ha

$$\begin{aligned} \pounds_A W = Az^* \cdot z + z^* \cdot Az = \sum_{k=-l}^{n-l} \lambda_k z_k^* z_k + \lambda_k z_k^* z_k = \sum_k 2\mathrm{Re}(\lambda_k) z_k^* z_k \\ \leq 2\max\left(\mathrm{Re}\lambda_\mathrm{k}\right) \sum_k z_k^* z_k = -\sigma W(z) \ . \end{aligned} \tag{59}$$

Si calcoli ora

$$\pounds_f W = \pounds_A W + \pounds_v W \ ,$$

ma $\pounds_v W$ è data da

$$\pounds_v W = \sum_{k=-l}^{n-l} v_k \frac{\partial W}{\partial x_k} \ ,$$

ma $\frac{\partial W}{\partial x_k}$ è una funzione lineare (vedi formula esplicita) e quindi esiste una costante tale che

$$\left| \frac{\partial W}{\partial x_k}(x) \right| \leq C\sqrt{W(x)} \ ,$$

d'altra parte v_k ha uno zero del secondo ordine nell'origine, e quindi esiste C tale che

$$|v_k(x)| \leq CW(x) \ ,$$

da cui

$$|\pounds_v W| \leq CW^{3/2} \ .$$

Nel dominio

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ W(x) < \epsilon^2 \right\}$$

utilizzando (59), si trova,

$$\pounds_{A+v} W < (-\sigma + 2C\epsilon) W \ ,$$

da cui in particolare si ha che la derivata di Lie di W è minore di zero per tutti i punti del dominio $W < \epsilon^2$ tranne che per 0. Quindi W è una buona funzione di Lyapunov e zero è un punto fisso stabile per il sistema. □

74. *(Complementare).* Do ora qualche cenno sulla dimostrazione nel caso di matrici non diagonalizzabili. Comincio ricordando che, data una matrice quadrata A, $n \times n$, e fissato $\epsilon > 0$ esiste una base $\{e_j\}$ di $\mathbf{C}^n$ tale che in tale base A è diagonale superiore e tutti gli elementi fuori diagonale sono più piccoli di ϵ. Tale base si introduce partendo da una base $\mathbf{e}'_k$ in cui la matrice A è triangolare superiore. La base cercata si trova ponendo $\mathbf{e}'_k = \epsilon^{k-1}\mathbf{e}_k$. Da cui si trova che nella nuova base le componenti $\left\{A'_{ij}\right\}_{i<j}$ della matrice diventano $A'_{ij} = \epsilon^{j-i} A_{ij}$.

75. *(Complementare).*Una volta introdotta tale base, analogamente a quanto fatto nel punto **54** possiamo ordinare la base in modo che sia $\mathbf{e}_k \in \mathbf{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ per $k = -l, ..., l$, e

$k \neq 0$, e si abbia $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ per $k = l+1, ..., n-l$. Dato un vettore $z \in \mathbf{C}^n$ allora lo si può decomporre su tale base trovando

$$z = \sum_{k=-l}^{n-l} z_k \mathbf{e}_k$$

dove si è sottinteso $k \neq 0$. Per $k = 1, ..., l$ scriviamo

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{v}_k + i\mathbf{w}_k \ , z_k = x_k + iy_k$$

con $\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$, e $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Allora si ha $\mathbf{e}_{-k} = \mathbf{v}_k - i\mathbf{w}_k$. Inoltre se $z \in \mathbb{R}^n$ allora si ha anche $z_{-k} = x_k - iy_k$.

76. *(Complementare).* Il punto principale per dimostrare il teorema 1.28 nel caso non diagonalizzabile consiste nel dimostrare la seguente

Proposizione 1.29. *Si assuma che tutti gli autovalori della matrice A che definisce il sistema*

$$\dot{x} = Ax \tag{41}$$

abbiano parte reale negativa, allora 0 *è un punto fisso asintoticamnte stabile.*

Si osservi che qui non si è assunta la diagonalizzabilità della matrice A. La dimostrazione è ottenuta utilizzando la base appena introdotta per definire la funzione W e utilizzando lo spezzamento di cui al punto **74** della matrice A in parte diagonale e parte sopradiagonale per stimare la derivata di Lie di W. Dopo di ciò la dimostrazione segue fedelmente la dimostrazione nel caso diagonale.

1.9 Un modello per la stabilità dei mercati competitivi

77. In questo paragrafo introdurremo un sistema di equazioni differenziali che modellizza la dinamica dei prezzi sotto la legge della domanda e dell'offerta. Mostreremo poi come, sotto opportune ipotesi, esista un unico punto d'equilibrio globalmente attrattivo per il sistema, come cioè i prezzi tendano all'equilibrio. Segnaliamo fin d'ora che torneneremo al punto **92** su questo problema per mettere in evidenza come in modelli leggermente diversi la situazione sia estremamante più complessa.

78. Il sistema che si vuole descrivere è quello di un mercato composto da un certo numero di individui ognuno dei quali offre alcuni beni e desidera acquistarne altri. Supponiamo che i beni presenti sul mercato siano n ed indichiamo con $p_1, ..., p_n$ i loro prezzi beni. Indicheremo poi con $x_{ij}(p_1, ..., p_n)$ la quantità del bene i-esimo che il j–esimo individuo è disposto a comprare (domanda) se i prezzi sul mercato sono dati dal vettore $p = (p_1, ..., p_n)$. *Assumeremo* che si abbia $p_i > 0\ \forall i = 1, ...n$. Indicheremo poi con $w_{ij}(p_1, ..., p_n)$ l'offerta del bene i esimo da parte del j–esimo individuo. L'idea è quella che se la domanda di un bene supera la sua offerta allora il suo prezzo cresce, mentre se la domanda è superata dall'offerta allora il prezzo decresce. Si osservi che la domanda e l'offerta totali del bene i–esimo saranno date da

$$x_i(p) := \sum_j x_{ij}(p) \ , \quad w_i(p) := \sum_j w_{ij}(p)$$

rispettivamente.

