Programma d'esame per Geometria 4 (9cfu) – a.a 2018/2019

Varietà differenziabili

1)Definizione di spazio topologico localmente euclideo (di dimensione n) e di varietà topologica. Primi esempi. Le sfere S^n e gli spazi proiettivi reali $\mathbb{P}^n_R$ come varietà topologiche.
Varietà topologiche a bordo. Varietà topologiche a bordo.

2)Definizione di atlante liscio, struttura differenziabile e varietà differenziabile. Teorema sugli atlanti massimali.
Atlante differenziabile sulle sfere. Struttura differenziabile sugli spazi proiettivi reali.
Applicazioni differenziabili e loro composizione. Definizione di diffeomorfismo tra varietà lisce ed esempi.
Teorema del rango per mappe lisce tra varietà differenziabili. Definizione di immersione, sommersione, embedding. Esempi. Definizione di sottovarietà (regolare) e immersa.
Immersioni iniettive per varietà compatte e criterio affinché una fibra sia una sottovarietà.

3)Derivazioni e spazio tangente. Mappa pull-back. Derivate direzionali.
Interpretazione geometrica dei vettori tangenti e loro espressione in coordinate locali.
Mappa differenziale e sue proprietà. Base dello spazio tangente e cambio di coordinate.
Espressione del differenziale in coordinate locali. Spazio tangente nei punti delle fibre di una mappa liscia.
Partizioni dell'unità (senza dimostrazioni)

6)Applicazioni e forme multilineari.
Prodotto tensoriale di vettoriali finitamente generati: proprietà universale. Mult(V_1*, …, V_n*) come esempio di prodotto tensoriale di V_1, …V_n. Allineeamenti associati ai tensori rispetto basi fissate. Tensori decomponibili. Prodotto tensoriale e algebra tensoriale. Forme multilineari alternanti. Tensori alternanti. Operatore di antisimmetrizzazione. Prodotto wedge e algebra esterna.

7)Definizione di fibrato vettoriale. Funzioni di transizione e costruzione di un fibrato a partire dalle funzioni di transizione. Fibrato tangente e fibrato cotangente ad una varietà liscia.
Sezioni di un fibrato vettoriale. Campi vettoriali e cambio di carta. Riferimento locale.

8)Fibrato delle r-forme su una varietà. r-forme differenziali su una varietà. Il prodotto wedge e l'algebra delle forme. Differenziale esterno e sua autonullificità. Forme chiuse e forme esatte. Pullback di forme. Proprietà del pullback (senza dimostrazione).

9)Orientabilità di una varietà differenziabile e forme di volume. Orientazione delle Sfere.
Orientazione del bordo di una varietà.
Integrazione di forme differenziali. Teorema di Stokes e alcune sue conseguenze.

Curve e superfici differenziabili

1) CURVE PIANE: Introduzione alle Curve nel piano. Ascissa curvilinea. Equazioni di Frenet.

Interpretazione geometrica della curvatura. Teorema di rigidità per curve nel piano.
Curvatura per curve piane non parametrizzate mediante ascissa curvilinea. Calcolo della curvatura dell'Ellisse e della cicloide. Curvatura per curve date in forma cartesiana. Le coniche non degeneri.

2) CURVE NELLO SPAZIO: Prodotto vettoriale. Curve nello spazio. Equazioni di Frenet. L'elica Cilindrica . Calcolo della sua ascissa curvilinea, torsione e curvatura. Interpretazione della torsione. Teorema di rigidità per curve nello spazio (solo enunciato).

3) SUPERFICI:
-Definizione di Superficie Elementare, o foglio semplice di superficie. Definizione di spazio tangente e piano tangente affine. Interpretazione geometrica del piano tangente. Grafico di una funzione C^{∞}. Definizione di superficie regolare. Esempi (la sfera). Teorema del cambio delle coordinate.

-Prima forma fondamentale. Calcolo di lunghezze, ampiezza di angoli e area di regioni.
-Mappe differenziabili tra superfici. La mappa differenziale. Esempi. Il campo normale.

-La mappa di Gauss. Operatore di Weingarten. Linearità e simmetria. Curvatura normale. Curvature principali come max e min della curvatura normale e come autovalori reali dell'operatore di Weingarten. Interpretazione geometrica della seconda forma fondamentale.

-Linee di curvatura, curve asintotiche. Caratterizzazione di punti sulla superficie. Superfici con tutti i punti ombelicali.

-Isometrie locali tra superfici.
Simboli di Christoffel. Il teorema egregium di Gauss (Idea della dimostrazione) e sue conseguenze.

- Definizione di geodetiche e derivata covariante. Cenni sul Teorema di Gauss Bonnet e sue applicazioni.

Testi di riferimento

M.Abate, F.Tovena, Curve e superfici, New York Springer-Verlag 2006

M.Abate, F.Tovena, Geometria Differenziale, New York Springer-Verlag 2011

W.M. Boothby, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Orlando Academic Press, Inc. 1986

R. Bott, L. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology. New York Springer Verlag 1982

E. Sernesi, Geometria 2, Bollati Boringhieri 1994