

Contenuti delle lezioni di Geometria 4 – a.a 2018/2019 – Marina Bertolini

4 marzo 2019

Introduzione al corso e informazioni di carattere organizzativo.

Richiami di topologia generale: topologia quoziente, contrazioni, esempi di spazi quozienti. Unione a un punto e superfici topologiche ottenute per identificazione di poligoni.

([M] Cap.5)

5 marzo 2019

Richiami sull'omotopia tra funzioni e tra spazi topologici. Retratti e retratti di deformazione.

Esempi. Richiami sul gruppo fondamentale di uno spazio connesso per archi e proprietà.

([M] Cap.10 e 11)

11 marzo 2019

Richiami sui gruppi con presentazioni e abelianizzato di un gruppo. Teorema di Seifert -Van Kampen per il calcolo del gruppo fondamentale. Esempi: gruppo fondamentale dell'unione a un punto di due circonferenze e del toro.

([M] Cap. 14)

12 marzo 2019

Definizione di spazio topologico localmente euclideo (di dimensione n) e di varietà topologica. Primi esempi. Introduzione alle varietà topologiche a bordo ed esempi.

([M] Cap.7, §7.4)

14 marzo 2019

Ancora sulle varietà a bordo. Bordo del prodotto di varietà a bordo.

Correzione esercizi assegnati.

Definizione di atlante liscio, struttura differenziabile e varietà differenziabile.

Teorema sugli atlanti massimali. ([B] Cap.III, §1 e 2 – [AT1] Cap. 2, § 2.1)

19 marzo 2019

Correzione esercizi assegnati su varietà topologiche e topologiche a bordo. Bordo del prodotto di varietà a bordo.

Struttura differenziabile sulle sfere con le proiezioni stereografiche. ([AT1] Cap. 2, esempio 2.1.28).

21 marzo 2019

Applicazioni differenziabili e loro composizione. ([B] Cap.III, §3 – [AT1] Cap. 2, § 2.2)

Definizione di diffeomorfismo tra varietà lisce ed esempi. Considerazioni sulle diverse strutture differenziabili di varietà. ([B] Cap.III, §3 – [AT1] Cap. 2, § 2.2)

Enunciato del teorema del rango per applicazioni da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m .

Teorema del rango per applicazioni lisce tra varietà differenziabili.

([B] Cap.III, §4 e 5 – [AT1] Cap. 2)

26 marzo 2019

Compatibilità tra i due atlanti definiti sulle sfere. ([AT1] Cap. 2, esempio 2.1.28).

Proprietà delle basi numerabili per la topologia quoziente.

Struttura differenziabile sugli spazi proiettivi reali. ([AT1] Cap. 2, § 2.1, ([B] Cap.III, §1 e 2)

Prodotti di varietà differenziabili. Esercizi su varietà differenziabili come sottoinsiemi di \mathbb{R}^n (grafici locali) con la determinazione esplicita dell'atlante.

28 marzo 2019

Definizione di immersione, sommersione, embedding. ([B] Cap.III, §4 e 5 – [AT1] Cap. 2)

Esempi.

Definizione di sottovarietà (regolare) e immersa. ([B] Cap.III, §4 e 5 – [AT1] Cap. 2, oss. 2.4.9 e definizione 2.4.10)

Immersioni iniettive per varietà compatte.

2 aprile 2019

Le proiezioni dagli spazi prodotti come applicazioni lisce. La proiezione sugli spazi proiettivi come applicazione liscia e caratterizzazione delle funzioni lisce sugli spazi proiettivi. Esercizi su applicazioni lisce ed embedding. Svolgimento temi d'esame.

4 aprile 2019

Criterio affinché una fibra sia una sottovarietà.

([B] Cap.III, §5 Teorema 5.7 e Corollario 5.9). Esempio di S^n .

Introduzione alla definizione di Spazio Tangente: R-algebra dei germi di funzioni lisce in un punto. Mappa pull-back. ([AT1] Cap. 2, § 2.3)

9 aprile 2019

Esercizi su applicazioni differenziabili tra sottoinsiemi di \mathbb{R}^n e tra spazi proiettivi. Svolgimento esercizi e temi d'esame.

11 aprile 2019

Derivazioni e spazio tangente Derivate direzionali.

([AT1] Cap. 2, § 2.3)

Interpretazione geometrica dei vettori tangenti e loro espressione in coordinate locali.

([AT1] Cap. 2, § 2.3)

Mappa differenziale e sue proprietà.

