CURRICULUM VITAE E STUDIORUM,
ATTIVITÀ SCIENTIFICA E DIDATTICA

LOURENÇO BEIRÃO DA VEIGA

Nome: Lourenço
Cognome: Beirão da Veiga
Luogo di nascita: Lisbona
Data di nascita: 04/02/1976
Cittadinanza: Italiana, Portoghese
Codice fiscale: BRDLNC76BO4Z128F
Telefono: +39-02-50316081
Fax: +39-02-50316090
E-mail: lourenco.beirao@unimi.it

CURRICULUM STUDIORUM

PERCORSO SCOLASTICO

• Diplomato nel 1996 presso il liceo scientifico "U.Dini" di Pisa con la votazione di **60/60**.

• Iscrittosi nell'anno accademico 1996/1997 al corso di Laurea in Matematica presso l'Università degli studi di Pisa.

• Trasferitosi nell'anno accademico 1999/2000 all'Università di Pavia (stesso corso di Laurea).

• Vincitore di un posto di alunno presso il Collegio Borromeo nell'anno accademico 1999/2000, posto confermato fino al conseguimento della Laurea.

• Laureato in Matematica il 15/03/2000 presso l'Università degli Studi di Pavia con votazione di **110/110 e lode**, con una tesi dal titolo *Equazioni linearizzate dei gusci e loro comportamento asintotico*, relatori Prof. Franco Brezzi e Prof. Gianni Arrigo Pozzi.

• Ottenuto il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica in Portogallo nel Maggio 2004 (Dipartimento di Matematica dell'Instituto Superior Tecnico di Lisbona), con una tesi dal titolo *Theoretical and Numerical Analysis of some Problems in Structural Mechanics*. Supervisori di Dottorato : Prof. Adelia Sequeira (Instituto Superior Tecnico, Lisbona) e Prof. Franco Brezzi (IMATI-CNR di Pavia).

• Ottenuto il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica in Italia il 28 Febbraio 2005 (Dottorato di Ricerca in Matematica e Calcolo Scientifico (ciclo XVI) presso l'Università degli Studi di Pavia - Dip.di Matematica), con una tesi dal titolo *Theoretical and Numerical Analysis of some Thin Structures and Nonlinear Elasticity Problems*. Supervisore di Dottorato : Prof. Franco Brezzi.

• Dal 03 Gennaio 2005 al 31 Ottobre 2010 **ricercatore in MAT08** (Analisi Numerica) presso il Dipartimento di Matematica F.Enriques, Via Saldini 50, Milano.

PREMI E RICONOSCIMENTI

• Vincitore del **Premio Cariplo** per i migliori laureati dell'anno 2000 della Università degli Studi di Pavia.

• Vincitore del Premio **Proff. Silvio Cinquini e Maria Cibrario Cinquini** per le migliori tesi di Laurea in Matematica dell'Università degli Studi di Pavia.

• Vincitore nell'anno 2000 di una **borsa di Dottorato di Ricerca in Matematica e Calcolo Scientifico** presso l'Università degli Studi di Pavia, ciclo XVI, della durata di quattro anni.

• Vincitore di un **posto di ricercatore in Analisi Numerica (MAT08)** presso il Dipartimento di Matematica di Milano "Federigo Enriquez", concorso tenutosi a Febbraio 2004.

• Vincitore del **premio SIMAI 2005 per Tesi di Dottorato** con la tesi *Theoretical and Numerical Analysis of some Thin Structures and Nonlinear Elasticity Problems.*

• Vincitore, con la tesi *Theoretical and Numerical Analysis of some Problems in Structural Mechanics*, del **premio per la migliore tesi di Dottorato in Meccanica Applicata e Computazionale in Portogallo per l'anno 2004**. Premio conferito dall APMTAC (Assoçiaçao Portuguesa de Mecânica Teórica, Aplicada e Computacional) ; la tesi è stata di conseguenza selezionata come rappresentante portoghese per il premio ECCOMAS Europeo *Award for the Best Ph.Thesis of 2004 on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.*

• Invito per un **seminario esteso da 30 minuti** al congresso XVIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, 24-29 Settembre 2007, Bari.

• Vincitore, come leader del gruppo locale di Milano, di un fondo FIRB - Futuro in Ricerca, codice RBFR08CZ0S (referente nazionale G. Sangalli), durata 4 anni a partire da dicembre 2010

ATTUALMENTE

Dal 1 Novembre 2010 **Professore Associato in MAT08** (Analisi Numerica) presso il Dipartimento di Matematica F.Enriques, Via Saldini 50, Milano.

COMUNICAZIONI E SEMINARI SU INVITO
(con partecipazione all'eventuale convegno annesso)

• Seminario *Energy behavior of two classical benchmark shells*, ciclo di seminari **Matematica Aplicada e Analise Numerica**, Istituto Superiore Tecnico di Lisbona, 10 aprile 2003.

• Seminario *Intermediate states in Koiter shells : energy behavior of two intermediate benchmarks*, **Helsinky University of Technology**, 29 marzo 2004.

• Comunicazione *Studio di stabilità di elementi finiti in elasticità nonlineare* il 22 giugno durante il **convegno GIMC2004**, Genova, 21-23 giugno 2004.

• Comunicazione *Enhanced strain methods for elasticity problems* il 26 luglio durante il **convegno ECCOMAS2004**, Jyväskylä, Finlandia, 24-28 luglio 2004.

• Seminario *Exponential methods for von Mises plasticity with linear hardenings*, **Helsinki University of Technology**, 19 settembre 2004.

• Seminario *Exponential methods for von Mises plasticity with linear hardenings*, **I.C.E.S.**, Austin, Texas, 25 gennaio 2005.

• Comunicazione *Metodi esponenziali per plasticità von-Mises con incrudimenti* il 21 febbraio 2005, durante il **convegno GNCS**, Milano, 21-22 febbraio 2005.

• Seminario *Isogeometric analysis with NURBS*, all'interno del **Dipartimento di Matematica F.Casorati**, Milano, 8 marzo 2005.

• Seminario *A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates with free boundary conditions*, **Helsinki University of Technology**, 3 Ottobre 2005.

• Seminario *Isogeometric Analysis with NURBS*, **I.N.R.I.A.-Roquencort** (Parigi), 1 Febbraio 2006.

• Comunicazione *On the stability of some finite element schemes for large deformation incompressible elasticity* il 26 Maggio 2006, all'interno del Minisimposio M34 al congresso **SIMAI 2006**, 22-26 Maggio 2006, Provincia di Ragusa.

• Comunicazione *A family of C0 finite elements for Kirchhoff plates with general boundary conditions* il 26 Maggio 2006, all'interno del Minisimposio M34 al congresso **SIMAI 2006**, 22-26 Maggio 2006, Provincia di Ragusa.

• Comunicazione *Isogeometric Analysis with NURBS from the theoretical perspective* il 21 Luglio 2006, all'interno del Minisimposio Computational Analysis and Geometry al congresso **World Congress on Computational Mechanics 2006**, 16-21 Luglio 2006, Los Angeles.

• Seminario *Asymptotic energy analysis of shell eigenvalue problems* il 19 Settembre 2006, **Multiscale INdAM Workshop 2006**, 18-22 Settembre 2006, Cortona.

• Comunicazione *A Stabilized MITC6 Triangular Shell Element* il 26 Ottobre 2006, **European Conference on Smart Systems**, 26-28 Ottobre 2006, Roma.

• Comunicazione *Asymptotic analysis of shell vibration and related numerical hazards* il 17 Maggio 2007, **International Workshop on High-Order FEM**, 17-19 Maggio Herrsching am Ammersee (Munich).

• Comunicazione *A fully locking free isogeometric approach to linear elasticity* il 23 Luglio 2007, **US National Congress on Computational Mechanics 9**, 23-26 Luglio 2007, San Francisco.

• Comunicazione estesa da 30 minuti *Uno stimatore locale dell'errore per il metodo alle differenze finite mimetiche* il 26 settembre 2007, **XVIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana**, 24-29 Settembre 2007, Bari.

• Seminario *Isogeometric analysis with NURBS*, **Helsinki University of Technology**, 5 Novembre 2007.

• Seminario *Asymptotic analysis of the shell eigenvalue problem*, **Helsinki University of Technology**, 20 Novembre 2007.

• Comunicazione *An a posteriori error estimator for the Mimetic Finite Difference method* il 10 Luglio 2008, **Austin-Lisbon CFD 2008 : 1st Workshop on Computational Engineering: Fluid Dynamics** , 10-11 Luglio 2008, Lisbona.

• Comunicazione *Galerkin approximation for incompressible elasticity problems - Part II: NURBS based approximations* il 16 Settembre 2008, **Convegno SIMAI 2008**, 15-19 Settemebre 2008, Roma.

• Seminario *An a posteriori error estimator for the Mimetic Finite Difference method*, **Helsinki University of Technology**, 19 Gennaio 2008.

• Comunicazione *A Mimetic Finite Difference method for the Stokes problem* il 9 Giugno 2009, **MAFELAP 2009**, 9 Giugno - 12 Giugno 2009, Londra.

• Comunicazione *A Mimetic Finite Difference method for the Stokes problem* il 17 Luglio 2009, 10^{th} US Nat. Congress. on Comput. Mech., 16-19 Luglio 2009, Columbus, Ohio.

• Seminario *Asymptotic analysis of the shell eigenvalue problem*, **Los Alamos National Laboratory**, 3 Agosto 2009.

• Comunicazione *A higher order Mimetic Finite Difference method for the diffusion problem* il 12 Gennaio 2010, **WONAPDE 2010**, 11-15 Gennaio 2010, Concepcion, Cile.

• Comunicazione *Robust BDDC Preconditioners for Reissner-Mindlin and Naghdi Thin Structure Problems* il 18 Giugno 2010, **Adaptive FE and Domain Decomposition Methods**, 17-19 Giugno 2010, Milano.

• Comunicazione *Mimetic discretization of the diffusion problem: a higher order method and a posteriori error estimates* il 1 Luglio 2010, **Workshop on non-standard Num. Meth. for PDE**, 29 Giugno-2 Luglio 2010, Pavia.

• Seminario *Domain decomposition by BDDC of MITC elements for plate and shell problems*, **Helsinki University of Technology**, 27 settembre 2010.

• Comunicazione *Isogeometric Analysis for T-Spline geometries of merged patches* il 14 Gennaio 2011, **Workshop IGA 2011**, 13-16 Gennaio 2011, Austin, Texas.

