Metodi Matematici per la Comunicazione Digitale - 1 giugno 2018

1 Esercizio 1

Nell'anello $\mathbb{R}[x]$ si consideri il polinomio:

$$p(x) = 2x^3 – 11x^2 + 12x + 9$$

.

1. Stabilire se $x = 3$ è radice doppia per $p(x)$.

   Per controllare se $x = 3$ è radice doppia di $p(x)$ è sufficiente verificare che $p(3) = 0$ e $p'(3) = 0$.

   $$p(3) = 2 \cdot 27 - 11 \cdot 9 + 12 \cdot 3 + 9 = 54 - 99 + 36 + 9 = 0$$

   . Invece, una volta trovato che $p'(x) = 6x^2 - 22x + 12$, si controlla che

   $$p'(3) = 6 \cdot 9 - 22 \cdot 3 + 12 = 54 - 66 + 12 = 0.$$

2. Dare la definizione di polinomio irriducibile e determinare la scomposizione di $p(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili.

   Un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado positivo è detto irriducibile quando, se $p(x) = f(x)g(x)$ con $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ implica che $deg(f(x)) = 0$ o $deg(g(x)) = 0$.

   Siccome al punto precedente si è osservato che $x = 3$ è radice doppia di $p(x)$, si ha che $(x-3)^2|p(x)$. Infatti, effettuando la divisione, si ottiene che

   $$p(x) = (2x + 1)(x - 3)^2,$$

   che è proprio la scomposizione in fattori irriducibili.

3. Determinare il MCD monico tra $p(x)$ e il polinomio $q(x) = x^2–2x–3$.

   Una volta osservato che $x = 3$ è radice anche di $q(x)$, che si può scomporre in fattori irriducibili

   $$q(x) = (x + 1)(x - 3),$$

   si veddde facilmente che il massimo comune divisore monico tra $p(x)$ e $q(x)$ è proprio $x - 3$.

2 Esercizio 2

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali V e W di dimensioni n ed m, rispettivamente.

a Stabilire se è vera o falsa la seguente affermazione, giustificando la risposta: " f è iniettiva se e soltanto se la matrice ad essa associata (rispetto ad opportune basi) ha caratteristica n ".

La caratteristica della matrice rappresentativa è uguale alla dimensione dell'immagine di f. Per il teorema della nullità più rango

$$r(f) = n - n(f)$$

. Perciò f è iniettiva se e solo se $n(f) = 0$ se e solo se $r(f) = n$ se e solo se la caratteristica della matrice associata è n, quindi l'affermazione è vera.

b Per $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^4$ e f definita da $f(x, y, z) = (x–y, y–z, x–z, 2x–y–z)$, determinare la dimensione e una base di $Ker(f)$.

La matrice associata a f è la seguente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riduco la matrice a gradini:

- Sottraggo alla terza riga la prima e alla quarta due volte la prima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Sottraggo alla terza e alla quata riga la seconda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$car(A) = 2$, perciò $n(f) = 1$ e, risolvendo il sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, si ottiene che

$$ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

c Per V, W e f come in b), stabilire per quali valori del parametro reale α il vettore $(1-\alpha, \alpha, 1, 2+\alpha)$ appartiene a $Im(f)$.

Effettuo le stesse operazioni del punto b) per portare A a gradini, ma con la matrice orlata col vettore $(1-\alpha, \alpha, 1, 2+\alpha)$, ottendendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Il sistema è risolubile se e solo se $\alpha = 0$, quindi $(1-\alpha, \alpha, 1, 2+\alpha) \in Im(f)$ se e solo se $\alpha = 0$.

3 Esercizio 3

Si consideri l'applicazione $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f_k(x, y, z) = (x + k^2 – 1, x + ky + z, y + kz),$$

con k parametro reale.

1. Stabilire per quali valori di k, l'applicazione f_k è lineare.

   f_k è lineare se e solo se $k \in \{\pm 1\}$, infatti, per esempio, presi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_k(\lambda(x, y, z)) = (\lambda x + k^2 – 1, \lambda(x + ky + z), \lambda(y + kz)),$$

che, in generale, è diverso da $\lambda f_k((x,y,z))$ per via della prima coordinata. Invece, se $k \in \{\pm 1\}$, f_k è rappresentata dalla moltiplicazione per una matrice:

$$f_k((x,y,z)) = A_k \boldsymbol{x}$$

dove

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

2. Osservato che f_1 è lineare, stabilire se è suriettiva.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome la seconda e la terza colonna sono identiche, il rango di f è minore di 3 e, quindi, f_1 non è suriettiva.

3. Sempre per $k = 1$ determinare autovalori ed autospazi dif_1.

Il polinomio caratteristico è dato da $\chi_{A_1}(t) = t(1-t)(t-2)$, dunque $\sigma(A_1) = \{0, 1, 2\}$. dal fatto che la seconda e la terza colonna siano uguali e che la molteplicità geometrica di 0 e 2 è 1 è molto semplice vedere che $V_0 =< (0,1,-1) >$ e $V_2 =< (0,1,1) >$. Per quanto riguarda l'autovalore 1, dobbiamo risolvere il sistema $(A - \mathbb{I})|\mathbf{0}$.

$$(A - \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha la prima colonna uguale alla terza, perciò $V_1 =< (1,0,-1) >$.

4 Esercizio 4

Date le seguenti permutazioni di S_7,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

a decomporre σ e ρ nel prodotto di cicli disgiunti e stabilire se sono pari o dispari;

$\sigma = (234)(56) = (24)\circ(23)\circ(56)$, $\rho = (123467) = (17)\circ(16)\circ(14)\circ(13)\circ(12)$ e sono, perciò, entrambe dispari.

b stabilire quali sono i minimi interi positivi h, k e t tali che $\sigma^h = id$, $\rho^k = id$ e $(\sigma \circ \rho)^t = id$;

$o(\sigma) = 6$, $o(\rho) = 6$. Invece $\sigma \circ \rho = (1324567)$ e, perciò, ha ordine 7.

c scrivere la permutazione ρ^{48};

Siccome l'ordine di $o(\rho) = 6$, $\rho^{48} = (\rho^6)^8 = id$.

d scrivere la permutazione σ^{-20}.

$\sigma^{-20} = \sigma^{-2} = (234)$.