Si definisce poi la funzione *eccesso di domanda* del bene i–esimo come

$$f_i(p) := x_i(p) - w_i(p) \ ,$$

e si assume che i prezzi siano governati dal sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i(p) \ , \tag{60}$$

di cui assumeremo in seguito alcune proprietà. Poiché abbiamo assunto che i prezzi siano tutti positivi il dominio delle funzioni f_i sarà

$$\mathcal{D} := \{p \in \mathbb{R}^n \ : \ p_i > 0 \quad \forall i = 1, ..., n\}$$

79. Cominciamo a discutere brevemente il caso (banale) ad un bene in cui il sistema (60) si riduce ad una sola equazione

$$\dot{p} = f(p) = x(p) - w(p) \ . \tag{61}$$

L'equazione è allora a variabili separabili e inoltre è estremamente facile fare uno studio qualitativo delle sue soluzioni (vedi punto **32**). Si assuma che $x(p)$ sia una funzione positiva o nulla monotona decrescente del prezzo e che $w(p)$ sia una funzione positiva monotona crescente del prezzo, si assuma inoltre che assumendo $x(0) > 0$, $w(0) = 0$ e che il lato destro di (61) abbia uno zero, allora tale zero è unico ed inoltre la funzione eccesso di domanda è positiva quando la domanda supera l'offerta e negativa quando l'offerta supera la domanda. Segue che il sistema ha un unico punto fisso asintoticamente stabile in cui la domanda è uguale all'offerta.

80. Passiamo al caso a più beni. Per poter studiare la dinamica del sistema vanno fatte alcune ipotesi. La prima, costituisce una delle più importanti leggi dell'economia matematica e va sotto il nome di legge di Walras[10], deriva dal cosiddetto vincolo di budget. L'idea è che, dato un certo vettore dei prezzi, il singolo individuo ha a disposizione un budget b_j che, almeno virtualmente, ha valore pari ai beni che è in grado di offrire pesati con il loro prezzo, cioè

$$b_j = \sum_i p_i w_{ij}(p) \ .$$

Da cui segue il vincolo che la domanda totale $d_j := \sum_i p_i x_{ij}(p)$ del singolo individuo deve soddisfare a $d_j \leq b_j$ (perchè si ammette che non sia possibile bluffare). Si fa allora l'ipotesi di massima soddisfazione secondo cui vale $d_j = b_j$, cioè ogni consumatore vuole spendere tutto ciò che ha. Da qui, sommando sugli individui si trova la *legge di Walras*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i(p) \iff \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(p) = 0 \ . \tag{62}$$

[10] Dall'economista francese Leon Walras che nella seconda metà del 1800 diede contributi fondamentali alla fondazione di tale scienza

81. Un'altra ipotesi standard consiste nell'*omogeneità*: più precisamente nell'assunzione che le funzioni $f_i(p)$ siano omogenee di grado zero, ovvero che si abbia

$$f_i(\lambda p) = f_i(p) \ , \quad \forall \lambda > 0 \ . \tag{63}$$

Ciò corrisponde all'idea che i prezzi dei beni siano in un certo senso puramente convenzionali, cioè contino solo i prezzi relativi e non cambi nulla se il prezzo di tutti i beni viene moltiplicato per un qualsiasi numero positivo, visto che in tal caso cambiano i prezzi, ma allo stesso tempo cambia, e della stessa entità la ricchezza di tutti gli individui.

82. L'ultima ipotesi che si fa è quella della *sostituibilità grezza.* Tale ipotesi consiste matematicamente nell'assumere che si abbia

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_k}(p) > 0 \ , \quad \forall i \neq k \ , \quad \forall p \in \mathcal{D} \ . \tag{64}$$

Per capire tale ipotesi consideriamo un modello economico di *puro scambio*, in cui l'offerta delle merci sia una costante indipendente dal prezzo. In tal caso l'ipotesi (64) è equivalente a

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k}(p) > 0 \ , \quad \forall i \neq k \ , \quad \forall p \in \mathcal{D} \ , \tag{65}$$

il che dice che, se tenendo fissi tutti gli altri prezzi, si incrementa il prezzo del bene k–esimo allora aumenta la richiesta di tutti gli altri beni. Cioè, se si vogliono comprare dei chiodi d'acciaio, ma il loro prezzo è cresciuto allora si decide di comprare qualcos'altro, ad esempio dei chiodi di ferro e delle cipolle, facendo cosí aumentare la domanda di tutti questi prodotti.

83. Si assuma ora che esista un punto d'equilibrio per il mercato, cioè una soluzione stazionaria $\hat{p} \in \mathcal{D}$ del sistema (60). Vogliamo stabilire se il mercato conduca i prezzi a tale valore. Una questione preliminare che si pone è quella dell'unicità dell'equilibrio. Si osservi intanto che, poiché $f_i(\hat{p}) = 0 \ \forall i$, dall'ipotesi di omogeneità (63) segue che anche $\lambda\hat{p}$ è una soluzione stazionaria di (60) per ogni $\lambda > 0$, cioè tutti i punti di $\mathcal{D}$ che stanno sulla retta passante per $\hat{p}$ e per l'origine sono punti di equilibrio per il sistema. D'altra parte è chiaro che questa non unicità è fittizzia, in quanto corrisponde ad un ininfluente riscalamento dei prezzi. Mostriamo ora che a meno di tali riscalamenti l'equilibrio (se esiste) è unico.