• Comunicazione *Approximation properties of mapped NURBS spaces* il 28 Giugno 2011, **Workshop HOFEIM 2011**, 27-30 Giugno 2011, Cracovia, Polonia.

• Comunicazione *An arbitrary order mimetic discretization method* il 8 Settembre 2011, **ENUMATH 2011**, 5-9 Settembre 2011, Leicester, UK.

• Seminario *An introduction to Isogemetric Analysis with focus on approximation estimates* il 13 Settembre 2011, Universidad del Bio-Bio, Concepcion, Cile.

• Comunicazione *Mimetic discretizations of arbitrary local order and regularity* il 14 Dicembre 2011, **Journées Lions-Magenes**, 14-15 Dicembre 2011, Parigi, Francia.

• Comunicazione *Domain decomposition methods in Isogeometric analysis*, il 10 Febbraio 2012, **HONAPDE 2012**, 6-10 Febbraio 2012, Bonn, Germania.

ALTRE COMUNICAZIONI

(con partecipazione all'eventuale convegno annesso)

• Due seminari informali dal titolo: *Un nuovo metodo numerico per plasticità alla Von-Mises con hardening lineare* nell'ambito degli **Incontri di Matematica Applicata** del Dipartimento di Matematica di Pavia (6 e 13 Marzo 2003).

• Comunicazione *On a new numerical method for von-Mises plasticity with linear hardening* il 16 luglio 2003 durante il convegno **Advanced School and Workshop on Modelling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics**, Coimbra 14-18 luglio 2003.

• Comunicazione *Valutazione numerica e teorica del comportamento asintotico dell'energia di due gusci "benchmark" intermedi* il 10 settembre durante il **convegno UMI** di Milano, 8-13 settembre 2003.

• Comunicazione *Elementi finiti enhanced in elasticità lineare e nonlineare* il 10 febbraio durante il **convegno GNCS2004**, Montecatini, 9-11 febbraio 2004.

• Comunicazione *Isogeometric analysis with NURBS* all'interno della **Finite Element Fair**, 3-4 Giugno 2005, Pavia.

• Comunicazione *A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates with free boundary conditions* il 19 Luglio 2005, all'interno del congresso **ENUMATH 2005**, 18-22 Luglio 2005, Santiago de Compostela.

• Comunicazione *Stime dell'errore a posteriori per il metodo MFD* il 5 Febbraio 2008, **Convegno biennale GNCS**, 4-6 Febbraio 2008, Montecatini Terme.

• Comunicazione *A BDDC preconditioner for the Reissner-Mindlin plate bending problem* il 4 Luglio 2008, **World Congress on Computational Mechanics 2008**, 30 Giugno - 4 Luglio 2008, Venezia.

PARTECIPAZIONI A SCUOLE (E ALTRI CONVEGNI)

• Scuola estiva **Multiscale Problems in Nonlinear Analysis**, Pittsburgh, USA, 31 Maggio-9 Giugno 2001.

• Scuola estiva **Simulation of Fluid and Structure Interaction**, Praga, Repubblica Ceca, 19-29 Agosto 2001.

• Scuola estiva **Wavelets**, Cortona, Italia, 22 Luglio-9 Agosto 2002.

• Scuola estiva **Analisi Numerica**, Cortona, Italia, 10-30 Agosto 2003.

• Convegno **School on Modelling, Control and Numerical Simulation of Smart Systems**, interente al progetto europeo “New Materials, Adaptive Systems and their Nonlinearities; Modelling Control and Numerical Simulations”, Pavia, Italia, 15-19 Settembre 2003.

• Convegno **School on Nonlinear and Contact Mechanics**, interente al progetto europeo “New Materials, Adaptive Systems and their Nonlinearities; Modelling Control and Numerical Simulations”, Helsinki, Finlandia, 21-23 Luglio 2004.

• Convegno **Mathematical Physics and PDEs**, Levico (Trento), Italia, 6-11 Settembre 2009.

• Scuola estiva **Dobbiaco Summer School: DG Methods, Theory and Applications**, Dobbiaco (Bolzano), Italia, 21-25 Giugno 2010.

PERIODI ALL’ESTERO

• Permanenza di un mese (Aprile 2004) presso il **Helsinki University of Technology**, nell’ambito del progetto europeo “New materials, adaptive systems and their nonlinearities. Modelling, control and numerical simulations”, invito del Prof. R.Stenberg.

• Permanenza di tre mesi (Settembre-Novembre 2004) presso il **Helsinki University of Technology**, nell’ambito del progetto europeo “New materials, adaptive systems and their nonlinearities. Modelling, control and numerical simulations”, invito del Prof. R.Stenberg.

• Permanenza di due settimane (Gennaio 2005) presso l’**I.C.E.S.**, Austin, Texas, nell’ambito del J. Tinsley Oden Faculty Fellowship Program, invito del Prof. T.J.R.Hughes.

• Permanenza di due mesi e mezzo (15 Settembre - 30 Novembre 2005) presso il **Helsinki University of Technology**, nell’ambito del progetto europeo “New materials, adaptive systems and their nonlinearities. Modelling, control and numerical simulations”, invito del Prof. R.Stenberg.

• Permanenza di due mesi (3 Gennaio - 26 Febbraio 2006) presso il **I.N.R.I.A.-Roquencort** (Parigi), nell’ambito del progetto europeo “New materials, adaptive systems and their nonlinearities. Modelling, control and numerical simulations”, invito del Prof. D.Chapelle.

• Permanenza di un mese e mezzo (27 agosto - 9 settembre 2006, 27 settembre- 25 ottobre 2006) presso il **I.N.R.I.A.-Roquencort** (Parigi), nell’ambito del progetto europeo “New materials, adaptive systems and their nonlinearities. Modelling, control and numerical simulations”, invito del Prof. D.Chapelle.

• Permanenza di due settimane (Agosto 2007) presso l’**I.C.E.S.**, Austin, Texas, nell’ambito del J. Tinsley Oden Faculty Fellowship Program, invito del Prof. T.J.R.Hughes.

• Permanenza di tre settimane (Novembre 2007) presso il **Helsinki University of Technology**, invito del Prof. Reijo Kouhia.

• Permanenza di due settimane (Gennaio 2009) presso il **Helsinki University of Technology**, invito del Prof. Rolf Stenberg.

• Permanenza di due settimane (Luglio 2009) presso l’**I.C.E.S.**, Austin, Texas, invito del Prof. T.J.R.Hughes.

• Permanenza di due settimane (Luglio-Agosto 2009) presso il **Los Alamos National Laboratory - Theoretical Division**, New Mexico, invito del Dott. K. Lipnikov.

• Permanenza di due settimane (Gennaio 2010) presso la **Universidad de Concepcion**, Cile, invito del Prof. R. Rodrigues.

• Permanenza di due settimane (Luglio 2010) presso il **Los Alamos National Laboratory - Theoretical Division**, New Mexico, invito del Dott. K. Lipnikov.

• Permanenza di due settimane (Gennaio 2011) presso l’**I.C.E.S.**, Austin, Texas, invito del Prof. T.J.R.Hughes.

• Permanenza di una settimana (Agosto 2011) presso il **Helsinki Aalto University**, invito del Prof. Rolf Stenberg e Dott. J. Niiranen.

• Permanenza di una settimana (Settembre 2011) presso la **Universidad de Concepcion**, Cile, invito del Prof. R. Rodrigues e Dott. D. Mora.

ARRIVITÀ ORGANIZZATIVE

• Organizzazione, in collaborazione con B. Ayuso e A. Timofte, del First Young Researchers Workshop on Smart Materials (10-12 Ottobre 2005, Berlino), workshop inerente al progetto europeo "New materials, adaptive systems and their nonlinearities. Modelling, control and numerical simulations"

• Organizzazione del Minisimposio *Numerical analysis of thin structures* all'interno del Congresso International Conference on Mathematics and Continuum Mechanics, Porto (Portogallo), 19-22 Febbraio 2008.

• Organizzazione del Minisimposio *Isogeometric Methods* all'interno del Congresso USNCCM-11, Minneapolis (USA), 25-29 Luglio 2011.

• Coordinatore per il fondo PUR 2010 del Dipartimento di Matematica F. Enriques, valore di 20.600 euro (2010–2014).

• Coordinatore per il fondo FIRB codice RBFR08CZ0S, gruppo di Milano, valore di 76.000 euro (2010–2014).

REFEREE PER LE RIVISTE

• Math. Models and Meth. Appl. Sci

• Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.

• Journal of Sound and Vibration

• IMA J. Numer. Anal.

• BIT-Numer.Math.

• ESAIM: Math. Mod. Numer. Anal.

• Siam. J. Numer. Anal.

• Comp. Mech.

• Appl. Math. and Comp.

• Numer. Math.

• Numer. Meth. for PDE

• Calcolo

• SIAM books

MEMBRO DI EDITORIAL BOARD, COLLEGI E FINANZIAMENTI INTERNAZIONALI

• Membro del editorial board del *Journal of Advanced Research in Appl. Math* (dal 2009).

• Membro del gruppo docenti del *Dottorato di Ricerca in Matematica e Statistica per le Scienze Computazionali*, Dipartimento di Matematica "Federigo Enriquez" di Milano (dal 2010).

• Associate researcher del progetto europeo ERC Starting Grant *GeoPDEs*, leader Annalisa Buffa (2009–2013)

• Associate researcher del progetto europeo Factory of the Future *TERRIFIC*, leader Carlo Lovadina (2011–2014)

REFEREE PER TESI DI DOTTORATO

• Referee per la Tesi di A. Niemi (Università di Helsinki, Finlandia, 2009)

• Referee e commissario per la Tesi di F.E. Sanhueza (Università di Concepcion, Cile, 2010)

• Referee per la Tesi di D. Mora (Università di Concepcion, Cile, 2010)

ATTIVITÀ DIDATTICA

• Svolgimento di esercitazioni e seminari (totale 24 lezioni di 1 ora) per il corso di Matematica B del Corso di Diploma in Ingegneria di Pavia, anno accademico 1999-2000.

• Svolgimento di esercitazioni e seminari (totale 24 lezioni di 1 ora) per il corso di Analisi Matematica A del Corso di Laurea in Ingegneria di Pavia, con partecipazione alle commissioni d'esame, anni accademici 2000-01, 2001-02, 2002-03, 2003-04.

• Svolgimento di esercitazioni in aula e in laboratorio informatico (totale 48 lezioni di 1 ora) per il corso di Calcolo Numerico (Corsi di Laurea in Matematica e Matematica Applicata, Dipartimento di Matematica F.Enriques di Milano), con partecipazione alle commissioni d'esame, anni accademici 2004-05, 2005-06, 2006-07, 2007-08.

