Metriche invarianti per biolomorfismo

Francesco Battistoni

19/01/2017

Scopo di questo talk è discutere le metriche e pseudo-metriche definite sui domini di $\mathbb{C}^n$ e che restano invariate per biolomorfismo.

1 Richiami sulle metriche

Definizione 1. Sia $M \subseteq \mathbb{C}^n$ una varietà C^1. Una **metrica Hermitiana su** M è una funzione continua

$$\rho : M \to T_0^2 M := T^{\mathbb{C}} M \otimes_{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}} M$$

(dove $T^{\mathbb{C}}M$ è il fibrato tangente olomorfo) e tale che per ogni $x \in M$ la funzione $\rho(x)$ sia un prodotto hermitiano sul $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $T_x^{\mathbb{C}} M$.

Possiamo dare una definizione equivalente (almeno dal punto di vista locale): la funzione ρ è una metrica Hermitiana se per ogni $x \in M$ esiste un intorno $U \subset M$ contenente x e funzioni continue $g_{ij} : M \to \mathbb{C}$ (con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$) tali che per ogni $z \in U$ la matrice $(g_{ij}(z))$ sia definita positiva, ovvero

$$\sum_{i,j} g_{ij}(z) v_i \overline{v_j} > 0$$

per ogni vettore $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ non nullo.

Definizione 2. Data una metrica Hermitiana $(g_{ij}(x))$, la **lunghezza rispetto alla metrica** di un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ è definita come

$$||v|| := \Big(\sum_{i,j} g_{ij}(x) v_i \overline{v_j} \Big)^{1/2}.$$

Data $\gamma : [0,1] \to M$ curva C^1, la **lunghezza della curva** è definita come

$$||\gamma|| := \int_0^1 ||\gamma^{'}(t)||dt.$$

Definizione 3. Data una metrica Hermitiana su M, è possibile definire una distanza d su M: per ogni $x, y \in M$ definiamo

$$d(x,y) := \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} ||\gamma||$$

dove $\Gamma(x,y) := \{\gamma : [0,1] \to M : \gamma \text{ curva } C^1, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$.

Si può verificare che d è effettivamente una metrica: l'unico punto difficile è il cotrollo che d sia non degenere; inoltre è possibile dimostrare che la topologia indotta su M dalla metrica d coincide con la topologia precedentemente data su M.
Per avere maggiori dettagli sulle ultime due affermazioni consulta [Kob2].

2 La metrica di Bergman

2.1 Richiami sugli Spazi di Bergman

Tutte le dimostrazioni per i fatti di questa sezione si possono trovare in [Pel].

Definizione 4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. **Lo spazio di Bergman su** Ω è definito come

$$A^2(\Omega) := H(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Definendo $\langle f, g\rangle_{A^2(\Omega)} := \langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)}$ lo spazio $A^2(\Omega)$ diventa uno spazio pre-Hilbert.

Lemma 1. *Sia $K \subset \Omega$ un compatto. Allora esiste $C_K > 0$ tale che*

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K ||f||_{A^2}.$$

Questo lemma permette di dimostrare che $A^2(\Omega)$ è in realtà uno spazio di Hilbert. Inoltre consente di dire che il funzionale lineare di valutazione

$$\Phi_z : A^2(\Omega) \to \mathbb{C}$$

che ad ogni f associa $f(z)$ è limitato: per il teorema di Riesz esiste allora $k_z \in A^2(\Omega)$ tale che $f(z) = \langle f, k_z\rangle$.

Definizione 5. La funzione $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $K(w, z) = k_z(w)$ è detta **nucleo di Bergman per** $A^2(\Omega)$.

Notiamo che K è coniugato simmetrico: dalle proprietà del prodotto scalare hermitiano infatti si ottiene che $K(z, w) = \overline{K(w, z)}$. Possiamo allora trovare delle condizioni che caratterizzano il nucleo di Bergman.

Proposizione 1. *Sia* $K' : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ *tale che per ogni* $z \in \Omega$ *si abbia* $K'(\cdot, z) \in A^2(\Omega)$, $\Phi_z(f) = \langle f, K'(\cdot, z)\rangle$ *per ogni* $f \in A^2(\Omega)$ *e* $K'(z, w) = \overline{K'(w, z)}$.
Allora K' *è il nucleo di Bergman di* $A^2(\Omega)$.

La proposizione successiva ci permette invece di calcolare esplicitamente il nucleo di Bergman: per fare ciò è importante notare che, essendo $A^2(\Omega)$ un sottospazio chiuso di $L^2(\Omega)$, anche $A^2(\Omega)$ è separabile.

Proposizione 2. *Sia* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ *una base ortonormale di* $A^2(\Omega)$. *Allora*

$$K(w, z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_j(w)\overline{\varphi_j(z)}.$$

Se inoltre Ω *ha chiusura compatta in* $\mathbb{C}^n$, *si ha* $K(z, z) > 0$ *per ogni* $z \in \Omega$.

Esempio 1. Se $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$ è la bolla unitaria, allora il nucleo di Bergman è uguale a

$$K_B(w, z) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{(1 - z\overline{w})}.$$

2.2 Jacobiani complessi

Definizione 6. Sia $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{C}^n$ una mappa olomorfa. Poniamo $w_j := f(z)$. Lo **Jacobiano olomorfo** è definito come la matrice

$$J_{\mathbb{C}} f = \Big(\frac{\partial w_i}{\partial z_j}\Big)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Se $z_j = x_j + iy_j$ e $w_j = \zeta_j + i\eta_j$, possiamo definire lo **Jacobiano reale**

$$J_{\mathbb{R}} f = \Big(\frac{\partial(\zeta_1, \eta_1 \ldots, \zeta_n, \eta_n)}{\partial(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}\Big).$$

Proposizione 3. *Per ogni mappa olomorfa* $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ *si ha*

$$\det J_{\mathbb{R}} f = |\det J_{\mathbb{C}} f|^2.$$

Dimostrazione. Vedi [Kra1]. $\square$

Mostriamo ora che il nucleo di Bergman soddisfa importanti proprietà di invarianza.

Proposizione 4. *Siano Ω_1 e Ω_2 domini in $\mathbb{C}^n$ e sia $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ un biolomorfismo. Allora*

$$\det(J_{\mathbb{C}} f(w)) \cdot K_{\Omega_2}(f(w), f(z)) \cdot \overline{\det(J_{\mathbb{C}} f(z))} = K_{\Omega_1}(w, z).$$

Dimostrazione. Per ogni $z \in \Omega_1$ la funzione $\det(J_{\mathbb{C}} f(\cdot))K_{\Omega_2}(f(\cdot), f(z)) \cdot \overline{\det(J_{\mathbb{C}} f(z))}$ è olomorfa e coniugata simmetrica. Sia ora $\phi \in A^2(\Omega_1)$. Si ha:

$$\int_{\Omega_1} \phi(w) \cdot \det(J_{\mathbb{C}} f(z)) \cdot K_{\Omega_2}(f(z), f(w)) \cdot \overline{\det(J_{\mathbb{C}} f(w))} dw =$$
$$\int_{\Omega_2} \phi(f^{-1}(u)) \cdot \det(J_{\mathbb{C}} f(z)) \cdot K_{\Omega_2}(f(z), u) \cdot \overline{\det(J_{\mathbb{C}} f(f^{-1}(u)))} \cdot \det(J_{\mathbb{R}} f^{-1}(u))du =$$
$$\det(J_{\mathbb{C}} f(z)) \int_{\Omega_2} K_{\Omega_2}(f(z), u)[\det J_{\mathbb{C}} f^{-1}(u) \cdot \phi(f^{-1}(u))]du$$

