**Metodi Matematici per la Comunic. Digit. (Matematica del Discreto) – 1 giugno 2018**
**Seconda Prova Intermedia**

| **Cognome:** | **Per ritirarsi ed evitare la valutazione del compito firmare:** |
|---|---|
| **Nome:** | |
| **Matricola:** | |
| **Anno di Corso:** | **RITIRATO/A** |

| **Riservato alla Commissione** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Quesito** | **E1** | **E2** | **E3** | **E3** | | |
| **Voto** | 8 | 8 | 8 | 8 | | **/30** |

**Esercizio 1** **(punteggio: 2+4+2)**

Nell'anello **R**[$x$] si consideri il polinomio:

$$p(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12\,x + 9$$

1) Stabilire se $x = 3$ è radice doppia per $p(x)$.
2) Dare la definizione di polinomio irriducibile e determinare la scomposizione di $p(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili.
3) Determinare il MCD monico tra $p(x)$ e il polinomio $q(x) = x^2 - 2x - 3$.

**Svolgimento**

**Esercizio 2** **(punteggio: 3 + 2 + 3 )**

Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali $V$ e $W$ di dimensioni $n$ ed $m$ rispettivamente.

a) Stabilire se è vera o falsa la seguente affermazione, giustificando la risposta: "$f$ è iniettiva se e soltanto se la matrice ad essa associata (rispetto ad opportune basi) ha caratteristica $n$ ".

b) Per $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathbf{R}^4$ e $f$ definita da $f(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z, 2x - y - z)$, determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Ker} f$.

c) Per $V$, $W$ e $f$ come in b), stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ il vettore $(1-\alpha, \alpha, 1, 2+\alpha)$ appartiene a $\operatorname{Im} f$.

**Svolgimento**

**Esercizio 3** **(punteggio: 3+2+3)**

Si consideri l'applicazione $f_k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$f_k(x, y, z) = (x + k^2 - 1, x + k y + z, y + k z),$$

con $k$ parametro reale.

1) Stabilire per quali valori di $k$, l'applicazione $f_k$ è lineare.
2) Osservato che $f_1$ è lineare, stabilire se è suriettiva.
4) Sempre per $k = 1$ determinare autovalori ed autospazi di $f_1$.

**Svolgimento:**

**Esercizio 4** **(punteggio: 2+2+2+2)**

Date le seguenti permutazioni di $S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ e $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

a) decomporre $\sigma$ e $\rho$ nel prodotto di cicli disgiunti e stabilire se sono pari o dispari;
b) stabilire quali sono i minimi interi positivi $h$, $k$ e $t$ tali che $\sigma^h = I$ , $\rho^k = I$ e $(\sigma \circ \rho)^t = I$, dove I denota la permutazione identica;
c) scrivere la permutazione $\sigma^{48}$;
d) scrivere la permutazione $\rho^{-20}$.

**Svolgimento**