

METODI MATEMATICI PER LA COMUNICAZIONE DIGITALE
(Comunicazione Digitale)
esercizi di preparazione alla prima prova intermedia

D) Sia $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali e si consideri la relazione R in \mathbf{N} definita come segue:

$$aRb \text{ se e solo se } 3a + b \text{ è pari.}$$

a) Si determinino i numeri naturali b tali che $7Rb$.

b) Si dica (giustificando brevemente la risposta) se le seguenti affermazioni sono V(vera), F(falsa):

b_1) R è riflessiva

b_2) R è transitiva

b_3) R è di equivalenza

b_4) R è di ordine

E) Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ e sia R la relazione su X così definita

$$R = \{(a, a), (b, c), (c, b), (d, b), (e, e)\}$$

i) Si costruisca la matrice di incidenza di R .

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vera), F(falsa):

ii) R è riflessiva

iii) R è antisimmetrica

iv) R è transitiva

v) R è un'applicazione da X a X .

G) Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ e sia R la relazione su A così definita

$$R = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, c), (c, d), (d, a), (d, e)\}$$

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vera), F(falsa):

i) R è riflessiva

ii) R è simmetrica

iii) R è antisimmetrica

iv) R è transitiva

v) R è un'applicazione da A a A .

H) Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ e sia R la relazione su A così definita

$$R = \{(a, a), (a, c), (a, e), (b, b), (b, c), (c, c), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}$$

i) Stabilire se R è una relazione d'equivalenza ed in caso affermativo elencare gli elementi della classe di equivalenza di $\{b\}$.

ii) Stabilire se R è una relazione d'ordine ed in caso affermativo elencare gli spigoli del relativo diagramma che hanno un vertice in c .

I) Sia \mathbb{Z} l'insieme dei numeri relativi e si consideri la relazione R in \mathbb{Z} definita come segue:

$$nRm \text{ se e solo se } |n| \geq |m|$$

ove $|t|$ denota il valore assoluto del numero intero t .

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

- i) R è riflessiva
- ii) R è simmetrica
- iii) R è antisimmetrica
- iv) R è transitiva

L) Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ e sia R la relazione su X così definita

$$R = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, c), (c, b), (d, b), (e, e)\}$$

i) Si costruisca la matrice associata ad R .

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

- ii) R è riflessiva
- iii) R è simmetrica
- iv) R è transitiva
- v) R è antisimmetrica.

M) Sia $A = \{a, b, c, d\}$, e si consideri la relazione R in A la cui matrice d'incidenza è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

i) È possibile completare la matrice A in modo che R risulti una relazione d'ordine?

ii) È possibile completare la matrice A in modo che R risulti una relazione d'equivalenza?

N) Si risolvano i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ y + 2z + w = 3 \\ x + 2y + 4z + 4w = 5 \end{cases}$$

O) Si determini il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

P) Sia $V = \mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due a coefficienti reali.

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vera), F(falsa):

- 1) $V = \langle 2 + x, 1 + x^2 \rangle$;
- 2) $V = \langle 5 - x + 3x^2, 1 + x^2, 1 - x - x^2, 2 - x \rangle$;
- 3) $\langle 5 - x + 3x^2, 1 + x^2 \rangle = \langle 1 - x - x^2, 2 - x \rangle$.

Q) Si risolva nel campo reale il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 4x - 4y + z = 5 \\ x - y = 1 \\ 2x - 2y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

R) Si risolva nel campo reale il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 4x - 4y + z = 5 \\ x - y = 1 \\ 2x - 2y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

S) Si considerino le seguenti matrici reali:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Si dica giustificando brevemente la risposta se le seguenti affermazioni sono V(vere), F(false):

- i) AB è una matrice a 4 righe e 3 colonne
- ii) la matrice trasposta di A è la matrice A^t

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \\ 1 & -1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

- iii) la matrice C ammette inversa (in caso affermativo determinare la matrice inversa)
- iv) la matrice D ammette inversa (in caso affermativo determinare la matrice inversa)

T) Calcolare l'inversa delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$