La funzione fra le quadre è in $A^2(\Omega_2)$ e per le proprietà del Nucleo di Bergma l'espressione sopra è uguale a

$$\det(J_{\mathbb{C}} f(z)) \cdot \phi(f^{-1}(f(z))) \cdot \det[J_{\mathbb{C}} f^{-1}(f(z))] = \phi(z)$$

e pertanto abbiamo l'uguaglianza con il nucleo di Bergman su Ω_1. $\square$

2.3 Definizione della metrica di Bergman

Proposizione 5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e sia K il nucleo di Bergman di $A^2(\Omega)$. Allora $K(z, z) > 0$ per ogni $z \in \Omega$.*

Dimostrazione. Supponiamo esista $z \in \Omega$ tale che $K(z, z) = 0$. Ma $K(z, z) = \langle K(., z), K(., z)\rangle$ e dunque $K(., z) = 0$ e questo implica che $f(z) = \langle f, K(., z)\rangle = 0$ per ogni $f \in A^2(\Omega)$.
Ma ciò è assurdo, poiché $A^2(\Omega)$ contiene $f(z) = z + 1$. $\square$

Definizione 7. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio a chiusura compatta. La **metrica di Bergman** è la metrica Hermitiana su Ω definita dalle funzioni

$$g_{ij}(z) := \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \log K(z, z).$$

Si tratta effettivamente di una metrica Hermitiana: la matrice $(g_{ij}(z))$ è tale che $g_{ji}(z) = \overline{g_{ij}(z)}$. Possiamo definire allora la lunghezza dei vettori tangenti $w \in T_z(\Omega)$

$$||w|| := \Big(\sum_{i,j} g_{ij}(z) w_i \overline{w_j}\Big)^{1/2}$$

così come la lunghezza di una curva $\gamma \subset \Omega$

$$||\gamma|| := \int_0^1 ||\gamma^{'}(t)|| dt$$

e la **distanza di Bergman**

$$\rho_\Omega(z, w) := \inf_{\gamma \in \Gamma(z,w)} ||\gamma||.$$

Osservazione 1. Non è a priori ovvio che la matrice fornita dalle funzioni $g_{ij}(z)$ sia definita positiva: questo controllo è verificato nelle prime pagine di [Kra2].
L'idea consiste infatti nel costruire un sistema ortonormale in questo modo:fissato $z_0 \in \Omega$ per primo si sceglie $\phi_0 \in A^2(\Omega)$ tale che $\phi_0(z_0) \in \mathbb{R}$, $||\phi_0|| = 1$ e $\phi_0(z_0)$ sia massimale. Dopodichè si prende $\phi_1 \in A^2(\Omega)$ tale che $\phi_1(z_0) = 0$, $\partial\phi_1/\partial z_1(z_0) \in \mathbb{R}$, $||\phi_1|| = 1$ e $\partial\phi_1/\partial z_1(z_0)$ sia massimale.
A questo punto ϕ_0 e ϕ_1 sono ortogonali; continuando il procedimento per ogni ordin di derivazione otteniamo un sistema ortonormale, che è anche completo grazie alle espansioni di Taylor.
La verifica che vogliamo segue infine dalla scrittura di $K(z, z)$ come somma grazie al sistema appena definito.

Teorema 1. *Sia $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ un biolomorfismo fra due domini in $\mathbb{C}^n$. Allora*

$$\rho_{\Omega_1}(z, w) = \rho_{\Omega_2}(f(z), f(w)).$$

Dimostrazione. E' sufficiente verificare che $\forall z \in \Omega_1$ e $\forall w \in \mathbb{C}^n$ vale

$$\sum_{i,j} g^{\Omega_1}_{i,j}(z) w_i \overline{w_j} = \sum_{i,j} g^{\Omega_2}_{i,j}(f(z))(J_{\mathbb{C}} f(z)w)_i \overline{(J_{\mathbb{C}} f(z)w)_j}.$$

Ma dalla Proposizione 4 si ottiene

$$\begin{aligned} g^{\Omega_1}_{i,j(z)} =& \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \log K_{\Omega_1}(z, z) = \\ & \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \log(\det(J_{\mathbb{C}} f(z)) K_{\Omega_2}(f(z), f(z)) \overline{\det(J_{\mathbb{C}} f(z))}) = \\ & \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \log K_{\Omega_2}(f(z), f(z)) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché i determinanti di Jacobiani olomorfe sono funzioni olomorfe (e vengono perciò annullati da derivate miste). Ma allora, per le regole delle derivate parziali, il tutto è uguale a

$$\sum_{l,m} g^{\Omega_2}_{l,m}(f(z)) \frac{\partial f_l}{\partial z_i} \frac{\partial \overline{f}_m}{\partial \overline{z}_j}$$

da cui la tesi. □

Esempio 2. Sia $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$. Nell'esempio 1 abbiamo calcolato il nucleo di Bergman

$$K_B(w,z) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{(1 - z\overline{w})}.$$

La metrica di Bergman su $B(0,1)$ è allora determinata dalle funzioni

$$g_{ij}(z) := \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \log K(z,z) =$$
$$\frac{n+1}{(1 - |z|^2)^2} [\overline{z_i} z_j + (1 - |z|^2)\delta_{ij}].$$

Nel caso $n = 1$ la metrica di Bergman è determinata da un'unica funzione

$$g_{11}(z) = \frac{2}{(1 - |z|^2)^2}$$

e per ogni $w \in \mathbb{C}^n$ la lunghezza del vettore rispetto alla metrica è uguale a

$$||w|| = \Big(\frac{2}{(1 - |z|^2)^2} |w|^2 \Big)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{(1 - |z|^2)} |w|.$$

2.4 La metrica iperbolica di Poincarè

Mostriamo ora, come interessante esempio, il calcolo della distanza di Bergman sul disco unitario. A tale scopo utilizziamo il nucleo di Bergman esplicitato nell'ultima parte dell'esempio precedente.
Cominciamo a calcolare la distanza fra 0 e $r := r + 0i$, con $0 < r < 1$.
Notiamo innanzitutto che se $\gamma(t) := v(t) + iw(t)$ è una curva C^1 fra 0 e r, con v e w funzioni reali, allora

$$\frac{2}{(1 - |v(t)|^2 - |w(t)|^2)^2} (|v^{'}(t)|^2 + |w^{'}(t)|^2) \geq \frac{2}{(1 - |v(t)|^2)^2} |v^{'}(t)|^2$$

e pertanto possiamo ridurci a calcolare la distanza di Bergman sulle curve $\psi(t) = (v(t), 0)$. Possiamo inoltre supporre che ognuna di queste curve sia semplice, in quanti in caso di autointersezioni o queste si possono eliminare, o producono una lunghezza maggiore.
Ora, per ognuna di queste ψ si verifica che

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(1-|v(t)|^2)}|v^{'}(t)|dt \ \geq \Big| \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{(1-v(t)^2)}v^{'}(t)dt \Big| = \int_0^r \frac{\sqrt{2}}{(1-u^2)}du = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \Big(\frac{1+r}{1-r} \Big)$$

e quest'ultima quantità è realizzata dall'integrale sul segmento $\gamma(t) := (rt, 0)$, per cui

$$\rho_B(0, r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \Big(\frac{1+r}{1-r} \Big).$$

Essendo la rotazione $z \to ze^{i\theta}$ un automorfismo del disco, si ha

$$\rho_B(0, re^{i\theta}) = \rho_B(0, r).$$

Presi ora due punti z e w del disco, per calcolare la loro distanza secondo la metrica di Bergman sfruttiamo l'automorfismo del disco

$$f(\zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \zeta \bar{z}}$$

che manda z in 0. Per cui

$$\begin{aligned} \rho_B(z, w) =& \rho_B(f(z), f(w)) = \rho_B\Big(0, \frac{w-z}{1-w\bar{z}}\Big) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \log \Big(\frac{1 + |\frac{w-z}{1-w\bar{z}}|}{1 - |\frac{w-z}{1-w\bar{z}}|} \Big). \end{aligned}$$

Quella che abbiamo recuperato è **la metrica iperbolica di Poincarè sul disco**.