Proposizione 1.30. *Si assuma che il sistema (60) soddisfi a (63) e (64), valgano cioè le ipotesi di omogeneità e di sostitubilià grezza, e che esista un equilibrio $\hat{p} \in \mathcal{D}$ allora tale equilibrio è unico a meno di multipli scalari, cioè, se $\bar{p}$ è un altro equilibrio esiste $\lambda > 0$ t.c. $\hat{p} = \lambda\bar{p}$.*

Dimostrazione. Per assurdo. Siano $\hat{p}$ e $\bar{p}$ due equilibri t.c. $\hat{p} \neq \lambda\bar{p} \ \forall \lambda > 0$. Sia I l'indice tale che

$$\frac{\hat{p}_I}{\bar{p}_I} = \min_{i=1,\ldots,n} \left\{ \frac{\hat{p}_i}{\bar{p}_i} \right\} \ ,$$

allora si ha

$$\mu := \frac{\hat{p}_I}{\bar{p}_I} \leq \frac{\hat{p}_i}{\bar{p}_i} \ , \quad \forall i = 1, ..., n \ ,$$

ed inoltre esiste un indice k tale che

$$\frac{\hat{p}_I}{\bar{p}_I} < \frac{\hat{p}_k}{\bar{p}_k} \ .$$

Si definisca allora $\tilde{p} := \mu\bar{p}$; si ha $\tilde{p}_I = \hat{p}_I$, $\tilde{p}_k > \hat{p}_k$. Da (64) segue allora $f_I(\tilde{p}) > f_I(\hat{p})$, e quindi

$$f_I(\bar{p}) = f_I(\mu\bar{p}) = f_I(\tilde{p}) > f_I(\hat{p}) = 0 \ ,$$

contro l'ipotesi che $\bar{p}$ sia un equilibrio. □

Un'altra importante osservazione per capire la dinamica del sistema (60) è la seguente

Proposizione 1.31. *Se vale al legge di Walras (62) allora la quantità*

$$\|p\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \ ,$$

è una costante del moto per (60).

Dimostrazione. Sia $p(t)$ una soluzione di (60), e andiamo a calcolare la derivata temporale di $\|p(t)\|^2$. Si ha

$$\frac{d}{dt}\|p(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}p_i(t)^2 = \sum_{i=1}^{n}2\dot{p}_i(t)p_i(t) = \sum_{i=1}^{n}2f_i(p(t))p_i(t) = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è data dalla legge di Walras. □

Quest'ultima proposizione rende evidente il fatto che la dinamica di fatto avviene sulla superficie di una sfera in $\mathbb{R}^n$ di raggio uguale alla norma del dato iniziale. La proposizione 1.30 garantisce che su ogni sfera l'equilibrio se esiste è unico. Avviene poi anche che l'equilibrio, se esiste, è globalmente attrattivo.

84. La dimostrazione del fatto che l'equilibrio sia globalmente attrattivo si basa sull'introduzione di un'opportuna funzione di Lyapunov per la dinamica del sistema (60) sulla sfera determinata dal dato iniziale. La funzione di Lyapunov è banalmente data dalla distanza al quadrato dal punto d'equilibrio, la cosa difficile è far vedere che essa decresce sempre lungo la dinamica. In particolare ciò si basa su un lemma la cui dimostrazione è abbastanza complicata e poco istruttiva. Per questo, almeno per quanto riguarda tale lemma ci limiteremo ad illustrarne la validità dimostrandolo nel caso di un mercato a due beni e per la dimostrazione nel caso generale rinviamo all'articolo originale (estremamente ben scritto e accessibile anche al lettore senza nozioni di economia matematica) di Arrow, Block e Hurwitz[11].

Lemma 1.32. *Si assumano (63), (64), (62), e sia $\hat{p}$ un punto di equilibrio per (60), allora per ogni vettore dei prezzi p, che non sia di equilbrio si ha*

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i f_i(p) > 0 \ . \tag{66}$$

[11] Vedi *Econometrica*, **27** (1959), 82-109.

Dimostrazione nel caso a due beni. Si fissi p^* che non sia di equilibrio, allora si ha $p^* = \lambda\hat{p}$, o equivalentemente
$$\frac{p_1^*}{p_2^*} \neq \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2}\ .$$
Consideriamo dapprima il caso
$$\frac{p_1^*}{p_2^*} < \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2}\ . \tag{67}$$
Si osservi ora che rappresentando in un piano cartesiano il punto di coordinate $y_1^* = f_1(p^*)$ e $y_2^* = f_2(p^*)$ la legge di Walras dice che il punto (y_1^*, y_2^*) sta sulla retta r passante per l'origine e ortogonale al vettore $p^* = (p_1^*, p_2^*)$. Mostriamo che nel caso (67) il punto (y_1^*, y_2^*) sta nel quarto quadrante e come da ciò segua la tesi del lemma. Procedendo in modo simile a quanto fatto nella dimostrazione della proposizione 1.30 definiamo

$$\mu := \frac{\hat{p}_2}{p_2^*}\ ,\quad \tilde{p} = \mu p^*\ ,$$

e osserviamo che da (67) segue $\tilde{p}_2 = \hat{p}_2$ e $\mu p_1^* = \tilde{p}_1 < \hat{p}_1$. Quindi utilizzando l'ipotesi di sostiuibilità grezza si trova

$$y_2^* = f_2(p^*) = f_2(\tilde{p}) < f_2(\hat{p}) = 0\ ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\hat{p}$ è equilibrio. Poiche (y_1^*, y_2^*) deve stare su r segue che sta necessariamente nel quarto quadrante. Consideriamo ora la retta passante per (y_1^*, y_2^*) e ortogonale a $\hat{p}$. Essa ha equazione

$$\sum_{i=1}^{2} \hat{p}_i y_i = \alpha$$

Da (67) segue che tale retta ha coeficiente angolare inferiore (più negativo) di r, e quindi interseca il primo quadrante. Segue che α è positivo. D'altra parte anche (y_1^*, y_2^*) sta sulla retta, e quindi si ha
$$0 < \alpha = \sum_{i=1}^{2} \hat{p}_i y_i^* = \sum_{i=1}^{2} \hat{p}_i f_i(p^*)\ .$$
Il caso opposto a (67) si tratta in modo analogo ed è lasciato per esercizio. □

85. Premettiamo alla dimostrazione del teorema di stabilità dei mercati competitivi una versione del teorema di Lyapunov adattata alla situazione in studio.