• Svolgimento di esercitazioni in aula e in laboratorio informatico (totale 24 lezioni di 1 ora) per il corso di Analisi Numerica II (Corsi di Laurea in Matematica e Matematica Applicata, Dipartimento di Matematica F.Enriques di Milano), con partecipazione alle commissioni d'esame, anni accademici 2005-06, 2006-07, 2007-08, 2008-09.

• Docente del corso (totale 48 lezioni di 1 ora) di Calcolo Numerico (Corsi di Laurea in Matematica e Matematica Applicata, Dipartimento di Matematica F.Enriques di Milano), anno accademico 2008-09.

• Docente del corso (totale 66 lezioni di 1 ora) per il corso di Analisi Numerica II (Corsi di Laurea in Matematica e Matematica Applicata, Dipartimento di Matematica F.Enriques di Milano), anno accademico 2009-10

• Docente del corso (totale 52 lezioni di 1 ora) per il corso di Ottimizzazione (Corsi di Laurea in Matematica e Matematica Applicata, Dipartimento di Matematica F.Enriques di Milano), anno accademico 2010-11

• Docente del corso (totale 36 lezioni di 1 ora) per il corso di Fondamenti di Matematica (Per diversi corsi di Laurea presso Biotecnologie), anno accademico 2010-11

• Docente del corso (totale 42 lezioni di 1 ora) per il corso di Metodi Numerici per Equazioni alle Derivate Parziali 2 (Corsi di Laurea in Matematica e Matematica Applicata, Dipartimento di Matematica F.Enriques di Milano), anno accademico 2010-11

• Docente del corso (totale 52 lezioni di 1 ora) per il corso di Ottimizzazione (vedi sopra), anno accademico 2011-12

• Docente di metà del corso Numerical Methods II (International Master Course in Civil Engineering, Università di Bologna) anno accademco 2011-2012.

Tesi di Laurea:

• *Correlatore* per la Tesi di Laurea Specialistica dal titolo *Convergenza e condizionamento del modello di Reissner-Mindlin con elementi finiti MITC9 per la flessione di piastre sottili*, laureando P. Galimberti, anno accademico 2006/07.

• *Relatore* per la Tesi di Laurea Triennale dal titolo *Il metodo Active Set con applicazione al problema dell'ostacolo*, laureando A. Perrone, anno accademico 2009/10.

• *Relatore* per la Tesi di Laurea Triennale dal titolo *Metodi a un passo per la risoluzione numerica del problema di Cauchy*, laureanda G. di Loreto, anno accademico 2009/10.

• *Relatore* per la Tesi di Laurea Triennale dal titolo *Metodi agli elementi finiti per problemi parabolici con applicazione all'equazione di Black-Scholes*, laureando P. Baldini, anno accademico 2010/11.

• *Relatore* per la Tesi di Laurea Triennale dal titolo *Introduzione agli elementi finiti per la trave di Timoshenko*, laureando D. Carrera, anno accademico 2010/11.

• *Relatore* per la Tesi di Laurea Magistrale dal titolo *Metodi di discretizzazione mimetica per problemi ellittici*, laureando F. Lucini, anno accademico 2010/11.

ATTIVITÀ SCIENTIFICA

Mi sono occupato dei seguenti temi di ricerca:

Gusci lineari [52,1,3,4,5,10,21]

Analisi asintotica del problema della vibrazione di gusci [15,22,26,28,30]

Piastre [6,7,16,19,23,25,37]

Plasticità [2,11,12,17,20]

Elasticità lineare e nonlineare (e metodi "Enhanced Strain") [8,9,33]

Metodi Mimetic Discretization [24,27,29,32,36,31,38,34]

Metodi di decomposizione di domini in meccanica strutturale [13,35]

Metodi isogeometrici [14,18,39]

Segue una descrizione più dettagliata del lavoro svolto nelle diverse aree menzionate (si osservi che in questa descrizione sono inclusi solo i lavori già effettivamente stampati e non quelli in corso di stampa o preprint).

Gusci lineari

Per parte del mio lavoro di ricerca, mi sono dedicato allo studio dei gusci lineari (shells), secondo i modelli classici di Koiter e Naghdi. I gusci sono strutture elastiche "sottili", nel senso che una delle tre dimensioni caratteristiche del corpo materiale (lo spessore) è notevolmente inferiore alle altre due. Assegnato un carico e determinate condizioni al bordo, il problema è quello di calcolare gli spostamenti del guscio nell'ambito delle piccole deformazioni e considerando un legame costitutivo elastico lineare. In termini matematici, ad esempio nel caso del modello di Koiter, il problema si scrive

$$\begin{cases} \text{Trovare } \mathbf{u}^t \in V \text{tale che} \\ \\ t a_m(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}) + t^3 a_b(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}) = < f, \mathbf{v} > \quad \forall \mathbf{v} \in V \ , \end{cases}$$

dove t è lo spessore del guscio, V è lo spazio degli spostamenti ammissibili della superficie mediana, $f \in V'$ rappresenta il carico applicato e le forme bilineari $a_m(\cdot,\cdot)$ (membranale) e $a_b(\cdot,\cdot)$ (flessionale) sono definite dalla geometria del guscio.

Tali forme bilineari sono continue in V, semidefinite positive e tali che $a_m(v,v) + a_b(v,v) = 0$ se e solo se v corrisponde a uno spostamento rigido; inoltre, se (in un senso da precisare) le condizioni ai limiti "impediscono spostamenti rigidi" (ad es. con condizioni di incastro su una parte del bordo di misura positiva), la forma $a_m(v,v) + a_b(v,v)$ è coerciva su V.

Indicheremo con

$$\begin{aligned} E(t) &:= t a_m(\mathbf{u}^t, \mathbf{u}^t) + t^3 a_b(\mathbf{u}^t, \mathbf{u}^t) \\ R(t) &:= \frac{t^3 a_b(\mathbf{u}^t, \mathbf{u}^t)}{E(t)} \ , \end{aligned}$$

rispettivamente l'energia elastica totale e la proporzione di energia flessionale.

Quando lo spessore del guscio tende a zero, si possono avere diversi comportamenti asintotici, in

dipendenza della forma, del carico applicato e delle condizioni al bordo. La teoria classica suddivide i gusci essenzialmente in due categorie, quella flessionale e quella membranale. Il comportamento asintotico di queste due famiglie è notevolmente diverso; in particolare, nel primo caso domina l'energia flessionale (in quanto il limite per $t \to 0$ di $R(t)$ è uguale a 1), mentre nel secondo caso domina quella membranale (il limite per $t \to 0$ di $R(t)$ è uguale a 0). Inoltre, nel caso flessionale l'energia si comporta come $E(t) \sim t^{-3}$ mentre nel caso membranale come t^{-1}.
L'importanza della conoscenza del comportamento asintotico risiede anche nel trattamento numerico di questi problemi. Infatti le difficoltà incontrate, e i metodi per affrontarle, possono variare molto da un caso all'altro; basti ad esempio nominare il fenomeno del "locking" dei gusci flessionali, che è invece completamente assente in quelli membranali.

La teoria classica dei gusci non si occupa però di una terza famiglia, che chiameremo gusci *intermedi*, su cui sono stati fatti alcuni studi successivamente. I problemi appartenenti a questa ultima classe sono in qualche modo legati a un'irregolarità del carico, e la loro analisi riserva difficoltà sia a livello di studio asintotico teorico che, tipicamente, a livello di risoluzione con elementi finiti. In quest'ultima categoria, diversamente da quanto accade per le due famiglie classiche, la rapidità di esplosione asintotica dell'energia $E(t)$ non è la stessa per tutti i problemi, ma può variare tra t^{-1} e t^{-3}. Lo stesso vale per il limite di $R(t)$ quando $t \to 0$, per cui non è ad esempio noto a priori se (e quale) delle due energie, flessionale o membranale, dominerà asintoticamente il problema.

Nell'articolo [52] ho operato uno studio di alcuni problemi intermedi sui gusci cilindrici e toroidali, dotati di simmetrie che permettessero la costruzione di problemi equivalenti monodimensionali. Questo ha permesso, utilizzando alcuni risultati recenti e la teoria degli spazi di interpolazione, di ottenere risultati teorici circa il comportamento asintotico dell'energia. In particolare, è stato calcolato nei vari casi l'esponente α tale che

$$E(t) \sim t^{-\alpha} \qquad \text{quando } t \to 0 \ , \tag{1}$$

e di conseguenza anche il limite di $R(t)$ quando t tende a zero; quest'ultimo è stato infatti dimostrato da Baiocchi-Lovadina (M^{3}AS, 2002) essere pari ad $(\alpha - 1)/2$.
Questi risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti tramite la risoluzione dei suddetti problemi con elementi finiti, utilizzando un codice che ho sviluppato in MATLAB. I risultati teorici e numerici si sono rivelati in pieno accordo.

Un'altra caratteristica dei gusci intermedi è la presenza di strati limite (layers) nella soluzione. Per strati limite intendiamo parti della soluzione che decadono a partire da alcuni punti o linee generatrici, con un fattore di rapidità di decadimento che esplode al calare di t. Questo fenomeno può essere causato direttamente dall'irregolarità del carico, oppure da una incompatibilità dello stesso con le condizioni al bordo. Come conseguenza degli strati limite, nei gusci intermedi la soluzione rimane uniformemente limitata nello spessore solo in norme molto deboli. Quando si applica un metodo ad elementi finiti (e senza utilizzare griglie "ad hoc"), questo non permette in generale di derivare stime uniformi per l'errore nelle norme originali del problema. In [4] ho dunque affrontato il problema di derivare stime uniformi dell'errore in norme piu deboli (in particolare, norme su spazi di Sobolev a coefficiente negativo). Nel lavoro ho dimostrato delle stime uniformi ottimali (rispetto alla regolarità del carico), valide per metodi di Galerkin classici applicati a problemi su gusci cilindrici con simmetria assiale. In queste norme piu deboli, seguendo l'approccio dimostrativo usato sopra, è quindi in generale possibile ottenere una convergenza dell'errore anche con metodi di Galerkin classici. È stato poi operato uno studio dell'errore ottenuto tramite risoluzioni numeriche di alcuni problemi (codice MATLAB), che è in completo accordo con le stime teoriche.