Esempio 3. Consideriamo il caso multi-dimensionale di $B(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$. Ragionando in un modo simile al precedente si calcola che la distanza di Bergman fra l'origine $(0, \ldots, 0)$ e un punto $(r, 0, \ldots, 0)$ con $r < 1$ è pari a

$$\rho_B((0, \ldots, 0), (r, 0, \ldots, 0)) = \frac{\sqrt{n+1}}{2} \log \Big(\frac{1+r}{1-r} \Big)$$

Presi poi due punti z e w in B, applicando ripetutamente le trasformazioni unitarie della bolla (ovvero le rotazioni) e gli automorfismi della forma

$$\Phi_a(z) := \Big(\frac{z_1 - a}{1 - \bar{a}z_1}, \frac{\sqrt{1-|a|^2}z_2}{1-\bar{a}z_1}, \dots, \frac{\sqrt{1-|a|^2}z_n}{1-\bar{a}z_1}\Big)$$

(dove a è un numero complesso di modulo < 1) si calcola la distanza di Bergman fra z e w, che è pari a

$$\rho_B(z,w) = \frac{\sqrt{n+1}}{2}\log\Big(\frac{|1 - w\cdot\bar{z}| + \sqrt{|w-z|^2 + |z\cdot\bar{w}|^2 - |z|^2|w|^2}}{|1 - w\cdot\bar{z}| - \sqrt{|w-z|^2 + |z\cdot\bar{w}|^2 - |z|^2|w|^2}}\Big).$$

Per avere più detagli, consultare [Kra1] o [Kra2].

2.5 Distance decreasing property

La metrica iperbolica di Poincarè-Bergman calcolata sul disco unitario $D \subset \mathbb{C}$ nella sezione precedente ci consente di dimostrare un'interessante proprietà metrica delle funzioni olomorfe, che può essere vista come una riformulazione del Lemma di Schwarz. Abbiamo bisogno del seguente:

Lemma 2 (Pick-Schwarz)**.** *Sia $f : D \to D$ una funzione olomorfa. Allora per ogni z_1 e z_2 in D vale*

$$\Big|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)}\Big| \leq \Big|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\Big|.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una semplice applicazione del classico lemma di Schwarz. Definiamo le trasformazioni di Möebius

$$M(z) := \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \text{ e } \varphi(z) := \frac{z - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}z}.$$

La funzione olomorfa $\varphi \circ f \circ M^{-1}$ va da D in D e manda 0 in 0: il lemma di Schwarz implica che

$$|\varphi(f(M^{-1}(z)))| = \Big|\frac{f(z_1) - f(z)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z)}\Big| \leq |z|$$

e ponendo $z_2 := M^{-1}(z)$ otteniamo la tesi. □

Corollario 1. *Sia $f : D \to D$ una funzione olomorfa. Allora per ogni z e w in D vale*

$$\rho_D(f(z), f(w)) \leq \rho_D(z,w).$$

Se l'invarianza per biolomorfismo della metrica di Bergman è tipica di ogni dominio limitato, quest'ultima proprietà caratterizza in modo interessante il disco (e verrà ampiamente usata e generalizzata in seguito).

3 Le metriche di Caratheodory e Kobayashi

A partire dalla metrica di Bergman possiamo definire altre metriche (in alcuni casi pseudometriche) che hanno la pregevole proprietà di essere invarianti per biolomorfismo. Di seguito forniamo i due principali esempi: quello di Caratheodory e quello di Kobayashi.

Osservazione 2. Siano U e V insiemi aperti in $\mathbb{C}^n$. D'ora in poi denotiamo con $U(V)$ l'insieme delle mappe olomorfe da V verso U.

3.1 La metrica di Caratheodory

Definizione 8. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto. La **distanza di Caratheodory** fra due punti z e w di Ω è definita come

$$C_\Omega(z, w) := \sup_{f \in B(\Omega)} \rho_B(f(z), f(w))$$

dove ρ_B è la metrica di Bergman sulla palla $B(0, 1) \subset \mathbb{C}^n$.

Osservazione 3. Per alcuni Ω la distanza è semplicemente una pseudo-metrica: ad esempio, se $\Omega = \mathbb{C}^n$ dal Teorema di Liouville si ha che ogni $f \in B(\mathbb{C}^n)$ è costante e dunque $C_{\mathbb{C}^n}(z, w) = 0$ per ogni coppia di punti z e w in $\mathbb{C}^n$.
In ogni caso C_Ω soddisfa la disuguaglianza triangolare.

Definizione 9. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto. **La forma infinitesima della metrica di Caratheodory** è data dalla funzione $F_C : \Omega \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(w, \xi) := \sup_{\substack{f \in B(\Omega) \\ f(w)=0}} \Big| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \cdot \xi_j \Big| = \sup_{\substack{f \in B(\Omega) \\ f(w)=0}} \Big| \frac{\partial f}{\partial z}(w)\xi \Big|.$$

Pensando $\Omega \times \mathbb{C}^n$ come il fibrato tangente a Ω, possiamo dire che F_C misura un'opportuna lunghezza dei vettori tangenti a punti di $z \in \Omega$. Non essendo però in generale fornita da una forma quadratica $(g_{ij}(z))$, non possiamo pensarla come una metrica Hermitiana (e addirittura neanche Riemanniana).

Osservazione 4. Si può provare (attraverso un calcolo esplicito del gruppo degli automorfismi di B: vedi [Kra1]) che data $f \in B(\Omega)$, si ha

$$\Big| \frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial z}(w)\xi \Big| \geq \Big| \frac{\partial f}{\partial z}(w)\xi \Big|$$

per ogni automorfismo ϕ della bolla che mandi $f(w)$ nell'origine (**esiste**: $\mathrm{Aut}\, B$ è transitivo).
In questo modo la condizione $f(w) = 0$ diventa superflua.

Definizione 10. Data $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ una curva C^1, **la lunghezza di Caratheodory di** γ è definita come

$$L_C(\gamma) := \int_0^1 F_C(\gamma(t), \gamma'(t))dt.$$

Sarebbe naturale pensare che la distanza di Caratheodory fra due punti definita precedentemente si possa calcolare come infimimum degli $L_C(\gamma)$ al variare delle curve γ fra i due punti.
Sfortunatamente, ciò non vale in generale: un esempio è presentato da [Kra1], con $\Omega := D^2(0, 5/4) \setminus \overline{D^2}(0, 3/4)$. Siamo comunque abbastanza fortunati da garantire che ciò funzioni in casi particolari come quello della palla $B(0, 1)$ (vedere ad esempio [Ses]).