Teorema 1.33. *Si consideri un sistema di equazioni differenziali (31) e siano $\mathcal{C}$ un suo insieme invariante e $c \in \mathcal{C}$ un suo punto d'equilibrio. Sia $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$ un intorno aperto di c, e si assuma che esista una funzione $W : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{R}$ con la proprietà che*
1) $W\big|_{\mathcal{C}}$ abbia un minimo stretto in c,
2) $\pounds_f W(x) < 0\ \forall x \in \mathcal{C} \setminus \{c\}$

allora per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{U}_0$ la corrispondente soluzione $x(t, x_0)$ converge a c quando $t \to \infty$

La dimostrazione è una semplice variante della dimostrazione del teorema di Lyapunov ed è lasciata al lettore.

86. Il teorema di stabilità.

Teorema 1.34. *(Arrow, Block, Hurwitz) Si consideri il sistema (60) e si assuma che valgano (62),(63),(64); si assuma inoltre che il sistema ammetta un equilibrio $\hat{p}$. Allora ogni soluzione di (60) converge ad un punto d'equilibrio che coincide a meno di un riscalamento con $\hat{p}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è una applicazione del teorema 1.33 di cui verifichiamo ora le ipotesi. Sia p^0 il dato iniziale; l'insieme invariante $\mathcal{C}$ è definito come la superficie

$$\mathcal{C} := \left\{ p \in \mathcal{D} \ : \ \|p\| = \left\|p^0\right\| \right\} \ .$$

Sia allora $\lambda = \left\|p^0\right\| / \|\hat{p}\|$, e sia $\check{p} := \lambda \hat{p}$; definiamo la funzione di Lyapunov W come segue

$$W(p) := \sum_{i=1}^{n} \left(p_i - \check{p}_i\right)^2 \ ,$$

allora è ovvio che vale la proprietà 1) del teorema 1.33. Andiamo a calcolare la derivata di Lie di W, cioè la sua derivata temporale lungo le soluzioni del sistema. Sia dunque $p(t)$ una soluzione di (60) con dato iniziale in $\mathcal{C}$, allora, indicando per brevità $W(t) := W(p(t))$ si ha

$$\frac{dW}{dt}(t) = 2\sum_{i=1}^{n} \left(p_i(t) - \check{p}_i\right) \dot{p}_i(t) = 2\sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i(p(t)) - 2\sum_{i=1}^{n} \check{p}_i f_i(p(t)) = -2\sum_{i=1}^{n} \check{p}_i f_i(p(t)) \ , \tag{68}$$

dove per l'ultimo passaggio si è utilizzata la legge di Walras. Ora, l'unico punto d'equilibrio in $\mathcal{C}$ è dato da $\check{p}$, e quindi il lemma 1.32 garantisce che la quantità (68) sia minore di zero per ogni $p \in \mathcal{C} \setminus \{\check{p}\}$. Quindi il teorema 1.33 da il risultato. □

1.10 Cenni sui sistemi dinamici discreti monodimensionali

87. Introdurremo qui i sistemi dinamici a tempo discreto, vale a dire quei sistemi dinamici ottenuti tramite l'iterazione di una mappa. Cominceremo introducendo un sistema che rappresenta la dinamica dell'orologio a pendolo. Quindi studieremo un modello molto semplificato relativo ancora al problema dell'equilibrio dei prezzi sotto la legge della domanda e dell'offerta, mostrando che in caso di mercati molto reattivi il sistema presenta una dinamca molto più complicata di quella discussa nel paragrafo 1.9, e che apparentemente presenta alcuni aspetti di caoticità. Infine discuteremo un esempio di mappa caotica e daremo una descrizione formale e precisa del senso in sui tale mappa è caotica.

88. Per la discussione del modello di orologio per il momento si fa riferimento alle dispense di Benettin Galgani, Giorgilli, paragrafo 1.5.1, pag.46.

89. Si consideri una funzione $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora in modo analogo a quanto visto nel caso dell'orologio, essa definisce un sistema dinamico come segue: dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisce per ricorrenza la successione

$$x_{k+1} := \Psi(x_k) \ , \quad k \geq 0 \ , \tag{69}$$

che viene detta orbita di x_0. Si dice allora che Ψ definisce un sistema dinamico a tempo discreto su $\mathbb{R}$. Infatti in questo contesto il ruolo di tempo è giocato dall'indice k che varia solo sull'insieme discreto degli interi.

90. Si consideri un sistema di equazioni differenziali della forma (34), e si consideri il corrispondente flusso F^t. Allora tramite il flusso possiamo definire una mappa da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ tramite

$$\Psi(x) := F^1(x) \ , \tag{70}$$

allora è facile vedere che l'orbita $\{x_k\}$ di un punto x sotto la mappa Ψ ha la proprietà che

$$x_k = F^k(x) \ ,$$

cioè fornisce i punti in cui si trova la soluzione dell'equazione differenziale a tempi interi. Si vede dunque come un'equazione differenziale possa essere utilizzata per definire una mappa le cui orbite catturano alcune caratteristiche della dinamica dell'equazione differenziale stessa.

È interessante segnalare un altro caso in cui questo può essere fatto: quello delle equazioni differenziali dipendenti eslicitamente dal tempo in modo periodico. Si consideri dunque l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x,t) \ ,$$

dove f è periodica in t di periodo 1, cioè si ha $f(x,t+1) = f(x,t)$. Sia come sopra $x(t,x_0)$ la soluzione con dato iniziale[12] $x(0) = x_0$. Definiamo la mappa Ψ come segue:

$$\Psi(x_0) := x(1,x_0) \ ,$$

allora, sfruttando la periodicità di f, è facile vedere che vale ancora la proprietà che

$$x(k,x_0) = x_k$$

dove x_k è il k–esimo punto dell'orbita di x_0 sotto Ψ.

