MATEMATICA DISCRETA (Comunicazione Digitale)
preparazione alla seconda prova intermedia
Docenti Bertolini e Lanteri

A) Si determinino le scritture in base 10 ed in base 7 del numero che in base 3 si scrive 20102; ovvero si completi:

$$(\ 2\ 0\ 1\ 0\ 2\ )_3 = (\qquad\qquad)_{10} = (\qquad\qquad)_7$$

B) Si consideri la seguente permutazione su cinque elementi:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

i) $\alpha^5 = I$
ii) $\alpha^{-3} = \alpha^2$
iii) $\alpha^{77}(4) = 2$
iv) α è dispari.

C)Sia $X = \mathbb{R}_2[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a due e si consideri la seguente operazione in X

$$(ax^2 + bx + c) \otimes (a'x^2 + b'x + c') = aa'x^2 + bb'x + cc'.$$

Si dica, giustificando brevemente la risposta, se le seguenti affermaziono sono V(vere), F(false):
a) $\otimes$ è un'operazione associativa.
b) $\otimes$ ammette elemento neutro.
c) non esiste l'inverso di $x^2 - 1$ rispetto $\otimes$.

D) Sia $\mathbb{R}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti reali e siano $a(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ e $b(x) = 3x + 3$ due polinomi di $\mathbb{R}[x]$.
Si dica, giustificando brevemente la risposta, se le seguenti affermaziono sono V(vere), F(false):
a) $b(x)$ è un polinomio irriducibile in $\mathbb{R}[x]$.
b) -1 è radice doppia di $a(x)$ in $\mathbb{R}$
c) $M.C.D.(a(x), b(x)) = 5(x + 1)$

E) Sono dati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi

$$f(x) \;=\; x^4 \;+\; x^3 \;-\; x^2 -\; 2x -\; 2,$$

e

$$g(x) = \; x^2 + \; k.$$

a) Si determini il valore di k per cui $f(x)$ risulta divisibile per $g(x)$.
b) Si determini una scomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili.

F) Sia G l'insieme delle matrici reali 2×2 della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con a parametro reale.
a) Si provi che G è chiuso rispetto all'operazione di prodotto riga per colonna.
b) Si provi che l'operazione di prodotto riga per colonna in G è commutativa.
c) Si stabilisca se G è o meno gruppo rispetto all'operazione di prodotto riga per colonna.

G) Si determinino le decomposizioni in fattori irriducibili dei seguenti polinomi

$$3x^4 \;+\; 10x^3 \;-\; 10x \;-\; 3,$$

$$4x^4 \;-\; 9,$$

$$x^4 \;+\; 324,$$

nell'anello di polinomi $\mathbb{Q}[x]$.

H) Sia S_7 il gruppo delle permutazioni (gruppo simmetrico) su 7 lettere e siano

$$\sigma = (123456) \quad \text{e} \quad \tau = (123)(456).$$

Si dica, giustificando brevemente la risposta, se le seguenti affermazioni sono V (vere), F (false):
i) σ è una permutazione pari
ii) $\sigma\tau$ è una permutazione pari
iii) $\sigma^5 = \sigma$
iv) $\sigma\tau = \tau\sigma$.

I) Sia $Q[x]$ l'anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti razionali e in $Q[x]$ si considerino

$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 2$ e $q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$.

i) Dopo aver verificato che $x = 2$ è radice sia di p che di q, si decompongano sia p che q in fattori irriducibili.

ii) Si determinino quoziente e resto della divisione di p per q.

L) $(S, \circ)$ la struttura algebrica, in cui $S = \{a, b, c, d\}$ e l'operazione $\circ$ è associativa, così definita

∘	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

1) a è l'elemento neutro di $(S, \circ)$;
2) c è l'inverso destro di b rispetto a $\circ$;
3) $(S, \circ)$ è un gruppo;

M) Si consideri l'applicazione lineare

$$F_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definita da:

$$F_a(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} ay \\ x + az \end{bmatrix},$$

con a parametro reale.

a) Al variare di a, i determini la dimensione $dim(ker(F_a))$ del nucleo di F_a.

b) Si stabilisca se esistono valori di a tali che F_a sia iniettiva.

c) Nel caso $a = 0$, si determini la dimensione $dim(Im(F_0))$ dell'immagine di F_0.

N) Al variare del parametro reale h, si determini la caratteristica della matrice

$$\begin{pmatrix} h & 0 & h \\ 3 & 3 & 6 \\ h & 2 & 4 \\ 2h-1 & 0 & h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbf{R}.$$

O) Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4x - 4y + z \\ x - y \\ 2x - 2y - z \\ x - y - 2z \end{pmatrix}$$

Si dica, giustificando brevemente la risposta, se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

1) ϕ è un omomorfismo (applicazione lineare) di spazi vettoriali;
2) ϕ è iniettivo;
3) ϕ è suriettivo;
4) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \phi(\mathbb{R}^3)$

P) Sia $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$G(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x + y \\ x \\ x - y \end{pmatrix}.$$

i) Si determini la dimensione ed una base di $ker(G)$.
ii) Si determini la dimensione di $Im(G)$
iii) Si stabilisca per quali valori dei parametri reali α e β il vettore $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ è contenuto in $Im(G)$.

Q) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l´applicazione lineare così definita:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 2z \\ x + y + 2z \\ y \end{pmatrix}$$

i) determinare la matrice rappresentativa di rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
ii) determinare la dimensione del sottospazio vettoriale $Im(f)$.
iii) determinare la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $Ker(f)$.

R) Dare la definizione di base di uno spazio vettoriale

a) Dare un esempio di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$ che non costituiscono una base.

b) Dare un esempio di generatori $\mathbb{R}^2$ che non costituiscono una base.

S) Si cosideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y + z \\ y - z \end{pmatrix}.$$

Si dica, giustificando la risposta, se:

1. f è lineare;
2. f è iniettiva;
3. f è suriettiva;
4. Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $f\left(\mathbb{R}^3\right)$.

T) Si determini, al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$