Le molteplici difficoltà che si riscontrano nella analisi teorica (stime dell'errore) di metodi ad elementi finiti per gusci rende molto comune l'utilizzo di problemi "benchmark" come test di validità per metodi numerici. Tra i problemi classici sovente utilizzati in ingegneria, se ne ritrovano due che appartengono alla famiglia degli intermedi; questo implica che, a differenza dei benchmark di tipo flessionale o membranale, il comportamento asintotico dell'energia (rapidità di esplosione, proporzione limite di energia flessionale) non è a priori noto. In [3] ho operato uno studio teorico del comportamento energetico di questi due gusci, il “pinched cylinder” e “Scordelis-Lo roof”. Il problema dello “Scordelis-Lo roof” è essenzialmente quello di un tetto cilindrico sottoposto al suo stesso peso e appoggiato sui lati curvi, mentre il “pinched cilinder” è un tetto cilindrico bloccato su tutti i bordi e sottoposto a un carico puntuale di tipo Dirac nel centro. Come in [52], le dimostrazioni si svolgono nell'ambito della teoria degli spazi di interpolazione; stavolta però il problema è realmente bidimensionale e non riducibile a casi piu semplici. Si ottiene che l'esponente α (vedi (1)) è pari a 1.75 nel primo e 2.25 nel secondo caso; la proporzione limite di energia flessionale è invece rispettivamente pari a 0.375 e 0.625.

I risultati riguardanti lo “Scordelis-Lo roof” sono in completo accordo con alcuni test numerici operati precedentemente con FEAP in [1], in collaborazione con C. Lovadina e F. Auricchio.
Allo scopo di ottenere un confronto numerico piu approfondito, in [5], in collaborazione con C. Chinosi, abbiamo affrontato la risoluzione con elementi finiti di questi due problemi, utilizzando il codice MODULEF dell'INRIA. Calcolando infatti il valore di $E(t)$ per diversi spessori decrescenti, ad esempio $t = 10^{-n}$ con $n = 1, 2..$, e studiandone il comportamento in dipendenza di n, è infatti possibile avere una stima dell'esponente α; con tecniche simili, si può fare lo stesso per il limite di $R(t)$. In [5] abbiamo operato uno studio di questo tipo prima su alcuni problemi flessionali e membranali (come test di validità) e in seguito sui due gusci benchmark sopra descritti. I risultati sono in pieno accordo con quelli teorici dimostrati in [3].

Sempre in linea con l'analisi degli strati limite nei gusci intermedi, in [10] ho affrontato lo studio asintotico della soluzione per problemi di gusci cilindrici (modello di Koiter) sollecitati da carichi puntuali. La conoscenza del comportamento degli strati limite può essere assai utile nella risoluzione numerica di un problema, ad esempio portando importanti indicazioni circa la costruzione di griglie “ad hoc” per gli elementi finiti. Quando un tetto cilindrico viene sollecitato da un carico puntuale, si possono avere in generale due diversi comportamenti: flessionale, se il bordo del guscio è sufficientemente libero, oppure intermedio. In [10], partendo da certe ipotesi realistiche sulla soluzione, ho derivato informazioni circa il comportamento della stessa quando lo spessore tende a zero. Ad esempio, nel caso intermedio la soluzione decade in direzione radiale a partire dal punto di applicazione del carico, presentando una lunghezza caratteristica proporzionale a $t^{1/4}$ (appunto uno strato limite). Viceversa nel caso flessionale si ha una maggiore regolarità e la soluzione tende addirittura a essere costante in direzione assiale.
I risultati sono stati ottenuti combinando la conoscenza del comportamento dell'energia con uno studio delle radici del polinomio derivante dalle equazioni di Eulero del problema. Nel lavoro sono presentati anche alcuni test numerici che avvalorano ulteriormente i risultati teorici ottenuti (utilizzando MODULEF).

In collaborazione con D. Chapelle e I. Paris dell'INRIA di Parigi, nel lavoro [21] abbiamo considerato gli elementi triangolari MITC per gusci. Gli elementi MITC sono tra i più utilizzati in ingegneria e sono caratterizzati da una riduzione degli sforzi di taglio e di membrana, che vengono interpolati in uno spazio ridotto. Questa riduzione, che permette di aggirare in modo soddisfacente il fenomeno del “locking”, nel caso di elementi quadrilateri MITC non ha particolari controindicazioni (ad es.: Chapelle-Bathe, 2003, Springer). Diversamente, nel caso di elementi triangolari, questa riduzione può generare in taluni problemi dei modi spuri che perturbano, anche in maniera dominante, la soluzione numerica. Nel lavoro [21] abbiamo quindi indagato alcune metodologie per stabilizzare gli elementi MITC triangolari. La difficoltà principale è dovuta al fatto che una generica stabilizzazione corretta deve non solo curare questo fenomeno, ma anche evitare di incrementare il fenomeno del “locking”; queste due indicazioni sono in un certo senso constrastanti. Nel lavoro [21] abbiamo proposto delle stabilizzazioni per gli elementi triangolari MITC volte a rendere gli elementi più affidabili. Il buon comportamento degli elementi modificati è stato mostrato con diversi test numerici su problemi rilevanti.

Analisi asintotica del problema della vibrazione di gusci

Il problema che ci siamo posti è quello di calcolare i primi modi di vibrare, cioè quelli di maggior interesse ingegneristico, di un generico guscio con date condizioni al bordo. Abbiamo considerato in prima analisi lo stesso modello classico di Koiter introdotto nella sezione precedente. Dal punto di vista matematico, questo equivale ad analizzare i primi autovalori (e rispettivi autofunzioni) del problema

$$\begin{cases} \text{Trovare } \mathbf{u}^t \in V,\ \ \mathbf{u}^t \neq 0,\ \ \lambda \in \mathbb{R},\ \text{ tali che} \\ \\ t a_m(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}) + t^3 a_b(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}) = \lambda\ m_t(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V\ , \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$, $m_t(\cdot,\cdot)$ rappresenta la forma bilineare di massa e le restanti notazioni sono come precedentemente indicato.

Ci siamo interessati al comportamento asintotico, cioè quando il parametro t tende a zero, dei primi autoavalori e autofunzioni. Come già osservato, per il problema sorgente esiste in letteratura una classificazione del comportamento asintotico dei gusci, che puo' essere di tipo membranale, flessionale o intermedio. Una classificazione di questo tipo è molto importante, perchè permette di stimare la rigidezza della struttura e di prevedere il tipo di difficoltà numeriche che si incontreranno nella analisi con elementi finiti; ad esempio, il fenomeno del "locking" è associato a comportamenti flessionali. Per il problema della vibrazione dei gusci un'analisi asintotica era assente in letteratura.

In collaborazione con C. Lovadina, nei lavori [15,28] abbiamo sviluppato una teoria asintotica per il problema della vibrazione dei gusci, nell'ambito della teoria degli spazi di interpolazione. In particolare, la teoria introdotta permette di prevedere le proporzioni tra energia flessionale e membranale (energie elastiche derivanti dal "piegamento" e rispettivamente "stiramento" della superficie del guscio) per piccoli valori dello spessore. Questo determina con una certa precisione che tipo di difficoltà numeriche sono presenti nel problema. In particolare si è dimostrato che, anche per gusci con forma e condizioni al bordo tali da inibire qualunque spostamento puramente flessionale, i primi modi di vibrare possono portare una grande parte di energia di tipo flessionale. Di conseguenza, nell'analisi agli autovalori diviene importante utilizzare metodi non soggetti al fenomeno del "locking" anche per gusci flessionalmente inibiti. Infine, la teoria sviluppata è in grado di stimare la resistenza strutturale asintotica associata ai primi modi del problema, in altre parole il comportamento asintotico del minimo autovalore λ. Nel lavoro breve [22], in collaborazione anche con E. Artioli e H. Hakula del TKK di Helsinki, si è applicata la teoria sviluppata in [28] ad alcuni problemi test. Nel lavoro [30] appena sottoposto, con gli stessi autori, sono stati poi operati diversi test numerici (sia con elementi finiti che con il metodo di collocazione) che sono in completo accordo con i risultati teorici in [22]. In tale lavoro abbiamo considerato anche il modello classico di Naghdi per gusci lineari, e osservato numericamente come esso sia asintoticamente equivalente al modello di Koiter anche per il problema agli autovalori.

In collaborazione con H. Hakula e J. Pitkäranta del TKK di Helsinki, nel lavoro [26] si è analizzato in dettaglio un problema classico, quello della vibrazione di un guscio cilindrico bloccato agli estremi. Le tecniche utilizzate sono questa volta di tipo espansione di Fourier e "scaling". Se si assume una espansione di Fourier della soluzione nella variabile angolare, è facile vedere come le diverse armoniche K danno origine a problemi disaccoppiati uno-dimensionali, scritti nella sola variabile assiale. Per questi problemi assiali abbiamo poi operato un'analisi energetica volta a individuare come scalano in funzione dello spessore t le diverse quantità coinvolte, come le componenti degli spostamenti e delle deformazioni. Questa analisi ha permesso di derivare diversi dati asintotici rilevanti sul problema, in funzione dello spessore t. Ad esempio abbiamo derivato non solo la dimensione caratteristica delle varie componenti della prima autofunzione, ma anche la frequenza angolare K della stessa e il comportamento dell'autovalore minimo. In conseguenza di questi risultati, si è potuto quantificare teoricamente la presenza di un possibile fenomeno di "locking" per metodi agli elementi finiti, nonostante il problema in esame sia flessionalmente inibito. Tutti questi risultati sono stati ulteriormente verificati con diversi test numerici (con elementi finiti ad alto grado polinomiale) con completo accordo.

