Metodi Matematici per la Comunicazione Digitale - 19 Giugno 2017

1 Esercizio 1

1. Determinare il valore del parametro reale h in modo che il polinomio

$$p_h(x) = x^3–2x^2–5x + 4 + 2h$$

sia divisibile per il polinomio

$$q(x) = x^2–x–6.$$

Effettuo la divisione tra $p_h(x)$ e $q(x)$ nel consueto modo, ottenendo che

$$p_h(x) = q(x)(x - 1) + 2(h - 1).$$

Perciò $q(x)|p_h(x)$ se e solo se il resto della divisione è nullo, ovvero per $h = 1$.

2. Per il valore di h determinato al punto 1) si scomponga il polinomio $p_h(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili.

Dal punto precedente so che $p_1(x) = (x - 1)q(x)$. D'altra parte è facile trovare che le radici di $q(x)$ sono 3 e -2, da cui segue che $q(x) = (x-3)(x+2)$. Perciò la scomposizione in polinomi irriducibili di $p_{-1}(x)$ è data dalla seguente equazione:

$$p_1(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

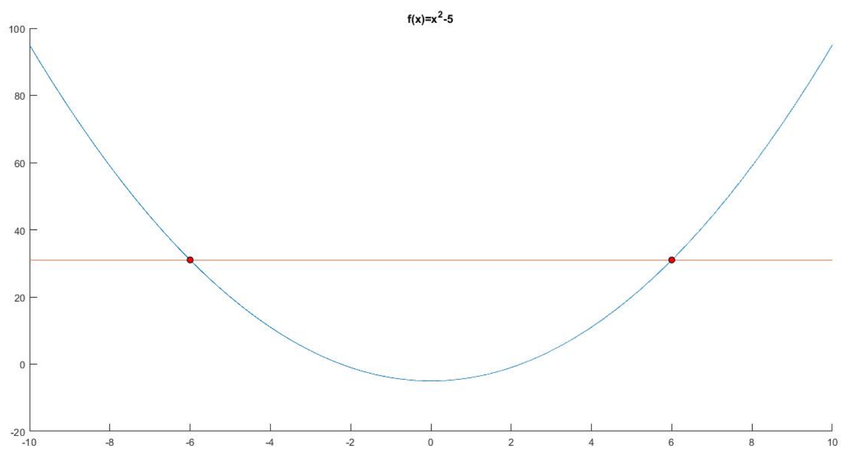
2 Esercizio 2

Siano f, g, h le applicazioni dall'insieme $\mathbb{R}$ in sé stesso definite nel modo seguente:

$$f(x) = x^2 – 5; \qquad g(x) = –3x + 3; \qquad h(x) = 2x – a + 1, \qquad a, x \in \mathbb{R}.$$

1. Stabilire se f è iniettiva.

   f non può essere iniettiva, in quanto è pari e quindi $f(x) = f(-x)$.



2. Mostrare che g è biunivoca e calcolarne la funzione inversa.

   Dato un valore reale arbitrario $y \in \mathbb{R}$

   $$y = -3x + 3 \text{ se e solo se } x = l(y) = \frac{3 - y}{3}.$$

   Da quanto sopra si deduce che per ogni valore reale $y \in \mathbb{R}$, esiste un unico valore $x \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) = y$ e, quindi, g è biunivoca e $g^{-1} = l$.

3. Stabilire se esiste un valore del parametro a tale che $h^2 = h \circ h$ sia l'applicazione identica (il simbolo $\circ$ denota l'usuale composizione di applicazioni).

   $$h^2(x) = 2h(x)–a+1 = 2(2x–a+1)–a+1 = 4x-2a+2 = x \text{ se e solo se } a = \frac{3x+2}{2}.$$

   Siccome il valore di a che renderebbe $h^2(x) = h(x)$ dipende da x, non esiste un valore di a tale che $h^2 = h$.

3 Esercizio 3

In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali: $S = Ker(g)$, nucleo dell'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$g(x, y, z, w) = (x + 2y + z + 2w, y + w, x + y + z + w),$$

per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ e T, generato dai vettori $\boldsymbol{a} = (1, 0, -1, 2)$ e $\boldsymbol{b} = (0, 0, 0, 1)$.

a Determinare una base di S.

Scegliendo la base canonica in dominio e codominio, la matrice rappresentativa di g è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservando che la prima e la seconda colonna sono uguali rispettivamente alla terza e alla quarta colonna e che la prima e la seconda colonna sono linearmente indipendenti, si deduce che $car(A) = r(g) = 2$. Dal teorema di nullità più rango, deriva che $n(g) = 2$ e, sfruttando la prima osservazione, si trova una base del nucleo:

$$ker(g) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

In alternativa si risolve il sistema $A|\mathbf{0}$.

b Determinare una base di $S \cap T$.

Notando che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$$

si ottiene che

$$T =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} > .$$

Inoltre $(0, 1, 0, -1)$ e $\boldsymbol{b}$ sono linearmente indipendenti (non essendo uno multiplo dell'altro), quindi una base dell'intersezione è data da:

$$S \cap T =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

c Determinare la dimensione del sottospazio $S + T$.

La formula di Grassmann ci permette di concludere che $dim(S+T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T) = 3$.

4 Esercizio 4

Sia $V = M(2; \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali2×2 e si consideri l'applicazione $f : V \to V$ definita ponendo

$$f(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x & z \\ y & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V.$$

a Verificare che f è un'applicazione lineare.

Siano

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} x+a & y+b \\ z+c & w+d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+a & z+c \\ y+b & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & z \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$$

$$f(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda z \\ \lambda y & 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix})$$

b Determinare la dimensione e una base di $Ker(f)$.

$$f(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x & z \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e slo se

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Perciò

$$Ker(f) =< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

e ha dimensione 1.

c Stabilire se $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Im(f)$.

Si noti che le matrici nell'immagine di f hanno sempre l'entrata $(2, 2)$ nulla, perciò $\mathbb{I}$ non può essere in $Im(F)$.

5 Domanda teorica

1. Dare la definizione di numero primo.

   Un intero $p \in \mathbb{Z}$ diverso da 0, ± 1 è detto primo se non ha divisori propri, quindi se $p = ab$, allora a e b sono ± 1 o $\pm p$.

2. Enunciare il teorema fondamentale dell'aritmetica.

   Sia $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, \pm 1$. Si ha

   $$a = \pm p_1 \cdot \cdots \cdot p_k$$

   dove $p_i \in \mathbb{N}^+$ sono numeri primi e $k \in \mathbb{N}^+$. Inoltre, tali $p_1, \ldots, p_k$ sono unici (a meno di ripeterli e scambiarli tra loro).