91. Come per il caso dei sistemi dinamici a tempo continuo è utile cominciare a studiare i punti di equilibrio e la loro stabilità. Si osservi intanto che un punto di equlibrio c è un punto tale che

$$c = \Psi(c) \ . \tag{71}$$

In modo identico a quanto fatto per i sistemi a tempo continuo si da la definizione di punto d'equilibrio stabile, asintoticamente stabile e instabile, definizioni che quindi non ripetiamo.

[12] attenzione perché in questo caso in cui vi è dipendenza esplicita dal tempo se si definisce il flusso come $F^t(x_0) := x(t,x_0)$ non vale la proprietà di gruppo cioè non si ha $F^{t+s} = F^t \circ F^s$.

Per studiare la dinamica in prossimità di un punto d'equilibrio conviene cominciare a studiare la linearizzazione del sistema. Sia dunque c un punto d'equilibrio (cioè una soluzione di (71)) e introduciamo una nuova coordinata ξ centrata sul punto d'equilibrio, definita da $x = \xi + c$. In termini di tale coordinata la dinamica di Ψ è data da

$$\xi_{k+1} = x_{k+1} - c = \Psi(x_k) - c = \Psi(\xi_k + c) - c \ ,$$

sviluppando in serie il lato destro e trascurando termini di ordine superiore al primo in $|\xi|$ si è condotti al sistema lineare

$$\xi_{k+1} = \lambda \xi_k \ , \quad \lambda := \Psi'(c) \ . \tag{72}$$

Si osservi che è estremamente facile costruire esplicitamente l'orbita di un qualunque dato iniziale. Si trova subito

$$\xi_1 = \lambda \xi_0 \ , \quad \xi_2 = \lambda \xi_1 = \lambda^2 \xi_0 \ , \quad \xi_3 = \lambda \xi_2 = \lambda^3 \xi_0 \ ,$$

e quindi (dimostrarlo per induzione)

$$\xi_k = \lambda^k \xi_0 \ .$$

Da qui in particolare è possibile stabilire il comportamento asintotico per grandi k della soluzione. Infatti se $|\lambda| < 1$ si ha $\lambda^k \to 0$ quando $k \to \infty$, mentre $|\lambda|^k \to \infty$ se $|\lambda| > 1$. Ciò porta alla seguente proposizione che generalizza la proposizione 1.22 al caso in considerazione

Proposizione 1.35. *Si consideri il sistema dinamico discreto lineare (72), se $|\lambda| < 1$ allora l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile, se $|\lambda| > 1$ allora è instabile, se $|\lambda| = 1$ è stabile.*

Vale anche una generalizzazione del teorema di Lyapunov 1.28:

Proposizione 1.36. *Sia c un punto d'equilibrio di Ψ, e sia $\lambda := \Psi'(c)$; se $|\lambda| < 1$ allora il punto d'equilibrio è asintoticamente stabile, se $|\lambda| > 1$ il punto d'equilibrio è instabile.*

Come nel caso a tempo continuo, nel caso $|\lambda| = 1$ la parte nonlineare può cambiare qualitativamente la dinamica.

92. Consideriamo ora un modello per la dinamica dei prezzi del genere di quello studiato nel paragrafo 1.9. Supponiamo però di avere un solo bene (situazione totalmente banale nel caso a tempo continuo) e supponiamo che il prezzo al giorno $(k+1)$–esimo sia determinato dal prezzo al giorno k–esimo secondo la legge della domanda e dell'offerta[13]

---

[13] Si osservi che in questo caso ad un bene non ha senso imporre la legge di Walras che si riferisce al caso in cui il budget di ogni individuo proviene dalle sue azioni sul mercato, le quali sono a loro volta figlie della vendita di altri beni che in questo modello non esistono. Altrettanto dicasi per quanto riguarda la legge di omogeneità rispetto al cambiamento dei prezzi. Qui si sta pensando al caso in cui in qualche senso esiste il denaro che funge da unita di misura dei prezzi.

Scriviamo la legge che da la dinamica dei prezzo mettendo in evidenza un coefficiente r chiamato reattività del mercato. Sia $x(p)$ la domanda del bene in considerazione quando il prezzo è p e sia $w(p)$ la sua domanda, denotiamo con $E(p) := x(p) - w(p)$ la funzione eccesso di domanda. Assumiamo che il prezzo al $(k+1)$–esimo giorno sia dato da

$$p_{k+1} = p_k + rE(p_k) \ ; \tag{73}$$

ci proponiamo ora di fissare una forma per le funzioni $x(p)$ e $w(p)$ e di studiare la dinamica di questo sistema al variare della reattività r.

Sia dunque

$$w(p) = 2p \ , \quad x(p) = \begin{cases} -p^2 + 25 & p < 5 \\ 0 & p \geq 5 \end{cases} \ ; \tag{74}$$

che soddisfa alle richieste che l'offerta cresca al crescere del prezzo e che la domanda decresca al decrescere del prezzo, ma senza mai diventare negativa.

Da qui si trova che il sistema ammette un unico equilibrio che si trova annullando la funzione eccesso di domanda

$$E(p) = \begin{cases} -p^2 - 2p + 25 & p < 5 \\ -2p & p \geq 5 \end{cases} \ ;$$

l'equilibrio $\hat{p}$ è allora dato da

$$\hat{p} := \sqrt{26} - 1 \ .$$

Veniamo alle proprietà dinamiche. Il sistema da studiare è dato da (69) con

$$\Psi(p) = \Psi_r(p) := \begin{cases} -rp^2 + (1-2r)p + 25r & p < 5 \\ (1-2r)p & p \geq 5 \end{cases} \ ;$$

assumiamo anche $r < 1/2$ in modo che si abbia anche $\Psi_r(p) > 0$ cioè i prezzi non diventino mai negativi. Siamo interessati in particolare alla stabilità dell'equilibrio, calcoliamo dunque

$$\Psi_r'(\hat{p}) = 1 - 2r\sqrt{26} \ ,$$

da cui si trova che se tale quantità ha modulo minore di uno il punto d'equilibrio è stabile, mentre se ha modulo maggiore di uno è instabile. In particolare si ha dunque che se

$$r > r_* := \frac{1}{\sqrt{26}}$$

il[14] punto d'equilibrio diventa instabile.