3.2 La metrica di Kobayashi

Definizione 11. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto e siano $z, w \in \Omega$ fissati. Un insieme finito di punti $\{p_0, .., p_k\}$ si dice **ammissibile per** $\{z, w\}$ se $p_0 = z, p_k = w$ e esistono funzioni $f_j \in \Omega(B)$ e punti $u_j^1, u_j^2 \in B$ (con $j \in \{1, \dots, k\}$) tali che $f_j(u_j^1) = p_{j-1}$ e $f_j(u_j^2) = p_j$.

Osservazione 5. Una famiglia ammissibile costituisce una sorta di "interpolazione" tramite funzioni che partono dalla palla B.

Definizione 12. Dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, **la metrica di Kobayashi** su Ω è definita come la pseudo-distanza

$$K_\Omega(z, w) := \inf_{\substack{\{p_0, \dots, pk\} \\ \text{ammissibile}}} \sum_{j=1}^{k} \rho_B(u_j^1, u_j^2).$$

Come prima, andiamo a osservare la questione da un punto di vista locale: questa volta, a dispetto di una definizione più complicata, tutto sarà compatibile.

Definizione 13. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto e $e_1 := (1, \dots, 0)$ il primo vettore della base canonica. **La forma infinitesima della metrica di Kobayashi** è data dalla funzione $F_K : \Omega \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ definita in modo che

$$\begin{aligned} F_K(z,\xi) :&= \inf\{\alpha\colon \alpha > 0, \exists f \in \Omega(B) \text{ tale che } f(0) = z, \Big(\frac{\partial f}{\partial z}(0)\Big)(e_1) = \xi/\alpha\} \\ &= \frac{|\xi|}{\sup\{|(\frac{\partial f}{\partial z}(0)(e_1))|\colon f \in \Omega(B), (\frac{\partial f}{\partial z}(0))(e_1) \text{ è un multiplo costante di } \xi\}}. \end{aligned}$$

Data $\gamma : [0,1] \to \Omega$ una curva C^1, **la lunghezza di Kobayashi di** γ è definita come

$$L_K(\gamma) := \int_0^1 F_K(\gamma(t), \gamma^{'}(t))dt.$$

Teorema 2. *Per ogni coppia di punti $z, w \in \Omega$ si ha*

$$K_\Omega(z,w) = \inf_{\gamma \in \Gamma(z,w)} L_K(\gamma).$$

Dimostrazione. Vedere [Kra1]. □

Il senso di queste forme infinitesime è chiaro se uno richiama la dimostrazione del Teorema di Riemann sugli aperti semplicemente connessi di $\mathbb{C}$: nella ricerca di un biolomorfismo fra il disco D e un dominio Ω opportuno, un argomento opportuno con le famiglie normali di funzioni $\varphi : D \to \Omega$ ci mostra che esiste φ^* che massimizza la derivata in 0.
Ma ciò equivale a prendere l'infimum che realizza F_K o il supremum che realizza F_C.

3.3 Conservazione delle metriche e delle forme infinitesime

Mostriamo ora che le metriche di Caratheodory e Kobayashi soddisfano delle **distance decreasing properties** rispetto ai morfismi olomorfi fra domini (in analogia a quanto accade con la metrica di Bergman sul disco). Vedremo poi un'interessante caratterizzazione di queste due metriche come estremi rispetto a disuguaglianze relative alla metrica di Bergman.
(Scriveremo il differenziale di una funzione in un punto come $f_*(z)$ per avere tutto in forma più compatta).

Proposizione 6. *Siano Ω_1 e Ω_2 domini di $\mathbb{C}^n$. Sia $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una mappa olomorfa. Allora, per ogni $z, w \in \Omega_1$ e per ogni $\xi \in \mathbb{C}^n$:*

1) $F_C^{\Omega_2}(f(z), f_*(z) \cdot \xi) \leq F_C^{\Omega_1}(z,\xi)$;

2) $C_{\Omega_2}(f(z), f(w)) \leq C_{\Omega_1}(z,w)$;

3) $F_K^{\Omega_2}(f(z), f_*(z)\cdot\xi) \leq F_K^{\Omega_1}(z,\xi)$;

4) $K_{\Omega_2}(f(z), f(w)) \leq K_{\Omega_1}(z,w)$.

Dimostrazione. Le dimostrazioni sfruttano la funtorialità degli operatori differenziali e le definizioni date in precedenza.

1) Si ha

$$\begin{aligned} F_C^{\Omega_2}(f(z), f_*(z)\cdot\xi) &= \sup_{\substack{g\in B(\Omega_2)\\ g(f(z))=0}} |g_*(f(z))\cdot f_*(z)\cdot\xi| = \sup_{\substack{g\in B(\Omega_2)\\ g(f(z))=0}} |(g\circ f)_*(z)\cdot\xi| \\ &\leq \sup_{\substack{h\in B(\Omega_1)\\ h(z)=0}} |h_*(z)\xi| = F_C^{\Omega_1}(z,\xi). \end{aligned}$$

2) Si ha

$$\begin{aligned} C_{\Omega_2}(f(z), f(w)) &= \sup_{g\in B(\Omega_2)} \rho_B(g(f(z)), g(f(w))) \\ &\leq \sup_{g\in B(\Omega_2)} \rho_B(h(z), h(w)) = C_{\Omega_1}(z,w). \end{aligned}$$

3) Si ha

$$\begin{aligned} &F_K^{\Omega_2}(f(z), f_*(z)\cdot\xi) \\ &= \inf\left\{\alpha := \frac{|f_*(z)\cdot\xi|}{|h'(0)(e_1)|} : h\in\Omega_2(B), \text{denom. multiplo costante di } f_*(z)\cdot\xi\right\} \\ &\leq \inf\left\{\alpha := \frac{|f_*(z)\cdot\xi|}{|(f\circ g)'(0)(e_1)|} : g\in\Omega_1(B), \text{denom. multiplo costante di } f_*(z)\cdot\xi\right\} \\ &\leq \inf\left\{\alpha := \frac{|\xi|}{|g'(0)(e_1)|} : g\in\Omega_1(B),\ \text{denom. multiplo costante di } \xi\right\} = F_K^{\Omega_1}(z,\xi). \end{aligned}$$

4) Poiché si ha l'inclusione

$$\{\gamma : [0,1]\to\Omega_2 \colon \gamma(t) = f(\tilde\gamma(t)), \tilde\gamma : [0,1]\to\Omega_1\} \subseteq \Gamma(f(z), f(w))$$

applicando gli inf si ottiene la disuguaglianza nel verso opposto e dunque la tesi.

□

Corollario 2. *Siano Ω_1 e Ω_2 due domini in $\mathbb{C}^n$.*

1) *Se $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ è un biolomorfismo, allora f è un'isometria nelle metriche di Caratheodory e di Kobayashi.*

2) *Se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ allora per ogni $z, w \in \Omega_1$ e per ogni $w \in \mathbb{C}^n$ si ha*

$$F_C^{\Omega_1}(z,\xi) \geq F_C^{\Omega_2}(z,\xi)$$

$$C_{\Omega_1}(z,w) \geq C_{\Omega_2}(z,w)$$
$$F_K^{\Omega_1}(z,\xi) \geq F_K^{\Omega_2}(z,\xi)$$
$$K_{\Omega_1}(z,w) \geq K_{\Omega_2}(z,w).$$

3) *Sia $B(0,1)$ la palla unitaria in $\mathbb{C}^n$ e $D_1 := \{(\zeta, 0, \ldots, 0) \in B)\} \subset B$. Allora per ogni $z \in D_1$ e per ogni $\xi \in \mathbb{C}^n$ si ha*

$$F_C^B(z,\xi) = F_C^{D_1}(z,\xi)$$

$$F_K^B(z,\xi) = F_K^{D_1}(z,\xi).$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni di 1) e 2) sono immediate dalla Proposizione 6. Per quanto riguarda 3), le disuguaglianze $\leq$ seguono subito dal punto 2), mentre le disuguaglianze $\geq$ vengono dall'applicazione della Proposizione 6 alla mappa $\pi : B \to D_1$ che manda $(z_1, \ldots, z_n) \to (z_1, 0, \ldots, 0)$. □

3.4 Proprietà estremali delle metriche

Come ultimo risultato di questo capitolo mostriamo che la metrica di Caratheodory è la "più piccola" metrica che soddisfa certe proprietà, mentre la metrica di Kobayashi è la "più grande" che soddisfa proprietà analoghe.

