Metodi Matematici per la Comunicazione Digitale
19 Giugno 2017

Cognome:	**Per ritirarsi ed evitare la valutazione del compito firmare:**
Nome:	
Matricola:	
Anno di Corso:	**RITIRATO/A**

Riservato alla Commissione						
Quesito	**D**	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	
Voto	4	7	7	7	7	**/30**

Esercizio 1 **(punteggio: 1+2+2+2)**

Date le seguenti permutazioni su 7 elementi, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, e $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

a) decomporre ρ e σ nel prodotto di cicli disgiunti e stabilire se sono pari o dispari,
b) stabilire se $\rho \circ \sigma^{-3} = I$ (il simbolo $\circ$ rappresenta l'usuale composizione di cicli),
c) calcolare σ^{29},
d) stabilire quale è il minimo intero n tale che $(\rho \circ \sigma)^n = I$.

Svolgimento

Esercizio 2 **(punteggio: 2+3+2)**

Sia $D = \left\{ A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ con l'usuale operazione di somma e prodotto di matrici.

1) Si verifichi che D è chiuso rispetto alla somma (+) e prodotto (∘) di matrici.
2) Si verifichi che $(D,+,\circ)$ è un anello.
3) Considerato l'anello $(\mathbf{R},+,\circ)$ dei numeri reali, e l'applicazione T: $(D,+,\circ) \to (\mathbf{R},+,\circ)$ definita da:

   $T(A) = a+b+c$ per ogni $A \in D$,

   si stabilisca se T è un omomorfismo di anelli.

<u>Svolgimento:</u>

Esercizio 3 **(punteggio: 2+2+3)**

Sia $f_k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione definita, al variare del parametro reale k, ponendo

$$f_k(x, y, z) = (x - y + 2z\,,\ k\,y - z\,,\ k\,y - z\,,\ x + (1+k)\,y - z), \qquad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

a) Verificare che f_k è lineare per ogni valore di k.
b) Stabilire per quali valori di k la f_k non è iniettiva e per tali valori determinare una base di $\mathrm{Ker}\, f_k$.
c) Stabilire per quali valori di k, il vettore $\mathbf{b} = (-2\,,\ k\,,\ k\,,\ k - 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}\, f_k$.

<u>Svolgimento</u>

Esercizio 4 **(punteggio: 3+4)**

Sia $V = \mathrm{M}(2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2 e si consideri l'endomorfismo $g : V \to V$ definito ponendo

$$g\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} w & y \\ z & x \end{bmatrix} \quad \text{per ogni matrice} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in V.$$

a) Stabilire se g è suriettivo.
b) Determinare autovalori ed autospazi di g.

Svolgimento

Metodi Matematici per la Comunicazione Digitale
19 Giugno 2017

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Anno di Corso:	

Domanda teorica **(punteggio: 4)**

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ un'applicazione lineare, dove $n < m$. Stabilire se f può essere suriettiva, motivando la risposta.

<u>Risposta argomentata</u>