Per farsi un'idea della dinamica in tal caso val la pena di osservare che a questo punto le orbite non convergono più a un punto d'equilibrio, ma che in ogni caso (come ci si rende conto facilmente facendo un grafico di Ψ_r) esplorano una regione compatta di $\mathbb{R}$, e quindi hanno sicuramente dei punti di accumulazione. Possono succedere essenzialmente

[14] Si osservi che in particolare $r_* < 1/2$.

due casi: o le orbite si avvicinano indefinitamente a punti periodici (cioè a soluzioni con la proprietà che dopo un certo numero di passi tornano al punto di partenze) oppure questo non avviene. In tal caso l'orbita viene ad avere un comportamento altamente imprevedibile. Per farsi un'idea della dinamica vale la pena di seguire alcune orbite per alcuni passi[15] quando il valore di r sia abbastanza lontano dal valore critico, cioè sia vicino a $1/2$. Ci si rende conto abbastanza facilmente che l'orbita assume un andamento alquanto imprevedibile. In particolare che dati iniziali vicini danno luogo a orbite che dopo pochi passi sono notevolmente lontane. Si hanno cioè dei comportamenti che euristicamente potrebbero essere definiti caotici.

93. Per formalizzare il concetto di comportamento caotico o casuale cominciamo con l'analizzare gli esiti dell'esperimento del lancio di una moneta. Supponiamo di lanciare una moneta e di scrivere su un foglio uno 0 se esce testa e un 1 se esce croce. Una successione

$$\{a_k\}_{k\geq 1}\ ,\quad a_k\in\{0,1\} \tag{75}$$

rappresenta allora la lista degli esiti del lancio della moneta. Se ripetiamo l'esperimento troveremo un'altra successione. Si osservi che conoscendo i primi n elementi di una successione nulla si può dire su quale sarà il prossimo. Si osservi inoltre come ogni successione di zeri ed uni rappresenti un possibile esito dell'esperimento.

94. Diamo ora un esempio di una mappa le cui orbite sono in corrispondenza biunivoca con gli esiti dell'esperimento del lancio di una moneta descritto sopra. Denotiamo con $I=[0,1]$ l'intervallo unitario, e definiamo

$$\begin{aligned}\Psi : I &\to I\\ x &\mapsto 2x \ \mathrm{mod}1\end{aligned}$$

cioè

$$\Psi(x)=\begin{cases} 2x & x<\frac{1}{2}\\ 2x-1 & x\geq\frac{1}{2}\end{cases}\ .$$

Si osservi come tale mappa possa essere interpretata come una mappa del cerchio di lunghezza unitaria. Infatti fissato arbitrariamente un punto (che fungerà da origine) sul cerchio e denotando con x la distanza in direzione positiva (una direzione arbitraria ma fissata) dall'origine la mappa raddoppia tale distanza. Analogamente possiamo dire che la mappa consiste nel raddoppiare l'angolo formato dalla retta che unisce il punto al centro con una direzione fissa.

Prima di dare la discussione formale vale la pena di sottolineare un aspetto qualitativo della dinamica. Supponiamo di conoscere il dato iniziale con una precisione finita, siano ad esempio noti 2 decimali nella sua espressione. Ciò significa che in realtà il nostro dato iniziale è rappresentato ugualmente bene da punti lontani tra di loro 0.01 radianti (che è ben poco!). Vediamo come questo piccolo errore iniziale si propaga. A tale scopo basta andare a misurare la distanza tra le orbite aventi come origine due punti vicini 10^{-2}, dopo k passi essa è ovviamente data da $10^{-2}2^k$ (almeno finché $2^k10^{-2}<2\pi$). Questo significa che dopo 14 passi l'imprecisone diventa dell'ordine di π.

[15] magari al calcolatore

95. Costruiamo ora una corrispondenza tra lo spazio delle successioni di cui al punto **93** e i punti dell'intervallo $[0, 1]$. Data una successione $a = \{a_k\}_{k\geq 0}$ gli si fa corrispondere il punto dell'intervallo [0,1] che ha come rappresntazione binaria la successione in considerazione, cioè si definisce

$$x(a) := \sum_{k\geq 0} a_k \frac{1}{2^{k+1}} \ . \tag{76}$$

Si osservi che, tranne che in quei punti la cui la rappresentazione binaria termine con una successione infinita di 0 o di 1[16] ,tale corrispondenza è invertibile, e si denoti semplicemente con $a(x)$ la sua inversa. Trascuriamo i punti di non invertibilità e andiamo ad analizzare come la mappa Ψ agisca sulle successioni. Definiamo cioè una mappa Ψ_a come segue

$$\Psi_a(a) = a(\Psi(x)) \ , \quad \text{dove } x = x(a) \ .$$

A tal fine si osservi che la mappa Ψ agisce come segue: si comincia a moltiplicare per due il numero x e quindi, se il numero cosí ottenuto è minore di 1 lo si tiene invarianto, se invece è maggiore di 1 gli si sottrae 1. Utilizzando (76) si ha che $2x$ è dato da

$$\begin{aligned} 2x(a) = 2\sum_{k\geq 0} a_k \frac{1}{2^{k+1}} &= \sum_{k\geq 0} a_k \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k\geq -1} a_{k+1} \frac{1}{2^{k+1}} \ , \end{aligned} \tag{77}$$

cioè $2x(a)$ ha la rappresentazione binaria $a_0.a_1a_2a_3.....$ Ora, se $a_0 = 0$ tale punto sta nell'intervallo [0,1], se invece $a_0 = 1$ tale numero è maggiore di 1. Quindi $\Psi(x)$ avrà rappresentazione binaria $a_0.a_1a_2a_3....$ se $a_0 = 0$ oppure $0.a_1a_2a_3....$ se $a_0 = 1$, espressione che si vede subito essere valida in entrambi i casi. Abbiamo dunque trovato

$$\Psi_a(a_0, a_1, a_2, a_3....) = (a_1, a_2, a_3...) \ ,$$

cioè la mappa Ψ_a agisce facendo scorrere indietro la successione a e cancellando il primo termine.