Proposizione 7. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sia d una pseudo-metrica su Ω tale che per ogni $f \in \Omega(B)$ e per ogni $z, w \in B$ si abbia $d(f(z), f(w)) \leq \rho_B(z,w)$. Allora $d(z,w) \leq K_\Omega(z,w)$.*

Dimostrazione. Fissati z e w in Ω, sia $p_0, \ldots, p_k$ una collezione ammissibile di punti per $\{z, w\}$ (come enunciato nella definizione 12) e siano $f_1, \ldots, f_k \in \Omega(B)$ e

$u_1^1, \dots, u_k^1, u_1^2, \dots, u_k^2 \in B$ le funzioni e i punti come da definizione. Allora

$$\begin{aligned} d(z,w) &\leq \sum_{j=1}^{k} d(p_{j-1}, p_j) = \sum_{j=1}^{k} d(f(u_j^1), f(u_j^2)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} \rho_B(u_j^1, u_j^2) \end{aligned}$$

e prendendo l'inf su tutte le famiglie ammissibili di punti per $\{z, w\}$ otteniamo la disuguaglianza voluta. $\square$

Proposizione 8. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sia d una pseudo-metrica su Ω tale che per ogni $f \in B(\Omega)$ e per ogni $z, w \in B$ si abbia $d(z,w) \geq \rho_B(f(z), f(w))$.*
Allora $d(z,w) \geq C_\Omega(z,w)$.

Dimostrazione. Il claim è prontamente verificato ricordandosi che

$$C_\Omega(z,w) = \sup_{f \in B(\Omega)} \rho_B(f(z), f(w)).$$

$\square$

Le due proposizioni precedenti ci suggeriscono che possiamo trovare una disuguaglianza che leghi tra loro C_Ω e K_Ω: tuttavia ciò non è così facile da dimostrare, almeno in dimensioni superiori a 1.
Nel caso $n = 1$ ci aiuta un risultato conseguenza del corollario 1:

Teorema 3. *Se $D \subset \mathbb{C}$ è il disco unitario, allora per ogni z e w in D vale*

$$K_D(z,w) = \rho_D(z,w) = C_D(z,w).$$

Dimostrazione. Dalle due proposizioni precedenti e dalla distance decreasing property mostrata nel corollario 1 si ha

$$K_D(z,w) \geq \rho_D(z,w) \geq C_D(z,w).$$

Ma le definizioni stesse delle metriche di Kobayashi e di Caratheodory implicano che (sul disco D) valgono anche

$$K_D(z,w) \leq \rho_D(z,w) \leq C_D(z,w)$$

e dunque l'uguaglianza voluta. $\square$

Nel caso $n \geq 2$ viene in nostro soccorso una generalizzazione molto gradita:

Teorema 4 (Lempert)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio fortemente convesso e limitato. Allora la metrica di Caratheodory C_Ω, la metrica di Kobayashi K_Ω e la metrica di Bergman ρ_Ω coincidono su Ω.*
Inoltre anche le forme infinitesime di Caratheodory e di Kobayashi coincidono su Ω.

Dimostrazione. Tutti i dettagli (insieme ad altri risultati interessanti) sono contenuti in [Lem]. Il risultato si applica in particolar modo alla palla $B(0,1)$. $\square$

Osservazione 6. Ricordiamo che un dominio limitato Ω è **fortemente convesso** se ha bordo C^2 e l'Hessiano di una sua funzione definente è definito positivo.

Entrambi i teoremi implicano immediatamente il seguente:

Corollario 3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Allora $C_\Omega(z,w) \leq K_\Omega(z,w)$.*

Dimostrazione. Utilizzando il Teorema di Lempert appena enunciato, che afferma che $C_B = \rho_B$, si ha per ogni $f \in \Omega(B)$ e per ogni $z, w \in B$

$$C_\Omega(f(z), f(w)) \leq C_B(z,w) = \rho_B(z,w)$$

per cui C_Ω soddisfa le ipotesi della proposizione 7 e dunque $C_\Omega \leq K_\Omega$. $\square$

Osservazione 7. Una conseguenza interessante del Teorema 4 è che le topologie indotte dalle metriche di Caratheodory e Kobayashi coincidono con la topologia euclidea dei domini Ω che soddisfano le ipotesi del teorema. In particolare gli insiemi compatti sono gli stessi.
Inoltre la disuguaglianza del precedente Corollario ci garantisce che la metrica di Caratheodory assume sempre valori finiti.

4 Lemma di Schwarz generalizzato

4.1 Famiglie normali

Definizione 14. Siano M e N due varietà complesse e sia $C(M,N) := \{f : M \to N\colon f \text{ continua }\}$. La **topologia compatta-aperta su** $C(M,N)$ è generata dalle intersezioni finite degli insiemi $B(K,U) := \{f \in C(M,N)\colon f(K) \subseteq U\}$ dove $K \subset\subset M$ e $U \subseteq N$ è aperto.

Definizione 15. Siano $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}^m$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ domini. Una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega_1, \Omega_2)$ è detta **normale** se ogni successione di funzioni in $\mathcal{F}$ contiene una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti (la sottosuccessione è detta **normalmente convergente**) oppure una sottosuccessione $\{f_j\}$ tale che per ogni $K_1 \subset\subset \Omega_1$ e $K_2 \subset\subset \Omega_2$ si abbia definitivamente $f_j(K_1) \cap K_2 = \emptyset$ (la sottosuccessione è detta **compattamente divergente**.)

Osservazione 8. L'insieme $N(M)$ delle funzioni olomorfe da M verso N è un chiuso in $C(M, N)$ con la topologia compatta-aperta; questa è una conseguenza della formula integrale di Cauchy, che implica che le successioni di funzioni olomorfe normalmente convergenti convergano a funzioni olomorfe.
Pertanto un sottinsieme $\mathcal{F} \subseteq N(M)$ è compatto o chiuso in $N(M)$ se e soltanto se lo è in $C(M, N)$.

Definizione 16. Siano M e N spazi metrici connessi e localmente compatti e sia d_N la metrica su N.
Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq C(M, N)$ è **equicontinua** se $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall m \in M$ esiste un intorno U di m tale che $d_N(f(m), f(m')) < \varepsilon \ \forall m' \in U$ e $\forall f \in \mathcal{F}$.

I seguenti teoremi presentano dei criteri utili per riconoscere famiglie normali o compatte di funzioni continue o olomorfe.