Piastre

Mi sono dedicato a metodi numerici per un modello modificato di piastre di Reissner-Mindlin. Il problema della deflessione di una piastra secondo il modello di Reissner-Mindlin può essere scritto nel modo che segue. Si vuole minimizzare il funzionale

$$J^t(\boldsymbol{\theta}, w) = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{C}\, \varepsilon(\boldsymbol{\theta}) : \varepsilon(\boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}x + \frac{\lambda t^{-2}}{2} ||\boldsymbol{\nabla} w - \boldsymbol{\theta}||^2_{L^2(\Omega)} - (g, w)\ , \tag{2}$$

nello spazio

$$\mathcal{V} = \{(\boldsymbol{\theta}, w) \in [H^1(\Omega)]^2 \times [H^1(\Omega)] \cap BC\}\ ,$$

dove Ω rappresenta il dominio della superficie mediana della piastra, θ le rotazioni, w gli spostamenti normali, g il carico applicato riscalato, C il tensore elastico, $\lambda = 5/6$ il fattore di correzione di taglio, t lo spessore e BC sta per condizioni al bordo.
Una grossa difficoltà che si incontra nella risoluzione con elementi finiti di piastre Reissner-Mindlin con condizioni di bordo libere è (oltre al fenomeno dello "shear locking") la presenza di strati limite. In particolare, come dimostrato da Arnold-Falk (SIAM JMA, 1996), anche con un carico C^∞ la norma H^s delle rotazioni esplode quando $t \to 0$ per ogni $s > 3/2$. Di conseguenza, indicando con h la dimensione caratteristica di una griglia quasi-uniforme, tipicamente anche un metodo agli elementi finiti ottimale esibirà una convergenza della soluzione in norma H^1 al più pari ad $h^{1/2}$.
In [P3], in collaborazione con F.Brezzi, abbiamo presentato una versione modificata per modellizzare le condizioni al bordo libere, la quale presenta una maggiore consistenza col caso limite di Kirchhoff. Chiamando $\Sigma_f \in \partial\Omega$ la zona di bordo libera, la differenza del nuovo modello consiste nell'imporre nello spazio $\mathcal{V}$

$$(\boldsymbol{\nabla} w - \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{s} = 0 \quad \text{su}\ \Sigma_f\ , \tag{3}$$

dove $\mathbf{s}$ indica il versore tangente al bordo (mentre le condizioni classiche di piastra libera corrispondono a non imporre alcuna condizione sullo spazio $\mathcal{V}$ in corrispondenza dei bordi liberi).
In conseguenza della maggiore consistenza col modello di Kirchhoff, si dimostra che si ottiene una maggiore regolarità della soluzione; in particolare le rotazioni rimangono uniformemente limitate fino ad $H^{5/2}$. Questo permette in principio stime assai migliori per l'errore numerico. Quando si risolve però con elementi finiti il nuovo problema, la condizione (3) non può essere in generale imposta direttamente sullo spazio discreto senza generare un effetto di locking. Si tratta quindi di appurare, in dipendenza degli elementi adottati, con quale tecnica imporre il vincolo (3) senza generare un fenomeno di locking di bordo; in taluni casi sembra ad esempio opportuno inserire una penalizzazione, in altri rilassare la condizione con l'utilizzo di operatori di proiezione. In [6], ho esteso al nuovo modello alcune ben note famiglie di metodi ad elementi finiti per piastre Reissner-Mindlin. In particolare nel lavoro si dimostrano, per tutti gli elementi descritti, stime dell'errore che sono ottimali sia in rapporto al grado polinomiale utilizzato, sia alla regolarità della soluzione.

Queste stesse problematiche si ritrovano anche nell'analisi di tutti quegli elementi per piastre di Kirchhoff che si basano su una riscrittura del problema come limite di un modello Reissner-Mindlin. Il problema della deflessione di una piastra seguendo il modello di Kirchhoff consiste nel minimizzare il funzionale

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{C}\, \varepsilon(\nabla w) : \varepsilon(\nabla w)\, \mathrm{d}x - (g, w)\ ,$$

nello spazio $H^2(\Omega) \cap BC$ dove le varie quantità mantengono lo stesso significato introdotto in (2). Una difficoltà numerica legata al modello di Kirchhoff è l'alta regolarità (H^2) dello spazio variazionale, la quale non permette l'utilizzo di elementi finiti conformi di grado basso. Un modo per ovviare a questa difficoltà è interpretare il modello di Kirchhoff come modello limite ($t \to 0$) di Reissner-Mindlin. Per gli stessi motivi discussi in precedenza, questa interpretazione si rivela però non completamente corretta in presenza di bordi liberi. In [19], in collaborazione con R. Stenberg e J. Niiranen del TKK di Helsinki, si propone una nuova famiglia di elementi finiti per il problema di Kirchhoff che ammette elementi di grado basso e non risente della inconsistenza sopra citata. Questo è stato possibile riscrivendo il problema come una penalizzazione/stabilizzazione e utilizzando un ulteriore campo incognito di variabili. In particolare, si dimostrano stime dell'errore a priori che sono ottimali anche in presenza di bordi liberi. La seconda e principale parte del lavoro è poi dedicata a sviluppare stime dell'errore a posteriori per gli elementi costruiti. Più specificatamente, si è introdotto uno stimatore locale dell'errore η_T, dove T sta per il generico elemento della triangolazione $\mathcal{T}_h$, il quale è completamente computabile a partire dalla soluzione discreta. Tale stimatore è dimostrato soddifare

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \geq CE^2 \ , \qquad E_{\widetilde{T}} \leq C\eta_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \ ,$$

dove C rappresenta generiche costanti indipendenti dal diametro h degli elementi, E rappresenta l'errore, nella norma di interesse, della soluzione discreta rispetto a quella esatta, ed $E_{\widetilde{T}}$ rappresenta lo stesso errore, localizzato attorno all'elemento T. Queste due proprietà fondamentali sono dette affidabilità globale ed efficienza locale. Grazie ad esse, lo stimatore consente di applicare con sicurezza metodologie per il controllo dell'errore e per un raffinamento adattivo della triangolazione (con grandi vantaggi in termini di costo computazionale a parità di accuratezza richiesta dalla soluzione).

In [23] si sono poi operati diversi test numerici, sia di monitoraggio dell'errore sia di implementazione di un metodo adattivo che impiega l'indicatore a posteriori dell'errore proposto in [19]. I risultati sono completamente soddisfacenti (in particolare il comportamento del metodo adattivo è largamente superiore al corrispettivo metodo con griglie uniformi) e in accordo con la teoria.

Come osservato sopra, una difficoltà numerica legata al modello di Kirchhoff è l'alta regolarità dello spazio variazionale. Poichè questo costringe i metodi standard conformi ad utilizzare gradi polinomiali elevati, sono stati sviluppati in ingegneria diversi metodi agli elementi finiti non conformi per il modello di Kirchhoff. Uno dei più noti è l'elemento di Morley (1968); nel lavoro [16], in collaborazione con R. Stenberg e J. Niiranen, abbiamo introdotto per la prima volta in letteratura uno stimatore a posteriori locale per l'elemento di Morley. Per questo indicatore abbiamo dimostrato la affidabilità ed efficienza, in altre parole che esso costituisce una valida stima dell'errore locale. Si noti che, poichè il metodo Morley è altamente nonconforme, le tecniche dimostrative classiche per le stime a posteriori di elementi finiti nonconformi non possono essere applicate direttamente. Per altamente nonconforme si intende che, oltre alla caratteristica che lo spazio discreto V_h non è contenuto nello spazio variazionale continuo V, vale che lo spazio $V_h \cap V$ non ha alcuna buona proprietà di approssimazione.

Nel lavoro [7] si affronta l'analisi del metodo ad elementi finiti per piastre Reissner-Mindlin detto MITC4. Questo elemento è quello di ordine piu basso nella popolare famiglia di elementi quadrilateri MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components). Per questo metodo, pur essendo uno dei piu usati in ambito ingegneristico, ancora recentemente mancava un'analisi dell'errore soddisfacente; le instabilita' insite nel famoso metodo Q1-P0 per Stokes generano infatti delle difficoltà ulteriori (in rapporto agli altri elementi della stessa famiglia - Brezzi, Fortin, Stenberg 1991) nell'analisi del MITC4. Nel lavoro [7] si dimostrano stime dell'errore che sono ottimali in rapporto alla regolarità della soluzione e il grado polinomiale del metodo. Si deve osservare che lo stesso risultato è stato ottenuto independentemente e con un lieve anticipo da altri autori, pur se con una dimostrazione differente.

Infine, nel lavoro [25], in collaborazione con R. Stenberg, C. Chinosi e C. Lovadina, si è introdotto invece uno stimatore dell'errore per l'elemento Falk-Tu per il problema della piastra secondo il modello di Reissner-Mindlin. Le difficoltà numeriche per il problema di Reissner-Mindlin sono principalmente legate al cosidetto fenomeno del "locking" di taglio, che può deteriorare fortemente le proprietà di convergenza del metodo numerico per piccoli valori dello spessore. Nel lavoro [25] si introduce un indicatore locale per l'errore e lo si dimostra essere affidabile ed efficiente, indipendentemente dallo spessore, sia dal punto di vista teorico sia con alcuni test numerici.

Plasticità

In collaborazione con F. Auricchio del Dipartimento di Meccanica Strutturale di Pavia, mi sono dedicato allo sviluppo di nuovi metodi numerici per la risoluzione di legami costitutivi in plasticità. In particolare, abbiamo trattato legami costitutivi plastici di von-Mises con incrudimenti cinematici e isotropici del materiale. Il problema è il seguente: assegnato, in un qualunque punto del materiale, una storia delle deformazioni, si vuole calcolare la storia degli sforzi che ne segue. Se si è in grado di

risolvere, con un dato metodo numerico, questo problema "puntuale", è possibile risolvere problemi di deformazione di un intero corpo materiale plastico (brevemente, questo viene fatto inserendo il risolutore costitutivo puntuale all'interno di una strategia di tipo Newton-Raphson accoppiata con un metodo agli elementi finiti).
Il nuovo approccio al problema è assai diverso rispetto ai metodi classici, che si basano generalmente su una discretizzazione con differenze finite delle equazioni originali del modello. Riscrivendo invece le equazioni nello spazio degli sforzi "aumentato" introdotto da Hong e Liu (Int.J. of Non Lin.Mech., 2000), è possibile giungere a una formulazione dinamica del problema per la nuova variabile di interesse $\mathbf{X}$ appunto degli "sforzi aumentati":

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \, , \tag{4}$$

dove t rappresenta la variabile tempo e la funzione vettoriale $\mathbf{F}$ ha una struttura molto semplice, in molti casi lineare.
Nella prima parte del lavoro [2] abbiamo generalizzato la costruzione di Hong e Liu a incrudimenti plastici anche isotropi e inoltre sviluppato un nuovo metodo discreto per la risoluzione del problema, basato sulla costruzione stessa e l'utilizzo di mappe esponenziali. Nella seconda parte, abbiamo invece operato diversi test numerici sia costitutivi puntuali che su un problema globale ai valori iniziali. Quest'ultimo è stato implementato combinando appunto il solutore costitutivo con il metodo ad elementi finiti per problemi nonlineari di FEAP. Abbiamo confrontato i nostri risultati con quelli ottenuti con la tecnica del "return map", un metodo di comprovata affidabilità molto utilizzato in ingegneria. I test numerici sembrano mostrare che, pur essendo equivalente come carico computazionale, il nuovo metodo ha una maggiore precisione anche su storie di carico complicate.

