MMCD-6 aprile 2018

1 Esercizio 1

Si dia la definizione di relazione d'equivalenza su un insieme X, specificando il significato delle proprietà che devono essere soddisfatte, e di classe di equivalenza individuata da un elemento $x \in X$. Si dia un esempio di relazione d'equivalenza nel caso in cui $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dove $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, e si descrivano le classi di equivalenza.

Una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su di un insieme X è un sottoinsieme $\mathcal{R} \subset X \times X$ che rispetta le seguenti tre proprietà:

- **riflessività**: $\forall x \in X$, $(x, x) \in \mathcal{R}$;
- **simmetria**: $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$;
- **transitività**: $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$.

La classe di equivalenza di un elemento $x \in X$ è data dalla seguente espressione:

$$[x] = \{y \in X : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Un esempio di relazione di equivalenza sui numeri naturali è quella di appartenenza ad un sottoinsieme. Prendiamo $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è primo}\}$ e poniamo che $(n, m) \in \mathcal{R}$ se $n, m \in A$ o se $n, m \in \mathbb{N} \setminus A$; $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza sono A e $\mathbb{N} \setminus A$.

2 Esercizio 2

Si consideri la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a Calcolare, mediante riduzione a gradini, indicando con chiarezza le operazioni eseguite, il rango di C e stabilire se tale matrice è invertibile.

- Sottraggo la prima riga alla seconda e alla quarta

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sottraggo alla terza due volte la seconda riga

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sommo alla quarta riga due volte la terza

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

C ha rango 4 ed è invertibile.

b Sia A la sottomatrice di C costituita dalle prime tre colonne e sia $\boldsymbol{b}$ l'ultima colonna di C. Posto $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$, si dica se il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è compatibile.

Siccome le colonne della matrice C sono linearmente indipendenti, il sistema non può essere compatibile.

3 Esercizio 3

Nello spazio vettoriale $V = M(2;\mathbb{R})$ delle matrici2×2 a elementi reali si considerino le tre matrici seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire se le tre matrici A, B, C sono linearmente indipendenti.

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} 2\alpha + \gamma & \beta \\ \beta & 2\gamma \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

se e solo se $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Perciò le matrici sono linearmente indipendenti.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale k, la matrice

$$D = \begin{pmatrix} k-2 & k+1 \\ k+1 & k(k-4) \end{pmatrix}$$

appartiene al sottospazio $U =< A, B >$ di V .

Scrivendo una generica combinazione lineare di A e B si arriva ad esprimere U nella seguente forma:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si vede, dunque, che D può essere espresso come combinazione lineare di A e B se e solo se ha l'entrata $(2, 2)$ nulla, perciò se e solo se $k \in \{0, 4\}$.

4 Esercizio 3

Sianof, g, h le applicazioni dall'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definite nel modo seguente:

$$f(x, y) = (x-1, 2y+2); \quad g(x, y) = (x+ay, -ax+y); \quad h(x, y) = (2xy, x-y)$$

per $a, x, y \in \mathbb{R}$.

i Determinare se esiste un valore di a tale che g sia l'applicazione identica.

$g(x,y) = (x+ay, -ax+y) = (x,y)$ per ogni coppia (x,y) se e solo se $a=0$.

ii Determinare l'espressione di $h \circ f$.

$$\begin{aligned} h \circ f(x,y) = h(x-1, 2y+2) &= (2(x-1)(2y+2), (x-1)-(2y+2)) = \\ &= (4x+4xy-4y-4, x-2y+1) \end{aligned}$$

iii Stabilire se f è iniettiva.

$f(x,y) = f(a,b) \Rightarrow x-1 = a-1$ e $2(y+1) = 2(b+1) \Rightarrow (x,y) = (a,b)$, perciò f è iniettiva.

iv Stabilire se h è biunivoca

h non può essere biunivoca, in quanto non è nemmeno iniettiva: $h(x,x) = h(-x,-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.