Teorema 5. *Sia $\mathcal{F} \subseteq C(M, N)$ dove M e N sono metrici topologici connessi e localmente compatti. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia equicontinua e ogni sottoinsieme limitato di N ha chiusura compatta, allora $\mathcal{F}$ è normale.*

Teorema 6 (Ascoli)**.** *Nelle ipotesi del teorema precedente, la famiglia $\mathcal{F} \subseteq C(M, N)$ è compatta se e soltanto se:*

a) $\mathcal{F}$ è chiuso in $C(M, N)$;

b) $\mathcal{F}(m) := \{f(m) : f \in \mathcal{F}\}$ ha chiusura compatta in N per ogni $m \in M$;

c) $\mathcal{F}$ è equicontinua.

Dimostrazione. Il primo teorema è un caso particolare di uno statement molto più generale. Le dimostrazioni di entrambi i teoremi si possono trovare in [Wu]. □

Proposizione 9. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto per cui C_Ω sia una distanza. Siano $w \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{C}^n$. Allora esiste $f \in B(\Omega)$ tale che $F_C^\Omega(w, \xi) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(w)\xi\right|$.*

Dimostrazione. Sia $\{f_j\}$ una successione in $B(\Omega)$ tale che $\left|\frac{\partial f_j}{\partial z}(w)\xi\right|$ converga a $F_C^\Omega(w,\xi)$. Possiamo supporre (a meno di comporre le funzioni f_j con delle rotazioni unitarie) che

$$\frac{\partial f_j}{\partial z}(w)\xi = (\lambda_j \xi_1, 0, \ldots, 0)$$

con $\lambda_j > 0$.
Sia $\pi_1 : B \to D$ la proiezione sulla prima coordinata. La famiglia $\{\pi_1 \circ f_j\}$ è normale (è sufficiente verificare l'equicontinuità: ma questa è conseguenza della distance decreasing property della metrica di Caratheodory). Poichè $\pi_1 \circ f_j(w) = 0$ per ogni j (segue dalla definizione di forma infinitesima di Caratheodory) esiste una sottosuccessione $\{\pi_1 \circ f_{kj}\}$ che converge normalmente a una funzione olomorfa $\tilde{f} \in D(\Omega)$.
Sia infine $f(z) := (\tilde{f}(z), 0, \ldots, 0)$ una funzione olomorfa in $D(\Omega)$. Sfruttando il fatto che le derivate delle funzioni $\pi_1 \circ f_{kj}$ convergono normalmente alla derivata di $\tilde{f}$ e usando il punto 3) del corollario 2, arriviamo a mostrare che f è proprio la funzione che realizza la forma infinitesima. (QUALCOSA NON VA ALLA FINE) □

Osservazione 9. Per quanto riguarda la metrica di Kobayashi non è possibile, in generale, trovare una $f \in \Omega(B)$ che realizzi l'infimum della definizione di forma infinitesima.

4.2 Teorema e dimostrazione

Enunciamo un teorema che generalizza il classico lemma di Schwarz al caso di domini limitati in $\mathbb{C}^n$.

Teorema 7 (Caratheodory-Cartan-Kaup-Wu)**.** *: Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato. Siano $P \in \Omega$ e $f \in \Omega(\Omega)$ tali che $f(P) = P$. Definiamo infine $f' := J_{\mathbb{C}} f(P)$. Allora:*

1) Gli autovalori di f' hanno modulo ≤ 1.

2) $|\det f'| \leq 1$.

3) Se $f' = id$ allora $f = id$.

4) Se $|\det f'| = 1$ allora $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo d'ora in poi il dominio Ω con la metrica di Caratheodory (e tutte le bolle e le distanze saranno assunte rispetto a questa metrica).
Sia $r > 0$ tale che $\overline{B(P,r)} \subset \Omega$. Consideriamo la famiglia di funzioni $\mathcal{F}_r := \{g \in$

$B(P,r)(B(P,r))\colon g(P)=P\}$. Allora questa famiglia soddisfa le condizioni del teorema 5 e dunque è normale (l'equicontinuità è garantita dall'uso della metrica di Caratheodory). In più $\mathcal{F}_r$ è compatta in quanto soddisfa le ipotesi del teorema 6.
Sia ora f come nelle ipotesi.

1) Supponiamo che un autovalore λ di $f^{'}$ sia tale che $|\lambda| > 1$. Consideriamo allora la successione $\{f^k\} \subset \mathcal{F}_r$ dove $f^k := f^{k-1} \circ f$. Si ha $(f^k)^{'} = (f^{'})^k$ e questo jacobiano ha λ^k come autovalore.
   Per la normalità di $\mathcal{F}_r$ esiste una sottosuccessione $\{f^{k_j}\}$ convergente sui compatti e questo implica che la successione λ^{k_j} converge per k_j tendente a più infinito. Ma ciò è assurdo in quanto $\lambda > 1$.

2) Segue immediatamente dal punto 1).

3) Supponiamo $f \neq id$: sia D un differenziale monomiale di ordine ≥ 2. Allora $Df \neq 0$: stiamo sfruttando il fatto che non è costante, poiché $f^{'} = id$.
   Da quest'ultima ipotesi ricaviamo l'identità $D(f^k) = kDf$ (dove numerose semplificazioni sono dovute all'ipotesi $f^{'} = id$); ma la mappa da $B(P,r)(B(P,r))$ in sè stesso data dal differenziale D è continua e ci accorgiamo dunque che l'identità appena trovata viola la compattezza di $\mathcal{F}_r$.

4) Se $|\det f^{'}| = 1$, da 1) segue che ogni autovalore ha modulo 1.
   Come prima cosa mostriamo che $f^{'}$ è **diagonalizzabile**: se così non fosse esisterebbe un autovalore λ tale che la forma canonica di Jordan abbia un blocco
   $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \dots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$
   Allora la matrice $(f^k)^{'}$ ha un blocco analogo della forma
   $$\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \\ & & \dots & k\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$
   e se k tende a $+\infty$ di nuovo stiamo violando la compattezza di $\mathcal{F}_r$.
   Sempre grazie alla compattezza, possiamo garantire che esista una sottosuccessione $\{f^{k_j}\}$ che converga uniformemente sui compatti a una funzione

$\tilde{f} \in B(P,r)(B(P,r))$ e tale che $(f^{k_j})'$ converga a $\tilde{f}'$, che necessariamente è la matrice identica (ogni autovalore deve essere una radice finita dell'unità, altrimenti non troveremmo alcuna sottosuccessione convergente).
Dal punto 3) possiamo garantire che $\tilde{f}_{|B(P,r)} = id$.
Definiamo W come il più grande aperto di Ω tale che $\{f^k\}$ ha una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti all'identità. W è non vuoto, in quanto contiene $B(P,r)$, ed esiste grazie al lemma di Zorn. A meno di un cambio di indici possiamo supporre che $f^{k_j} \to id$ su W. Si mostra che W è chiuso, da cui $\Omega = W$ per la connessione di Ω (guardare [Kra1] per i dettagli).
A questo punto abbiamo che $f^{k_j} \to id$ su Ω; argomenti simili ai precedenti garantiscono che la famiglia delle funzioni distance decreasing rispetto alla metrica di Caratheodory su Ω e che fissano P è compatta nella topologia compatta-aperta: pertanto esiste una sottosuccessione di $\{f^{k_j-1}\}$ che converge uniformemente sui compatti in Ω a una funzione $g \in \Omega(\Omega)$. Si ha infine

$$f \circ g = f \circ (\lim_{i \to +\infty} f^{k_{ji}-1}) = \lim_{i \to +\infty} f^{k_{ji}} = id$$

$$g \circ f = (\lim_{i \to +\infty} f^{k_{ji}-1}) f \circ = \lim_{i \to +\infty} f^{k_{ji}} = id$$

e dunque $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

□

5 Criteri di biolomorfia con la bolla

5.1 Risultati e corollari

Definizione 17. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. **La forma di volume di Caratheodory** é definita come

$$M_\Omega^C(z) := \sup\{|\det f'(z)| \colon f \in B(\Omega), f(z) = 0\}.$$

La forma di volume di Kobayashi-Eisenmann é definita come

$$M_\Omega^K(z) := \inf \left\{ \frac{1}{|\det f'(z)|} \colon f \in \Omega(B), f(0) = z \right\}.$$