D'altra parte, il nuovo algoritmo introdotto in [2] non soddisfa pienamente la cosidetta condizione di snervamento; tale condizione è verificata qualora alla fine di ogni passo plastico il tensore delle tensioni discrete giaccia sulla superficie di snervamento discreta. In [11] (in collaborazione con F. Auricchio e E. Artioli) abbiamo sviluppato e testato estensivamente un metodo esponenziale basato su una nuova formulazione al continuo di tipo (4). Il vantaggio primo della formulazione introdotta in [11] consiste nel garantire automaticamente la condizione di snervamento; diversamente da come accade per gli algoritmi classici di tipo return map (vedi ad esempio: Simo e Hughes, 1998, Springer), il nuovo metodo numerico presentato garantisce che tale condizione sia soddisfatta senza necessitare proiezioni a fine passo. Il metodo presentato è stato ulteriormente migliorato e analizzato dal punto di vista teorico in [12]. Il metodo introdotto in [12], oltre a soddisfare la condizione di snervamento, è costruito in maniera da verificare anche una serie di proprietà come accuratezza quadratica, esattezza in caso di carichi proporzionali, esattezza in assenza di incrudimento isotropo. I risultati numerici sono stati confrontati con metodi classici sia lineari che quadratici (radial return map, midpoint return map), con risultati decisamente positivi. In particolare, le iso-mappe dell'errore del nuovo metodo presentato (vedi [12]) mostrano come l'errore sia minimo anche per passi di integrazione Δt grandi; quest'ultima proprietà, chiaramente indipendente dall'ordine di accuratezza, è anch'essa di vitale importanza nelle applicazioni pratiche. Infine, in [12] è stata operata un'analisi teorica dei metodi di integrazione esponenziali sviluppati in [11,12]. L'analisi comprende in particolare l'ordine di accuratezza, l'esattezza sotto certe condizioni e la stabilità (convergenza) dei metodi.

Nel lavoro [17] si estendono sia il metodo esponenziale, sia il metodo classico midpoint return map, al caso del modello di plasticità von-Mises con incrudimento cinematico nonlineare, che presenta ulteriori difficoltà e un numero di variabili di storia ampiamente maggiore. Anche in questo caso si è operato un confronto numerico completo con risultati positivi.

Infine, in [20] si sono considerate le quattro principali metodologie midpoint utilizzate in plasticità. Il metodo midpoint ha il vantaggio, quando confrontato con il radial return map, di avere un'accuratezza quadratica anzichè lineare. In letteratura manca un confronto completo tra i quattro metodi midpoint. Nel lavoro [20] si sono dettagliati i quattro metodi per il legame costitutivo von Mises con incrudimenti lineari e si è operato sia un confronto teorico completo (sulla base di proprietà come la condizione di consistenza, il comportamento per passi lunghi, la stabilita', la complessità computazionale) che un confronto numerico (con comportamento su storie di carico puntuali, isomappe dell'errore, problemi al contorno). I risultati hanno chiaramente indicato quale dei quattro metodi è preferibile per le applicazioni.

Elasticità lineare e nonlineare (e metodi "Enhanced Strain")

In collaborazione con C. Lovadina, F. Auricchio e A. Reali, mi sono dedicato a uno studio dei metodi "enhanced" in elasticità. È noto che l'analisi con elementi finiti di problemi di elasticità (quasi) incomprimibile genera un effetto di locking dovuto al vincolo di incomprimibilità; la filosofia "enhanced" consiste nell'arricchire con funzioni locali non conformi lo spazio delle deformazioni allo scopo di curare questo fenomeno. I metodi ad elementi finiti che ne seguono hanno un costo computazionale aggiuntivo trascurabile, e danno ad esempio ottimi risultati di approssimazione in elasticità lineare.
In [8] abbiamo affrontato l'analisi dell'errore per elementi enhanced misti nel caso lineare, approfondendo ed estendendo alcune stime dell'errore già presenti in letteratura. Abbiamo trattato con particolare dettaglio l'analisi di alcuni elementi enhanced triangolari. In seguito abbiamo effettuato diverse prove numeriche per testare e confrontare i metodi enhanced triangolari e quadrangolari, anche in rapporto ad altri metodi più "classici" (utilizzando FEAP). In particolare, la convergenza della soluzione discreta rilevata nelle prove numeriche è in accordo completo con le stime teoriche sviluppate.
Nonostante i risultati pienamente soddisfacenti ottenuti nel caso lineare, l'estensione degli elementi finiti "enhanced" a problemi di elasticità nonlineare presenta gravi difficoltà. Infatti, come osservato in diversi lavori presenti in letteratura, la soluzione numerica ottenuta con metodi enhanced presenta sovente modi spuri assolutamente non fisici (i cosiddetti "hourglass"); inoltre, qualora il carico applicato fosse sufficientemente elevato, si può perdere completamente la convergenza del metodo a una qualunque soluzione.
Sono state proposte diverse cure per questi fenomeni di instabilità, ma l'analisi rigorosa di queste problematiche è allo stato attuale ancora decisamente carente. Motivati da queste considerazioni, in [9] abbiamo tentato un approccio rigoroso restringendoci a un particolare problema test del quale fosse possibile calcolare la soluzione esatta, e stimarne la stabilità in funzione dell'intensità del carico applicato. In altre parole, fissato un carico unitario $\mathbf{f}$, si è dimostrata l'esistenza di un valore α tale che, se il numero reale $\gamma \in (-\infty, \alpha)$, il problema linearizzato con carico $\gamma\mathbf{f}$ è coercivo attorno alla soluzione suddetta. La nostra analisi consiste dunque nell'osservare se il problema discretizzato con elementi finiti si mantiene coercivo (e dunque stabile) per gli stessi valori del modulo γ, cioè se riesce a mantenere le buone proprietà del problema continuo. Questo tipo di confronto è stato operato non solo sul metodo enhanced misto QME di Pantuso e Bathe, ma anche sul piu classico elemento conforme noto come MINI (entrambi danno ottimi risultati in elasticità lineare). In particolare, in [9] si dimostra che per entrambi i metodi il valore α del problema discreto è marcatamente inferiore a quello del problema originale. Conseguentemente, all'incrementare del carico il problema discreto perde stabilità decisamente prima del problema continuo. Inoltre, tramite alcuni test numerici, si mostra che effettivamente i problemi discreti rispettivi non convergono per valori di γ sufficientemente elevati, come previsto dalla teoria.

Un risultato abbastanza inaspettato ottenuto in [9] è, come già osservato, il fatto che anche elementi conformi come il MINI si siano rivelati inadeguati per il problema nonlineare proposto. Nel lavoro [33] abbiamo voluto approfondire questo aspetto. Abbiamo inanzitutto sviluppato un metodo di analisi della zona di stabilità, dove per zona di stabilità si intende essenzialmente un intervallo di intensità di carico all'interno del quale il relativo problema rimane stabile. Tale metodo è ispirato al lavoro [18] descritto in seguito e si basa sulla realizzazione esatta del vincolo di incomprimibilià. Questo approccio, che ha il limite di essere applicabile a una classe ristretta di problemi, è però in grado di individuare con esattezza la zona di stabilità del problema continuo, come dimostrato in [33]. Di conseguenza, in [33] abbiamo potuto fare un confronto quantitativo tra le zone di stabilità del problema continuo e quelle di alcuni metodi agli elementi finiti classici in elasticità, ad esempio il $Q2P1$, su un paio di problemi test. Lo studio mostra come tutti i metodi di elementi finiti analizzati abbiano una zona di stabilità notevolmente ristretta rispetto a quella del problema continuo, il che apre diversi interrogativi di affidabilià e possibili cure.

Metodi Mimetic Finite Differences

Le differenze finite mimetiche (in breve MFD) sono un metodo numerico per l'analisi di problemi alle derivate parziali che generalizza, in un certo senso, quello degli elementi finiti. Nello schema MFD si può infatti riconoscere una struttura simile a quella degli elementi finiti, ma generalizzata a griglie totalmente generiche formate da elementi poligonali (poliedrici in tre dimensioni) anche non convessi. Questo è essenzialmente reso possibile grazie a una scrittura del problema discreto in termini diretti dei relativi gradi di libertà, senza esplicitare completamente le rispettive funzioni di base. Ne segue che gli operatori algebrici e differenziali che appaiono nel problema continuo devono essere sostituiti da operatori discreti, costruiti in maniera da soddisfare certe proprietà fondamentali. Uno dei vantaggi principali del metodo consiste chiaramente nella maggior flessibilità della griglia; questa flessibilità lo rende anche un ottimo terreno di applicazione per metodi adattivi e di raffinamento. Nel lavoro [24] ho proposto e analizzato teoricamente uno stimatore locale dell'errore per il metodo MFD proposto da Brezzi-Lipnikov-Shashkov-Simoncini (M^{3}AS e SINUM), che tratta il problema della diffusione in forma mista. Questo stimatore utilizza un "post-processing" delle pressioni, che garantisce una migliore approssimazione delle stesse e costituisce un risultato di per se. Lo stimatore è dimostrato essere affidabile e accurato rispetto a una norma di tipo energia che comprende anche la pressione ottenuta col "post-processing". Nel lavoro [27], in collaborazione con G. Manzini, abbiamo esteso lo stimatore a casi piu generali (condizioni al bordo non omogenee, miglior scalamento rispetto ai salti del tensore di diffusività) e operato diversi test numerici. I risultati sono in completo accordo con la teoria e mostrano la robustezza dello stimatore, nonchè i chiari miglioramenti della strategia adattiva proposta in constrasto con una strategia di raffinamento uniforme.

I metodi MFD sono tradizionalmente di ordine basso, come accade per il metodo sopra menzionato di B.L.S.S. Nel lavoro [29], in collaborazione con G. Manzini, abbiamo invece proposto un metodo MFD del secondo ordine per il problema della diffusione in forma mista. Per questo metodo si descrive in particolare la costruzione della matrice dei prodotti scalari locali, un aspetto chiave nello sviluppo di metodi MFD, e se ne dimostrano le corrette proprietà di stabilità. Infine, si mostrano le proprietà di convergenza del metodo con diversi test numerici. Lo schema ha un ordine di convergenza che guadagna un $O(h)$, con h diametro degli elementi, se confrontato con il metodo originale del primo ordine. Questo miglioramento vale sia per la variabile vettoriale che per la variabile scalare post-processata, qualora misurata in una norma H^1 discreta. L'analisi teorica della convergenza del metodo, in completo accordo con i risultati numerici appena menzionati, è stata sviluppata in [32] in collaborazione anche con K. Lipnikov di Los Alamos.

