Metodi Matematici per la Comunicazione Digitale - 19 Giugno 2017

10 giugno 2018

1 Esercizio 1

Date le seguenti permutazioni su 7 elementi, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(a) decomporre ρ e σ nel prodotto di cicli disgiunti e stabilire se sono pari o dispari.

$\rho = (1375)(246)$ e $\sigma = (142)(357)$.

Un n-ciclo con $n \geq 2$ è pari se n è dispari e dispari se n è pari perchè può essere scomposto nel seguente modo:

$$(a_1, \dots, a_n) = \underbrace{(a_1 a_n) \circ \cdots \circ (a_1 a_2)}_{n-1 \text{ scambi}}.$$

La composizione di due permutazioni entrambe pari o entrambe dispari è una permutazione pari, mentre componendo una permutazione pari con una dispari si ottiene una permutazione dispari. Perciò ρ è dispari, mentre σ è pari.

(b) stabilire se $\rho \circ \sigma^{-3} = id$

Dalla scomposizione in cicli disgiunti è facile vedere che $o(\sigma) = 3$, perciò $\sigma^{-3} = id$. Dunque $\rho \circ \sigma^{-3} = id$ se e solo se $\rho = id$, ma $\rho \neq id$ perchè muove degli elementi.

(c) calcolare σ^{29}

Siccome $29 \equiv -1 \pmod 3$,

$$\sigma^{29} = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

(d) stabilire $o(\rho \circ \sigma)$

$$\rho \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (1623),$$

perciò $o(\rho \circ \sigma) = 4$

2 Esercizio 2

Sia

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

con l'usuale somma e prodotto tra matrici.

1. Si verifichi che D è chiuso rispetto alla somma $(+)$ e al prodotto $(\cdot)$ di matrici.

   $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

   $$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & 0 & 0 \\ 0 & b+f & 0 \\ 0 & 0 & c+g \end{pmatrix} \in D$$

   $$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot f & 0 \\ 0 & 0 & c \cdot g \end{pmatrix} \in D$$

2. Si verifichi che $(D, +, \cdot)$ è un anello.

   Siccome $(M(2; \mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello e $D \subset M(2; \mathbb{R})$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto matriciali e $\mathbb{I} \in D$, D è un sottoanello di $M(2; \mathbb{R})$ e, quindi, un anello.

3. Considerato l'anello $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e l'applicazione $T : (D, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$ definita da $T(A) = a + b + c \; \forall A \in D$, si stabilisca se T è un omomorfismo di anelli.

   Un omomorfismo di anelli unitari manda l'unità nell'unità, ma $T(\mathbb{I}) = 3 \neq 1$.

3 Esercizio 3

Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita, al variare di $k \in \mathbb{R}$, ponendo

$$f_k(x, y, z) = (x–y + 2z, ky–z, ky–z, x + (1 + k)y–z)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Verificare che f_k è lineare per ogni valore di k.

É sufficiente notare che

$$f_k(x, y, z) = A_k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 1+k & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Stabilire per quali valori di k la f_k non è iniettiva e per tali valori determinare una base di $\mathrm{Ker}(f_k)$.

$\mathrm{Ker}(f_k)$ è esattamente formato dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$A_k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Riduco A_k a gradini:

- Sottraggo la prima riga alla quarta

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 2+k & -3 \end{pmatrix}$$

- Scambio la seconda e la quarta riga

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2+k & -3 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}$$

- Sottraggo alla seconda riga la terza

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}$$

- Sottraggo alla quarta riga la terza

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sottraggo alla terza riga $k/2$ per la seconda riga

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1+k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 1$, car(A_k)=r(f_k)= 3 e per il teorema di nullità più rango n(f_k)=$3 - 3 = 0$, perciò f_k risulta iniettiva.

Se $k = 1$, allora car(A_k)=r(f_k)= 2 e dalla forma a scalini di A_1 si conclude che

$$Ker(f_1) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x-y+2z = 0, 2y-2z = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} =< \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

(c) Stabilire per quali valori di k, il vettore $\boldsymbol{b} = (-2, k, k, k-1)$ appartiene a Im(f_k).

$\boldsymbol{b} \in Im(f_k)$ se e solo se $det(A_k|\boldsymbol{b}) = 0$.

$$det(A_k|\boldsymbol{b}) = det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & k & -1 & k \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 1+k & -1 & k-1 \end{pmatrix}) = 0$$

perchè la seconda e la terza riga sono identiche, perciò $\boldsymbol{b} \in Im(f_k)$ per ogni valore reale di k.

4 Esercizio 4

Sia $V = M(2;\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2 e si consideri l'endomorfismo $g : V \longrightarrow V$ definito ponendo per ogni matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V$

$$g(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} w & y \\ z & x \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se g è suriettivo.

Una volta notato che g agisce solamente scambiando x con w è facile vedere che g è suriettivo (in realtà addirittura biettivo). Data una qualsiasi matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V$,

$$g(\begin{pmatrix} w & y \\ z & x \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare autovalori ed autospazi di g.

Scegliendo la base canonica

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sia per il dominio, sia per il codominio, la matrice rappresentativa di g è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è $\chi_A(t) = det(A - t\mathbb{I}) = (t-1)^3(t+1)$, da cui segue che gli autovalori di g sono $\sigma(A) = \{\pm 1\}$. Dato un autovalore $\lambda \in \sigma(A)$ l'autospazio associato non è altro che il nucleo dell'endomorfismo $A - \lambda\mathbb{I}$.

$$A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La prima e la seconda colonna sono uguali, quindi il vettore $(1, 0, 0, -1)$ sta nel nucleo di $A + \mathbb{I}$; dal polinomio caratteristico sappiamo che la molteplicità algebrica dell'autovalore -1 è 1, perciò lo è anche la sua molteplicità geometrica. Dunque

$$V_{-1} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

$$A - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In questo caso notiamo che le due colonne in mezzo sono nulle, perciò $(0, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$ sono nel nucleo. La prima e l'ultima colonna, invece, sono l'una l'opposto dell'altra, perciò $(1, 0, 0, -1)$ sta nel nucleo. Visto che la molteplicità algebrica di 1 è 3 ed abbiamo trovato tre vettori linearmente indipendenti in V_1, essi generano tutto l'autospazio.