16 aprile 2019

Esercizi di ricapitolazione in preparazione alla prima prova intermedia.

30 aprile 2019

Correzione esercizio assegnato.

Base dello spazio tangente.

Seconda parte sulla interpretazione geometrica dello spazio tangente. Cambio di coordinate.

([AT1] Cap. 2, § 2.3)

7 maggio 2019

Prima Prova intermedia

9 maggio 2019

Espressione del differenziale in coordinate locali. ([AT1] Cap. 2, § 2.3).

Spazio tangente nei punti delle fibre di una mappa liscia.

Spazio cotangente: base e espressione in coordinate di un elemento dello spazio cotangente.

([AT1] Cap. 2, Osservazione 2.3.36 e Cap.3 Osservazione 3.1.14).

Esercizi su spazi tangenti

14 maggio 2019

Esercizi su spazi tangenti a varietà.

16 maggio 2019

Richiami di algebra lineare: spazio $\text{Hom}(V,W)$ e prodotto diretto di spazi vettoriali. ([AT1] Cap. 1, § 1.1). Applicazioni bilineari e multilineari.

([AT1] Cap. 1)

Prodotto tensoriale di spazi vettoriali con proprietà universale. Unicità del prodotto tensoriale.

([AT1] Cap. 1)

20 maggio 2019

Esistenza del prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Proprietà e rappresentazione con matrici.

Esempi.

([AT1] Cap. 1)

Algebra tensoriale. Forme multilineari alternanti.

Operatore di antisimmetrizzazione. Algebra esterna.

([AT1] Cap. 1)

21 maggio 2019

Esercizi su spazi tangenti a varietà e di algebra multilineare.

23 maggio 2019

Considerazioni finali sull'Algebra esterna ed esercizi.

Partizioni dell'unità: esistenza di una partizione dell'unità subordinata ad un atlante liscio. ([A] Cap. 2, § 2.7)

27 maggio 2019

Lezione sospesa per comunicazione rettorale.

28 maggio 2019

Definizione di fibrato vettoriale.

Funzioni di transizione di un fibrato e costruzione di un fibrato a partire dalle funzioni di transizione. ([A] Cap. 3, § 3.1).

Costruzione dei fibrati tangenti e cotangenti ad una varietà liscia. ([A] Cap. 3, § 3.1).

29 maggio 2019

Esercizi e complementi di algebra multilineare e fibrati vettoriali.

30 maggio 2019

Sezioni di un fibrato vettoriale e Campi vettoriali. Esempi di campi vettoriali.

Riferimenti locali e cambio di carta. ([A] Cap. 3, § 3.2).

Esercizi.

30 maggio 2019

Esercizi di algebra multilineare. Esercizi sui fibrati vettoriali.

3 giugno 2019

Introduzione alle forme differenziali: fibrato delle r -forme, cambio di base delle fibre e funzioni di transizione. ([A] Cap. 3, Esempio 3.2.14).

Forme differenziali in coordinate locali. Pull back di forme differenziali ed esempi.

([A] Cap. 4, § 4.1).

4 giugno 2019

Differenziale esterno e proprietà.

([A] Cap. 4, § 4.1).

Esercizi sulle forme differenziali e svolgimento temi d'esame. Calcolo di funzioni di transizione per fibrati vettoriali.

5 giugno 2019

Cilindro e Nastro di Moebius come fibrato vettoriale ed esempi di campi vettoriali sulle sfere.

Esercizi e svolgimento temi d'esame.

6 giugno 2019

Orientabilità di una varietà differenziabile: carte equiorientate e atlante orientato.

([A] Cap. 4, § 4.2).

Forme di volume ed equivalenza tra orientabilità ed esistenza di una forma di

volume. Orientazione delle Sfere. Criterio di non orientabilità ed applicazione al nastro di Moebius

([A] Cap. 4, § 4.2).

Orientabilità del bordo di varietà differenziabili a bordo.

10 giugno 2019

Integrazione di forme differenziali.

([A] Cap. 4, § 4.3).

12 giugno 2019

Teorema di Stokes per varietà orientabili e sua dimostrazione.

([A] Cap. 4, § 4.3).

Referenze

[AT1] M. Abate, F. Tovena, Geometria Differenziale, New York Springer-Verlag 2011.

[B] W.M. Boothby, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Orlando Academic Press, Inc. 1986

[M] M. Manetti, Topologia, New York Springer-Verlag