Infine, in collaborazione con V. Gyrya, G. Manzini e K. Lipnikov, nel lavoro [31] si è iniziato lo studio di come sviluppare il metodo MFD anche per il problema di Stokes. Questo problema nasconde diversi punti di interesse, sia legati alla costruzione del metodo e dei relativi operatori, ma anche alla stabilità dello schema discreto. Questo filone è stato sviluppato in ulteriori lavori che appaiono tra quelli non ancora pubblicati.

Metodi di decomposizione di domini in meccanica strutturale

In collaborazione con C. Lovadina e L. Pavarino di Milano, in [13] si affronta il problema della *Domain Decomposition*, intesa come metodo di precondizionamento, nell'ambito dell'elasticità quasi incomprimibile:

$$\begin{cases} \text{Trovare } \mathbf{u} \in [H^1_0(\Omega)]^d \text{ tale che} \\ \\ 2\mu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \lambda \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{u}) \mathrm{div}(\mathbf{v}) = < \mathbf{f}, \mathbf{v} > \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1_0(\Omega)]^d \ , \end{cases} \tag{5}$$

dove il dominio Ω rappresenta il corpo elastico, $\mathbf{u}$ gli spostamenti, $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'operatore gradiente simmetrico, $\mathbf{f}$ il carico applicato e μ, λ sono costanti positive del materiale. Come noto, il condizionamento del problema discreto, anche qualora fosse trattato con un metodo in forma mista stabile, esplode quando l'indice di incomprimibilità λ/μ del materiale tende a infinito. In questo ambito, esistono già risultati riguardanti il precondizionamento tramite Domain Decomposition del problema discretizzato con formulazioni miste, le quali utilizzano anche il campo incognito delle pressioni. Ciò che è assente in letteratura, è l'approccio diretto al problema misto con pressioni condensate. Tale problema discreto equivale a una discretizzazione diretta del problema ellittico definito positivo (5), in cui si opera un rilassamento della parte volumetrica. I vantaggi numerici di questa seconda formulazione sono molteplici, ad esempio il numero minore di gradi di libertà e il fatto di poter risolvere un sistema lineare definito positivo anzichè di punto sella. In [13] si propone e analizza un metodo di tipo Balancing Neumann-Neumann per il problema discreto dell'elasticità quasi-incomprimibile nella sua forma definita positiva rilassata, applicabile a una generale classe di metodi ad elementi finiti stabili. Si dimostra e testa numericamente la scalabilità e quasi-ottimalità del precondizionatore, nonchè l'indipendenza del condizionamento del sistema dal parametro di incomprimibilità λ/μ.

Nel lavoro [35], in collaborazione anche con C. Chinosi, si propone invece per la prima volta in letteratura un precondizionatore di tipo Domain Decomposition per il problema della piastra Reissner-Mindlin (discretizzato con gli elementi MITC, tra i più utilizzati in ingegneria). Il numero di condizionamento di tale problema, che si comporta come $K \sim t^{-2}h^{-2}$, per piccoli valori dello spessore t può raggiungere valori molto elevati. In [35], si propone un metodo di tipo BDDC (Balancing Domain Decomposition by Constraints, introdotto da Dorhmann nel 2003) e lo si dimostra essere scalabile uniformemente nello spessore. In altre parole, il numero di condizionamento del sistema precondizionato si comporta come $K \sim (1 + h/H)$, dove H rappresenta la dimensione dei sottodomini, ed è indipendente da t. Le difficoltà principali che si incontrano nella dimostrazione sono legate alla particolare forma del funzionale energia (2), che non corrisponde facilmente ad alcuna norma sui lati dei sottodomini asintoticamente in t. Infine, nel lavoro si valida ulteriormente il metodo con diversi test numerici, in accordo con la teoria.

Metodi isogeometrici con i NURBS

In molte applicazioni dell'ingegneria, come ad esempio nell'industria automobilistica o aero-navale, i domini di interessi vengono descritti con l'utilizzo del Computer Aided Design. Il CAD utilizza a sua volta funzioni NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) come funzioni di base, a causa delle loro ottime proprietà di descrizione geometrica. Contrariamente, i metodi agli elementi finiti, applicati per risolvere problemi alle derivate parziali su questi domini, utilizzano funzioni polinomiali a tratti. Questa differenza tra le funzioni usate per descrivere il dominio e quelle usate per il "solver" causano una serie di difficoltà, non ultima la necessità di generare una griglia polinomiale che approssimi il dominio originale. Il metodo isogeometrico NURBS è un metodo numerico che utilizza invece, in un contesto isoparametrico, funzioni NURBS anzichè polinomiali anche per la risoluzione del problema. Nel lavoro [14], in collaborazione con T.J.R. Hughes, Y. Bazily, J. Cottrell dell'ICES (Texas) e G. Sangalli, si è operata per la prima volta una analisi matematica del metodo, con uno studio della accuratezza e della stabilità in diversi contesti della meccanica. In particolare abbiamo dimostrato che, al pari degli spazi polinomiali a tratti, anche gli spazi isoparametrici NURBS godono di ottime proprietà di interpolazione in norme Sobolev.

Infine, nel lavoro [18], si è analizzato ed implementato un metodo "stream formulation" con i NURBS per l'elasticità incomprimibile. Lo spazio discreto delle funzioni a divergenza nulla viene descritto come il rotore ("curl") di uno spazio di funzioni scalari NURBS sufficientemente regolari. Questo metodo ha il vantaggio di soddisfare il vincolo di divergenza nulla in modo esatto, anzichè in modo approssimato come accade in genere con gli elementi finiti. Applicazioni di questo metodo nell'ambito dell'elasticità in grandi deformazioni sono state considerate in [33], si veda la sezione sull'elasticità.

LAVORI SU RIVISTE INTERNAZIONALI

1. F. Auricchio, L. Beirão da Veiga and C. Lovadina, *Remarks on the asymptotic behaviour of*

Koiter shells, "Computers and Structures" 80:735-745 (2002)

2. F. Auricchio and L. Beirão da Veiga, *On a new integration scheme for von-Mises plasticity with linear hardening*, "Int. J. for Numer. Meth. in Engnr." 56:1375-1396 (2003)
3. L. Beirão da Veiga, *Asymptotic energy behavior of two classical intermediate benchmark shell problems*, "Math. Models and Meth. Appl. Sci" 13:1279-1302 (2003)
4. L. Beirão da Veiga, *Uniform error estimates for a class of intermediate cylindrical shell problems*, "Numerische Mathematik", 96:661-689 (2004)
5. L. Beirão da Veiga and C. Chinosi, *Numerical evaluation of the asymptotic energy behavior of intermediate shells with application to two classical benchmark tests*, "Computers and Structures", 82:525-534 (2004)
6. L. Beirão da Veiga, *Finite element methods for a modified Reissner-Mindlin free plate model*, "Siam J. on Numerical Analysis", 42:1572-1591 (2004)
7. L. Beirão da Veiga, *Optimal error bounds for the MITC4 plate bending element*, "CALCOLO", 41:227-245 (2004)
8. F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina and A. Reali, *An Analysis of some mixed-enhanced finite element for plain linear elasticity*, "Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.", 194:2947-2968 (2005)
9. F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina and A. Reali, *A Stability Study of some Mixed Elements for Finite Elasticity Problems*, "Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.", 194:1075-1092 (2005)
10. L. Beirão da Veiga, *Asymptotic study of the solution for pinched cylindrical shells*, "Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.", 194:1113-1139 (2005)
11. E. Artioli, F. Auricchio and L. Beirão da Veiga, *Integration schemes for von-Mises plasticity models based on exponential maps: numerical investigations and theoretical considerations*, "Int. J. for Numer. Meth. in Engnr.", 64:1133-1165 (2005)
12. E. Artioli, F. Auricchio and L. Beirão da Veiga, *A novel "optimal" exponential-based integration algorithm for von-Mises plasticity with linear hardening: theoretical analysis on yield consistency, accuracy and convergence and numerical investigations*, "Int. J. for Numer. Meth. in Engnr.", 67:449-498 (2006)
13. L. Beirão da Veiga, C. Lovadina e L. Pavarino, *Positive Definite Balancing Neumann-Neumann preconditioners for Nearly Incompressible Elasticity*, "Numerische Matematik", 104:271-296 (2006)
14. Y. Basilevs, L. Beirão da Veiga, J. Cottrell, T. J. R. Hughes e G. Sangalli *Isogeometric Analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes*, "Math. Models and Meth. Appl. Sci", 16:1031-1090 (2006)
15. L. Beirão da Veiga e C. Lovadina, *Asymptotics of Shell Eigenvalue Problems*, "Comp. Rend. Math.", vol 342, 9:707-710 (2006)
16. L. Beirão da Veiga, J. Niiranen and R. Stenberg, *A posteriori error estimates for the plate bending Morley element*, "Numerische Mathematik", 106:165-179 (2007)
17. E. Artioli, F. Auricchio e L. Beirão da Veiga, *Second order integration algorithms for von-Mises plasticity with a non-linear kinematic hardening mechanism*, "Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.", 196:1827-1846 (2007)

18. F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, A. Buffa, C. Lovadina, A. Reali e G. Sangalli, *A fully locking-free isogeometric approach for plane linear elasticity problems: a stream function formulation*, "Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.", 197:160-172 (2007)

19. L. Beirão da Veiga, J. Niiranen and R. Stenberg, *A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates I: error analysis*, SIAM Journal of Numerical Analysis, 45:2047-2071 (2007)

20. E. Artioli, F. Auricchio and L. Beirão da Veiga, *Generalized midpoint integration algorithms for J_2 plasticity with linear hardening*, "Int. J. for Numer. Meth. in Engnr.", 72:422-463 (2007)

21. L. Beirão da Veiga, I. Paris e D. Chapelle *Towards improving the MITC6a triangular shell element*, "Computers and Structures", 85:1589-1610 (2007)

22. E. Artioli, L. Beirão da Veiga, H. Hakula e C. Lovadina, *Free Vibrations for Some Koiter Shells of Revolution*, "Appl. Math. Lett.", 21: 1245-1248 (2008)

23. L. Beirão da Veiga, J. Niiranen and R. Stenberg, *A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates II: numerical tests*, "Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.", 197:1850-1864 (2008)

24. L. Beirão da Veiga, *A residual based error estimator for the Mimetic Finite Difference method*, "Numer. Math", 108: 387-406 (2008)

25. L. Beirão da Veiga, C. Chinosi, C. Lovadina e R. Stenberg, *A priori and a posteriori error analysis for a family of Reissner-Mindlin plate elements*, BIT Numerical Mathematics, 48: 189-213 (2008)