Per stringere il parallelo con il lancio della moneta conviene immaginare di avere un apparecchio che legge la cifra che si trova in posizione zero. Allora fare scorrere la successione indietro di una posizione vuol dire mandare in posizione 0 la cifra che si trovava in posizione 1, cioè andare a leggere se al secondo lancio è uscito testa o croce. Fare scorrere k volte la successione vuol dire andare a leggere se al $k + 1$–esimo lancio è uscita testa o croce. In questo senso la mappa Ψ_a è esattamente la mappa che corrisponde all'operazione euristica "lancio della moneta". La mappa Ψ che agisce sul segmento unitario è in corrispondenza 1-1 con tale mappa, e quindi possiede le stesse proprietà di aleatorietà.

96. *(Complementare)*.La descrizione di cui sopra può lasciare un po' insoddisfatti per la sua astrazione. Diamo quindi una descrizione più concreta della corrispondenza tra la mappa Ψ e il lancio della moneta. Ancora una volta la discussione escluderà quei punti

[16] punti che come si può facilmente vedere costituiscono un insieme di misura nulla.

dell'intervallo [0,1] la cui espansione binaria termina con una successione di infiniti zeri o uni.

Si definiscano i due sottointervalli $I_0 := [0, 1/2)$ e $I_1 := [1/2, 1)$, e, fissato un punto $x \in I$ sia x_k la sua orbita (per convenzione diciamo $x_0 = x$). Allora definiamo una successione $\tilde{a}$ che corrisponde al punto x come segue[17]:

$$\tilde{a}_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x_k \in I_0 \\ 1 & \text{se} \quad x_k \in I_1 \end{cases} . \tag{78}$$

Mostriamo che vale la

Proposizione 1.37. *Si ha $\tilde{a}_k(x) = a_k(x)$.*

Dimostrazione. Si assegni x e si cominci con l'osservare che se $x \in I_0$ allora $a_0 = 0$, altrimenti $a_0 = 1$, quindi si ha $a_0 = \tilde{a}_0$. Costruiamo ora $a_1(x)$ applicando Ψ ad x, allora $a_1(x)$ è la prima cifra della rappresentazione binaria di $\Psi(x)$, e si ha quindi che $a_1(x) = 0$ se $\Psi(x) \in I_0$, mentre $a_1(x) = 1$ se $x \in I_1$, ma questa è esattamente la definizione di $\tilde{a}_1(x)$. Per leggere la k-esima cifra della rappresentazione binaria di x applichiamo k volte Ψ. Si ha allora $a_k(x) = 0$ se $x_k \in I_0$, e $a_k(x) = 1$ se $x_k \in I_1$, ma questa è anche la definizione di $\tilde{a}_k(x)$. Quindi la proposizione è dimostrata. □

La proposizione precedente ha conseguenze profonde, infatti si osservi che permette di concludere che la possibilità di prevedere se il punto rappresentativo del sistema sia nel seminitervallo di destra o in quello di sinistra è identica alla possibilità di prevedere se il prossimo esito del lancio di una monetà sarà testa o croce. Segnalo infine che da qui si possono anche ottenere notevoli informazioni sulla dinamica del sistema. Ad esempio si può concludere che il sistema possiede infiniti punti periodici e che le orbite periodiche sono dense. Ma questo è argomento al di la degli scopi di questo corso.

97. Infine sottolineo che quanto riportato qui non è una situazione eccezionale, ma che la teoria dei sistemi dinamici permette di mostrare come in situazioni abbastanza generali esistano dei sottoinsiemi dello spazio delle fasi (eventualemente coincidenti con l'intero spazio delle fasi come nel presente insieme) su cui la dinamica sia in corrispondenza biunivoca con il lancio di una moneta, nello stesso senso in cui lo è nel modello appena studiato.

1.11 Disequazioni differenziali (complementare)

98. Diamo qui alcuni risultati utili par lo studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali.

Lemma 1.38. Lemma di Gronwall*In un intervallo chiuso $[0, T]$ siano ϕ, ψ, w tre funzioni continue e valori reali positivi che soddisfino*

$$w(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \psi(s) w(s) ds \tag{79}$$

[17] poiché abbiamo escluso i punti la cui rappresentazione binaria termina con infiniti 1 o 0 non capita mai che il punto in considerazione capiti in un estremo dell'intervallo e quindi la prescrizione sia ambigua

allora si ha

$$w(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \phi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\tau)d\tau\right) ds$$

Dimostrazione. Sia

$$y(t) := \int_0^t \psi(s)w(s)ds$$

che è differenziabile in quanto primitva di una funzione continua. Moltiplicando entrambi i membri di (79) per ψ si trova

$$\dot{y} - \psi y \leq \phi\psi \ .$$

Si introduca la funzione

$$z(t) := y(t) \exp\left(-\int_0^t \psi(s)ds\right)$$

e si moltiplichino entrambi i membri della disequazione presedente per $\exp\left(-\int_0^t \psi(s)ds\right)$. Si trva così

$$\dot{z}(t) \leq \phi(t)\psi(t) \exp\left(-\int_0^t \psi(s)ds\right)$$

da cui, integrando si ha la tesi. □

Esattamente con la stessa dimostrazione si dimostra che

Lemma 1.39. *In un intervallo chiuso $[0,T]$ siano ϕ, ψ, w tre funzioni continue e valori reali positivi che soddisfino*

$$w(t) \geq \phi(t) + \int_0^t \psi(s)w(s)ds \tag{80}$$

allora si ha

$$w(t) \geq \phi(t) + \int_0^t \phi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\tau)d\tau\right) ds$$