Osservazione 10. Le f' sono sempre da intendersi come Jacobiani.
Inoltre è facile verificare (teorema dei diffeomorfismi) la seguente proprietà: se $f \in \mathrm{Aut}\,\Omega$ allora

$$M_\Omega^C(f(z)) = M_\Omega^C(z) |\det J_{\mathbb{C}} f(z)|^{-1}$$

$$M_\Omega^K(f(z)) = M_\Omega^K(z)|\det J_{\mathbb{C}} f(z)|^{-1}.$$

Proposizione 10 (Bun Wong)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato. Supponiamo esista $P \in \Omega$ tale che $M_\Omega^C(P) = M_\Omega^K(P)$. Allora Ω é biolomorfo alla palla B in $\mathbb{C}^n$.*

Dimostrazione. Esiste $g \in B(\Omega)$ tale che $M_\Omega^C(P) = |\det g^{'}(P)|$. Non possiamo in generale garantire l'esistenza di una $h \in \Omega(B)$ per realizzare la forma di volume di Kobayashi, ma sicuramente esiste una successione $\{h_j\}$ in $\Omega(B)$ tale che $|\det h_j^{'}(P)|^{-1} \to M_\Omega^K(P)$.
Consideriamo allora la successione di funzioni $G_j := g \circ h_j$ in $B(B)$. Poichè siamo sulla bolla e $G_j(0) = 0$, dal teorema 4 e dal teorema 5 possiamo garantire l'esistenza di una sottosuccessione G_{jk} normalmente convergente a $G \in B(B)$. Inoltre, l'ipotesi sulle forme di volume implica che $|\det G^{'}(0)| = 1$ e dunque $G \in \mathrm{Aut}(B)$: in particolare G è suriettivo e lo è anche g di conseguenza.
Ora, consideriamo la successione di funzioni $H_j := h_j \circ g$ in $\Omega(\Omega)$. Vorremmo, come prima, estrarre una sottosuccessione normalmente convergente, ma ciò non è immediatamente garantito. Quello che possiamo fare è retringerci a una palla $B(P, r)$ nella metrica di Caratheodory e (ragionando come nella dimostrazione del lemma di Schwartz) estrarre una sottosuccessione $\{H_{jk}\}$ che converga a una funzione $H \in B(P, r)(B(P, r))$: come prima le forme di volume ci garantiscono che gli Jacobiani convergono all'identità, per cui $H^{'} \equiv id$ su $B(P, r)$.
Sfruttando la connessione di Ω possiamo garantire l'esistenza di una sottosuccessione $\{H_{jkl}\}$ che converga normalmente a $\tilde{H} \in \Omega(\Omega)$: si ha $\tilde{H}^{'}(P) \equiv id$ e dunque $\tilde{H} \equiv id$ su ω. Di conseguenza $h_{jkl} \circ g$ converge normalmente all'identità su Ω e g è iniettivo.
Concludiamo notando che $g \in B(\Omega)$ è ora sia iniettivo che suriettivo, ed essendo olomorfa è automaticamente un biolomorfismo (invertibilità locale). □

Enunciamo ora il teorema principale di quest'ultima sezione (la cui dimostrazione sará svolta nella parte finale di questo scritto) e due corollari che sono immediata conseguenza.

Teorema 8. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato C^2 e sia $P \in \partial\Omega$ un punto di forte pseudoconvessitá. Siano $K \subset\subset \Omega$, $\{z_k\} \subset K$ e $\{f_k\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ tali che $f_k(z_k) \to P$. Allora Ω é biolomorfo alla palla B in $\mathbb{C}^n$.*

Osservazione 11. Questo risultato ricorda una cosa vista nel corso SISTEMA.

Corollario 4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato C^2 con gruppo di automorfismi transitivo. Allora Ω é biolomorfo alla palla B in $\mathbb{C}^n$.*

Dimostrazione. Sia $P \in \partial\Omega$ il punto del bordo piú lontano da Ω: grazie a questa caratterizzazione P é un punto di forte convessitá, e dunque di forte pseudoconvessitá.
Siano $K = \{z_0\} \subset \Omega$ e $\{w_j\} \subset \Omega$ successione convergente a P. Per l'ipotesi di transitivitá esiste per ogni j un automorfismo $f_j \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ tale che $f_j(z_0) = w_j \to P$. Abbiamo dunque che le ipotesi del teorema 8 sono rispettate, da cui la tesi. $\square$

Corollario 5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un insieme fortemente pseudoconvesso con gruppo degli automorfismi non compatto (nella topologia compatta-aperta di $C(\Omega, \Omega)$). Allora Ω é biolomorfo alla palla B in $\mathbb{C}^n$.*

Dimostrazione. Consideriamo K e L insiemi contenuti compattamente in Ω. Allora la famiglia di funzioni

$$\mathcal{F}(K, L) := \{f \in \mathrm{Aut}(\Omega) \colon f(K) \subseteq L\}$$

é compatta nella topologia compatta-aperta (solito ragionamento con la metrica di Caratheodory). Ma essendo $\mathrm{Aut}(\Omega)$ non compatto, possiamo garantire per ogni $P \in \partial\Omega$ l'esistenza di un punto $z_0 \in \Omega$ e di una successione $\{f_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ tali che $f_j(z_0) \to P$. La tesi segue in quanto sono soddisfatte le ipotesi del teorema 8. $\square$

5.2 Dimostrazione

La dimostrazione si articola in vari passi, ognuno dei quali consiste in un lemma abbastanza tecnico (al momento non ho voglia di dimostrarli: guardare [Kra1] per maggiori dettagli).

Lemma 3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un aperto limitato. Sia $P \in \partial\Omega$ un punto di forte presudoconvessitá e sia $A > 0$.
Allora per ogni $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $z \in \Omega$ che soddisfi $|z - P| < \delta$ e per ogni $f \in \Omega(B)$ tale che $f(0) = z$, si abbia $|f(w) - P| < A$ per ogni $|w| < 1 - \eta$.*

Lemma 4. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto e limitato, $P \in \partial\Omega$ un punto di forte pseudoconvessitá, $\{z_j\} \subset \Omega$ convergente a P e $A > 0$. Allora*

$$\frac{M_\Omega^K(z_j)}{M_{\Omega \cap B(P,A)}^K(z_j)} \to 1$$

per $j \to \infty$.

Lemma 5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ aperto e limitato, $P \in \partial\Omega$ un punto di forte pseudoconvessitá e $A > 0$.*
Siano $z_0 \in \Omega$ e $\{\phi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ tali che $\phi_j(z_0) \to P$. Allora

$$\frac{M^K_\Omega(\phi_j(z_0))}{M^K_{\Omega\cap B(P,A)}(\phi_j(z_0))} \to 1$$

per $j \to \infty$.

Lemma 6. *Sia Q una forma quadratica definita positiva su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Definiamo $D_Q := \{w \in \mathbb{C}^n : 2\,\mathrm{Re}\, w_1 < -Q(w,w)\}$.*
Allora D_Q é biolomorfo alla palla in $\mathbb{C}^n$.