26. L. Beirão da Veiga, H. Hakula e J. Pitkäranta *Asymptotic and numerical analysis of the eigenvalue problem of a clamped cylindrical shell*, "Math. Models and Meth. Appl. Sci." 18: 1983-2002 (2008)

27. L. Beirão da Veiga e G. Manzini, *An a-posteriori error estimator for the mimetic finite difference approximation of elliptic problems*, "Int. J. for Numer. Meth. in Engnr.", 76: 1696-1723 (2008)

28. L. Beirão da Veiga e C. Lovadina, *An Interpolation Theory approach to Shell Eigenvalue Problems*, "Math. Models and Meth. Appl. Sci.", 18: 2003-2018 (2008)

29. L. Beirão da Veiga e G. Manzini, *A higher-order formulation of the mimetic finite difference method*, "SIAM J. on Scientific Computing" 31:732-760 (2008)

30. E. Artioli, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina e H. Hakula *On the asymptotic behaviour of shells of revolution in free vibration*, "Comput. Mech." 44:45-60 (2009)

31. L. Beirão da Veiga, V. Gyrya, K. Lipnikov e G. Manzini, *Mimetic finite difference method for the Stokes problem on polygonal meshes*, "J. Comput. Phys." 228:7215-7232 (2009)

32. L. Beirão da Veiga, K. Lipnikov e G. Manzini, *Convergence analysis of the high-order mimetic finite difference method*, "Numer. Math." 113:325-356 (2009)

33. F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina e A. Reali, *The importance of the exact satisfaction of the incompressibility constraint in nonlinear elasticity: mixed FEM versus NURBS-based approximation*, "Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.", 199:314-323 (2010)

34. L. Beirão da Veiga e K. Lipnikov, *A mimetic discretization of the Stokes problem with selected edge bubbles*, "Siam J. Sci. Comput." SIAM J. Sci. Comput. 32:875-893 (2010)

35. L. Beirão da Veiga, C. Chinosi, C. Lovadina e L. Pavarino, *Robust BDDC preconditioners for Reissner-Mindlin plate bending problems and MITC elements*, "SIAM J. Numer. Anal.", 47:4214-4238 (2010)

36. L. Beirão da Veiga, *A Mimetic discretization method for linear elasticity*, "Math. Mod. Numer. Anal." 44:231-250 (2010)

37. L. Beirão da Veiga, J. Niiranen e R. Stenberg, *A posteriori error analysis for the Morley plate element with general boundary conditions*, "Int. J. Numer. Meth. Engrg.", 83:1-26 (2010)

38. L. Beirão da Veiga, K. Lipnikov e G. Manzini, *Error analysis for a mimetic discretization for the steady Stokes problem on polyhedral meshes*, "Siam. J. Numer. Anal." 48:1419-1443 (2010)

39. F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, T.J.R. Hughes, A. Reali e G. Sangalli, *Isogeometric Collocation Methods*, "Math. Models and Meth. Appl. Sci.", 20:2075-2107 (2010)

40. L. Beirão da Veiga e D. Mora, *A mimetic discretization of the Reissner-Mindlin plate bending problem*, "Numer. Math.", 117: 425-462 (2011)

41. L. Beirão da Veiga, A. Buffa, J. Rivas e G. Sangalli, *Some estimates for h-k-p refinement in Isogeometric Analysis*, "Numer. Math.", 118:271-305 (2011)

42. L. Beirão da Veiga, A. Buffa, D. Cho e G. Sangalli, *IsoGeometric analysis using T-splines on two-patch geometries*, "Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.", 200: 1787-1803 (2011)

43. L. Beirão da Veiga, K. Lipnikov e G. Manzini, *Arbitrary-Order Nodal Mimetic Discretizations of Elliptic Problems on Polygonal Meshes*, "SIAM J. Numer. Anal.", 49: 1737-1760 (2011)

44. L. Beirão da Veiga, J. Droniou e G. Manzini, *A unified approach to handle convection terms in Finite Volumes and Mimetic Discretization Methods for elliptic problems*, "IMA J. Numer. Analysis", 31: 1357-1401 (2011)

LAVORI IN CORSO DI STAMPA SU RIVISTE INTERNAZIONALI
(con eventuale preprint e DOI qualora già disponibile)

45. L. Beirão da Veiga e M. Verani, *A posteriori boundary control for FEM approximation of elliptic eigenvalue problems*, "Num. Meth. for PDE", DOI: 10.1002/num.20621

46. L. Beirão da Veiga, A. Buffa, C. Lovadina, M. Martinelli e G. Sangalli, *An isogeometric method for the Reissner-Mindlin plate bending problem*, "Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.", DOI:10.1016/j.cma.2011.10.009

47. L. Beirão da Veiga, D. Mora e R. Rodrigues, *Numerical analysis of a locking-free mixed finite element method for a bending moment formulation of Reissner-Mindlin plate model*, in corso di stampa su "Num. Meth. for PDE"

48. L. Beirão da Veiga, D. Cho e G. Sangalli, *Anisotropic NURBS approximation in Isogeometric Analysis*, in press on "Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.", DOI:10.1016/j.cma.2011.10.016

49. P. Antonietti, L. Beirão da Veiga e M. Verani, *A Mimetic Discretization of Elliptic Obstacle Problems*, in corso di stampa su "Math. of Comp."

50. L. Beirão da Veiga, D. Cho, L. Pavarino e S. Scacchi, *Overlapping Schwarz Methods for Isogeometric Analysis*, in corso di stampa su"SIAM J. Numer. Anal."

PREPRINT (SOTTOPOSTI/ACCETTATI SU RIVISTA INTERNAZIONALE)

51. attualmente un totale di ulteriori 8 lavori sottoposti a rivista sono in fase di refereeing

ALTRI LAVORI

52. L.Beirão da Veiga *Theoretical and numerical study of shell intermediate states on particular cylindrical and toroidal problems*, "Istituto Lombardo (Rend. Sc.)" A 134:133-161 (2002)

ELENCO ATTI DI CONVEGNO

P1. F.Auricchio, E.Artioli, L.Beirão da Veiga *A new integration scheme for von-Mises plasticity : numerical investigations*, atti del GIMC2004 - Genova.

P2. F.Auricchio, L.Beirão da Veiga, C.Lovadina and A.Reali *Studio di stabilita' per alcuni elementi finiti misti per problemi elastici in grandi deformazioni*, atti del GIMC2004 - Genova.

P3. L.Beirão da Veiga and F.Brezzi, *Reissner-Mindlin plates with free boundary conditions*, atti dei Convegni Lincei 210, convegno "Whence the Boundary Conditions in Modern Continuum Physics" (14-16 ottobre 2002).

P4. F.Auricchio, L.Beirão da Veiga, C.Lovadina and A.Reali, *Enhanced strain methods for elasticity problems*, atti del ECCOMAS 2004 - Jyväskylä, Finlandia.

P5. F.Auricchio, E.Artioli, L.Beirão da Veiga *A new integration algorithm for the von-Mises elasto-plastic model*, atti del Colloquium Lagrangianum, 4-7 dicembre 2004, Venezia.

P6. Harry Hakula, Ville Havu and L.Beirão da Veiga *Long-range boundary layers in shells of revolution*, atti della Fifth International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures, 1-4 Giugno 2005, Salzburg, Austria.

P7. E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirão da Veiga *An optimal integration scheme for the von-Mises constitutive model based on exponential maps*, Computational Plasticity Fundamentals and Applications, Ed. D.R.J. Owen, E. Onate, B. Suarez, 2005.

P8. E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirão da Veiga *Numerical tests on an optimal integration scheme for the von-Mises plasticity model based on exponential maps*, atti del XVII Congresso AIMETA, 11-15 Settembre 2005, Firenze.

P9. L.Beirão, J.Niiranen and R.Stenberg da Veiga *A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates with free boundary conditions*, atti del ENUMATH 2005, Santiago de Compostela, Spagna.

P10. L.Beirão, J.Niiranen and R.Stenberg da Veiga *A new finite element method for Kirchhoff plates*, atti del ECCM2006, 5-8 Giugno 2006, Lisbona, Portogallo.

P11. E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirão da Veiga *Numerical Testing on Return Map algorithms for von-Misen plasticity with nonlinear hardening based on a generalized midpoint integration scheme*, atti del ECCM2006, 5-8 Giugno 2006, Lisbona, Portogallo.

P12. E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirão da Veiga *Numerical testing on return map algorithms for von-Mises plasticity with nonlinear hardening based on midpoint integration schemes*, atti del GIMC2006, 26-28 giugno 2006, Bologna.

P13. F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, A. Reali *Stability of Some Finite Element Methods for Finite Elasticity Problems*, in Mixed Finite Element Technologies, editori: C. Carstensen e P. Wriggers, Springer (2007).

P14. L.Beirão da Veiga, I.Paris e D.Chapelle *A stabilized MITC6 triangular shell element* nei Proceedings della European Conference on Smart Systems, 26-28 Ottobre 2006, Roma.

P15. L.Beirão, J.Niiranen and R.Stenberg da Veiga *A new finite element method for Kirchhoff plates*, in Series on Adv.in Math. for Appl.Sci. Vol. 75, editori V.Cutello, G.Fotia e L.Puccio, SIMAI Conference 8, 2007.

P16. E. Artioli, F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, *Double-Step Midpoint Methods for J2 Plasticity with Nonlinear Hardening*, Procs IX International Conference on Computational Plasticity - COMPLAS IX, E. Oñate and D. R. J. Owen (Eds), Barcelona 5-7 September, 2007.

P17. L. Beirão da Veiga, *A local error estimator for the Mimetic Finite Difference Method*, Bollettino UMI, Serie IX, Vol I., N.2, Giugno 2008.

P18. F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, A. Reali, *Stability of Some Finite Element Methods for Finite Elasticity Problems* in Mixed Finite Element Technologies, Series: CISM International Centre for Mechanical Sciences , Number 509, P.Wriggers and C. Carstensen Editors (2009).

- Preprint successivi al anno 2008 ancora da aggiornare

TESI

T1. L.Beirão da Veiga, *Equazioni linearizzate dei gusci e loro comportamento asintotico*, Tesi di Laurea, 2000.

T2. L.Beirão da Veiga, *Theoretical and Numerical Analysis of some Problems in Structural Mechanics*, Tesi di Dottorato, Portogallo, 2004.

T3. L.Beirão da Veiga, *Theoretical and Numerical Analysis of some Thin Structures and Nonlinear Elasticity Problems*, Tesi di Dottorato, Italia, 2005.

Pavia, ____________________

In fede, Lourenço Beirão da Veiga

____