99. Vale il seguente

Lemma 1.40. *Sia $\rho(t)$ una funzione differenziabile, $\rho : (-T,T) \to \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$. Sia f differenziabile e si supponga che, per $|t| < T$ valga*

$$\dot{\rho}(t) \leq f(\rho(t)) \ ;$$

si consideri la soluzione di $\dot{x} = f(x)$ con dato iniziale $x_0 = \rho(0)$, allora si ha

$$\rho(t) \leq x(t) \ , \quad \forall t \ : \ 0 < t < T \ ,$$

e viceversa per $-T < t < 0$

Dimostrazione. Posto $y(t) = x(t) - \rho(t)$ si ha

$$\dot{y}(0) > f(x(0)) - f(\rho(0)) = 0 \ ,$$

quindi esiste un intervallo $I \subset (0, T)$ su cui $y(t) > 0$. Sia t_1 il primo punto in cui $y(t_1) = 0$, e si supponga $t_1 < T$. Allora, poiché y è positiva per $t < t_1$ si ha $\dot{y}(t_1) \leq 0$. Ma, dall'equazione si ha

$$\dot{y}(t_1) < f(x(t_1)) - f(\rho(t_1)) = 0 \ ,$$

il che è assurdo. Il caso $t < 0$ si dimostra identicamente. □

100. Il caso in cui la disuguaglianza stretta è sostituita dalla disuguaglianza debole è un po più difficile. Si ha

Lemma 1.41. *Sia $\rho(t)$ una funzione differenziabile, $\rho : (-T, T) \to \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$. Sia f differenziabile e strettamente monotona, e si supponga che, per $|t| < T$ valga*

$$\dot{\rho}(t) \leq f(\rho(t)) \ ;$$

si consideri la soluzione di $\dot{x} = f(x)$ con dato iniziale $x_0 = \rho(0)$, allora si ha

$$\rho(t) \leq x(t) \ , \quad \forall t \ : \ 0 < t < T \ ,$$

e viceversa per $-T < t < 0$

Dimostrazione. Si fissi $\bar{t} < T$ positivo. Per fissare le idee supponiamo che f sia monotona decrescente (il caso più difficile). Preso ϵ abbastanza piccolo si ha che la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0 - \epsilon$ esiste in $[0, \bar{t}]$ e converge alla soluzione con dato iniziale x_0 su $[0, \bar{t}]$. Si consideri la funzione $\rho_\epsilon(t) := \rho(t) - \epsilon$, si ha

$$\dot{\rho}_\epsilon(t) = \dot{\rho}(t) \leq f(\rho(t)) < f(\rho(t) - \epsilon) = f(\rho_\epsilon(t))$$

si può quindi applicare il lemma precedente a ρ_ϵ, ottenendo in particolare che

$$\rho_\epsilon(\bar{t}) < x_\epsilon(\bar{t}) \ .$$

Passando al limite per $\epsilon \to 0^+$ si ha la tesi. □

101. Il caso vettoriale è coperto dal seguente

Lemma 1.42. *Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ una funzione Lipschitziana monotona crescente e sia $x : [0, T] \to \mathcal{B}$ una funzione differenziabile a valori in $\mathbb{R}^n$. Si assuma che per ogni $t \in [0, T]$ la funzione $x(t)$ soddisfi la disequazione integrale*

$$\|x(t)\| \leq K + \int_0^t g(\|x(\tau)\|) d\tau$$

e si consideri la soluzione $s(t)$ del problema di Cauchy

$$\dot{s} = g(s) \ , \quad s(0) = K \ .$$

allora si ha

$$\|x(t)\| \leq s(t) \ , \quad \forall t \in [0,T] \ .$$

Dimostrazione. Si definisca la funzione a valori reali $u(t) := \|x(t)\|$, allora soddisfa la disuguaglianza

$$u(t) \leq K + \int_0^t g(u(\tau))d\tau \ . \tag{81}$$

Si definisca la funzione $v(t) := K + \int_0^t g(u(\tau))d\tau$, allora si ha $\dot{v}(t) = g(u(t))$ da cui, denotando con g^{-1} la funzione inversa di g (che esiste per monotonia) si può dare all'equazione (81) la forma

$$g^{-1}(\dot{v}(t)) \leq v(t) \ ,$$

e, applicando g (che non inverte il segno della disuguaglianza, poiché è una funzione crescente), si ha

$$\dot{v} \leq g(v) \ ,$$

la cui soluzione soddisfacente $v(0) = K$ è $v(t) \leq s(t)$ con s definita nell'enunciato. Si ha dunque

$$\|x(t)\| = u(t) = g^{-1}(\dot{v}(t)) \leq g^{-1}(\dot{s}(t)) = g^{-1}(g(s(t))) = s(t) \ .$$

$\square$

Corollary 1.43. *La stessa conclusione del lemma precedente con $K = \|x_0\|$, vale se (81) è sostituita dalla disequazione differenziale*

$$\|\dot{x}(t)\| \leq g(\|x(t)\|) \quad .$$

Proof. Si osservi che si ha

$$\begin{aligned}\|x(t)\| = \left\| x(0) + \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau \right\| &\leq \|x(0)\| + \int_0^t \|\dot{x}(\tau)\| \, d\tau \\ &\leq \|x(0)\| + \int_0^t g(\|x(\tau)\|)d\tau \ ,\end{aligned}$$

e si applichi il lemma. $\square$