Corollario 6. *Se D_Q definito come prima e $P \in D_Q$, allora $M^C_{D_Q}(P) = M^K_{D_Q}(P)$.*

Mostriamo ora la dimostrazione del teorema 8:
Attraverso un argomento di compattezza (QUALE?) possiamo mostrare che esistono $a \in \Omega$ e $f_k \in \mathrm{Aut}\,\Omega$ tali che $w_k := f_k(a) \to P$. Scegliamo un intorno U di P in $\mathbb{C}^n$ tale che ogni punto in $U \cap \partial\Omega$ sia fortemente pseudoconvesso. Se U è sufficientemente piccolo, si può scegliere una successione di punti $\zeta_k \in \partial\Omega$ tali che, applicando al punto k-esimo un opportuno cambio di coordinate, il bordo abbia funzione definente

$$\rho_k(w) = 2\,\mathrm{Re}\, w_1 + \mathcal{L}_{\zeta_k}(w) + o(|w|^2)$$

(dove $\mathcal{L}_{\zeta_k}$ è la forma di Levi centrata in ζ_k) e $w_k = (a_k, 0, \ldots, 0)$ con $a_k < 0$ (questo risultato si può raggiungere tramite il **Lemma di Narashima**: vedi [Kra1] per maggiori dettagli).
Dati k e $\varepsilon > 0$ consideriamo i due ellissoidi

$$E^+_\varepsilon(\zeta_k) := \{2\,\mathrm{Re}\, z_1 < -\mathcal{L}_{\zeta_k}(z) + \varepsilon|z|^2\}$$

$$E^-_\varepsilon(\zeta_k) := \{2\,\mathrm{Re}\, z_1 < -\mathcal{L}_{\zeta_k}(z) - \varepsilon|z|^2\}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $A > r > 0$ tali che per k sufficientemente grande (ovvero per w_k sufficientemente vicino a P) si abbia

$$E^-_\varepsilon(\zeta_k) \cap B(\zeta_k, r) \subseteq \Omega \cap B(\zeta_k, A) \subseteq E^+_\varepsilon.$$

Osserviamo che r ed A dipendono da ε nella loro definizione, ma grazie all'uniforme continuità su U delle derivate seconde della funzione definente, non dipendono da

ζ_k.
Ci interessa ora calcolare il rapporto

$$\frac{M_\Omega^K(a)}{M_\Omega^C(a)} = \frac{M_\Omega^K(w_k)}{M_\Omega^C(w_k)}$$

Dal Lemma di Schwarz Generalizzato possiamo concludere immediatamente che questo rapporto è ≥ 1.
Per avere una disuguaglianza nel verso opposto applichiamo il Lemma 4 e il Lemma 5 (insieme al Corollario 2) per ottenere

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty} \frac{M^K_{\Omega\cap B(\zeta_k,r)}(w_k)}{M^C_{\Omega\cap B(\zeta_k,A)}(w_k)} &\leq \limsup_{k\to+\infty} \frac{M^K_{E^-(\zeta_k)\cap B(P,r/2)}(w_k)}{M^C_{E^+(\zeta_k)}(w_k)} \\ &= \limsup_{k\to+\infty} \frac{M^K_{E^-(\zeta_k)}(w_k)}{M^C_{E^+(\zeta_k)}(w_k)}.\end{aligned}$$

Osserviamo che nella disuguaglianza precedente abbiamo ripetutamente usato il fatto che, per k sufficientemente grande, ponendo $\tilde{r} := r/2$ si ha che $B(\zeta_k, \tilde{r}) \subseteq B(P, 2\tilde{r}) \subseteq B(\zeta, 3\tilde{r})$.
Ora siano

$$\Phi^-_{\varepsilon,k} : E^-_\varepsilon(\zeta_k) \to B \quad \text{e} \quad \Phi^+_{\varepsilon,k} : E^+_\varepsilon(\zeta_k) \to B$$

biolomorfismi fra la bolla unitaria e i due ellissoidi (della forma di quelli necessari a dimostrare il Lemma 6). Allora sia $\det J_\mathbb{C}\Phi^-_{\varepsilon,k}(w_k)$ che $\det J_\mathbb{C}\Phi^+_{\varepsilon,k}(w_k)$ dipendono in modo continuo da ε per $\varepsilon \to 0^+$. Inoltre il loro rapporto può essere portato arbitrariamente vicino a 1 per ε sufficientemente piccolo e uniformemente in k.
Infine, poichè $w_k = (a_k, 0, \ldots, 0)$ otteniamo

$$\Phi^-_{\varepsilon,k}(w_k) = (a_k(a_{11} + \varepsilon) + 1, 0, \ldots, 0)$$

$$\Phi^+_{\varepsilon,k}(w_k) = (a_k(a_{11} - \varepsilon) + 1, 0, \ldots, 0)$$

e il rapporto che volevamo è uguale a

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{M^K_B(a_k(a_{11}+\varepsilon)+1, 0, \ldots, 0) \det J_\mathbb{C}\Phi^-_{\varepsilon,k}(w_k)}{M^C_B(a_k(a_{11}+\varepsilon)+1, 0, \ldots, 0) \det J_\mathbb{C}\Phi^+_{\varepsilon,k}(w_k)} =$$
$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{M^K_B(a_k+1, 0, \ldots, 0) \cdot \mathcal{J}^+ \det J_\mathbb{C}\Phi^-_{\varepsilon,k}(w_k)}{M^C_B(a_k+1, 0, \ldots, 0) \cdot \mathcal{J}^- \det J_\mathbb{C}\Phi^+_{\varepsilon,k}(w_k)}$$

dove $\mathcal{J}^+$ e $\mathcal{J}^-$ sono i determinant degli Jacobiani degli automorfismi di B che mandano rispettivamente $(a_k(a_{11}+\varepsilon)+1,0,\dots,0)$ e $(a_k(a_{11}-\varepsilon)+1,0,\dots,0)$ in $(a_k+1,0,\dots,0)$.
L'ultima riga tende a 1 per ε tendente a 0, e otteniamo dunque $M^C_\Omega(a) = M^K_\Omega(a)$.
Il biolomorfismo tra Ω e B segue direttamente dal risultato 10.

Riferimenti bibliografici

[Kob1] Kobayashi S., *Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings*, J. Math. Soc. Japan Volume 19, Number 4 (1967), 460-480.

[Kob2] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*, Vols. I and II, Interscience, New York, 1963, 1969.

[Kra1] Krantz S. G., *Function Theory Of Several Complex Variables*, Wadsworth & Brooks, Cole Mathematics Series (2001).

[Kra2] Krantz S. G., *Geometric Analysis Of The Bergman Kernel And Metric*, Springer, Graduate Texts In Mathematics (2013).

[Lem] Lempert L., *La Mètrique De Kobayashi Et La Reprèsentation Des Domains Sur La Boule*, Bulletin de la S.M.F., tome 109 (1981), 427-484.

[Pel] Peloso M., *Classical Spaces of Holomorphic Functions*, note disponibili su `http://users.mat.unimi.it/users/peloso/`.

[Ses] Seshadri H., Verma K., *On Isometries Of The Caratheodry And Kobayashi Metric On Strongly Pseudoconvex Domains*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 5 (3):393-417 (2006).

[Wu] Wu H., *Normal Families Of Holomorphic Mappings*, Acta Mathematica 119 (1967), 193-233.