Metodi Matematici per la Comunic. Digit. (Matematica del Discreto) – 6 aprile 2018
Prima Prova Intermedia: Turno 1

Cognome:	**Per ritirarsi ed evitare la valutazione del compito firmare:**
Nome:	
Matricola:	
Anno di Corso:	**RITIRATO/A**

Riservato alla Commissione						
Quesito	**D**	**E1**	**E2**	**E3**		
Voto	7	8	8	9		**/30**

Domanda teorica **(punteggio: 7)**

Si dia la definizione di *relazione d'equivalenza* su un insieme X, specificando il significato delle proprietà che devono essere soddisfatte, e di *classe di equivalenza* individuata da un elemento *x* di X.
Si dia un esempio di relazione d'equivalenza nel caso in cui X=$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dove $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, e si descrivano le classi di equivalenza.

Svolgimento

Esercizio 1 **(punteggio: 4 + 4)**

Si consideri la matrice $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calcolare, mediante riduzione a gradini, indicando con chiarezza le operazioni eseguite, il rango di **C** e stabilire se tale matrice è invertibile.

b) Sia **A** la sottomatrice di **C** costituita dalle prime tre colonne e sia **b** l'ultima colonna di **C**. Posto $\mathbf{x} = [x, y, z]_{\mathbf{T}}$, si dica se il sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è compatibile.

Svolgimento:

Esercizio 2 **(punteggio: 4 + 4)**

Nello spazio vettoriale V = M(2;**R**) delle matrici 2×2 a elementi reali si considerino le tre matrici seguenti: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1) Stabilire se le tre matrici A, B, C sono linearmente indipendenti.
2) Stabilire per quali valori del parametro reale k, la matrice $D = \begin{bmatrix} k-2 & k+1 \\ k+1 & k(k-4) \end{bmatrix}$ appartiene al sottospazio $U = < A , B >$ di V, generato dalle matrici A e B.

<u>Svolgimento</u>

Esercizio 3 **(punteggio: 2+2+2+3)**

Siano f, g, h le applicazioni dall'insieme $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, dove $\mathbb{R}$ denota l'insieme dei numeri reali, definite nel modo seguente:

$f(x,y) = (x - 1, 2y+2)$; $g(x,y) = (x+ay, -ax + y)$; $h(x,y) = (2xy, x-y)$; $a, x, y \in \mathbb{R}$.

i) Determinare se esiste un valore di a tale che g sia l'applicazione identica.
ii) Determinare l'espressione di $h \circ f$ (il simbolo $\circ$ denota la composizione di applicazioni).
iii) Stabilire se f è iniettiva.
iv) Stabilire se h è biunivoca.

Svolgimento