

**Metodi Matematici per la Comunicazione Digitale**  
**14 Giugno 2019**

<b>Cognome:</b>	<b>Per ritirarsi ed evitare la valutazione del compito firmare:  RITIRATO/A</b>
<b>Nome:</b>	
<b>Matricola:</b>	
<b>Anno di Corso:</b>	

<b>Riservato alla Commissione</b>						
<b>Quesito</b>	<b>D</b>	<b>E1</b>	<b>E2</b>	<b>E3</b>	<b>E4</b>	
<b>Voto</b>	4	7	7	6	7	<b>/30</b>

**Esercizio 1**

**(punteggio: 2+2+2+1)**

Nell'insieme  $X = \mathbb{Z}$  dei numeri interi relativi, si consideri l'operazione  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$  definita da:

$$x * y = x + y - 5.$$

- 1) Provare che  $*$  è associativa e commutativa.
- 2) Stabilire se  $*$  ammette elemento neutro.
- 3) Stabilire quali elementi di  $X$  ammettono inverso rispetto a  $*$ .
- 4)  $(X,*)$  è un gruppo?

**Svolgimento**

**Esercizio 2****(punteggio: 5+2)**In  $K[x]$  si considerino i polinomi:

$$a(x) = x^3 + 4x^2 + x + 4 \quad \text{e} \quad b(x) = x^4 + 3x^2 + 2.$$

- 1) Nel caso  $K = \mathbb{R}$ , determinare il MCD monico tra  $a(x)$  e  $b(x)$  e scriverlo come combinazione di  $a(x)$  e  $b(x)$ .
- 2) Nel caso  $K = \mathbb{Z}_5$ , determinare tutti i MCD tra  $a(x)$  e  $b(x)$ .

**Svolgimento:**

**Esercizio 3****(punteggio: 3+3)**

Si consideri la matrice  $A_k = \begin{bmatrix} 2k-1 & 3 \\ 3k & 1 \end{bmatrix}$ , dove  $k$  è un parametro reale.

- a) Per i valori di  $k$  per cui è possibile si determini una matrice  $2 \times 2$  reale,  $X$ , tale che  $X A_k + X = I$ , dove  $I$  denota la matrice identica.
- b) Stabilire per quali valori di  $a$  esiste un'unica matrice  $X$  che soddisfa la condizione richiesta.

**Svolgimento**

**Esercizio 4****(punteggio: 2+2+3)**

Sia  $f_a: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione definita, al variare del parametro reale  $a$ , ponendo

$$f_a(x, y, z) = ((a+1)x + ay + z, ax + 2y + a(a^2 - 4), x + z), \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

- a) Stabilire per quali valori di  $a$  l'applicazione  $f_a$  è lineare.
- b) Stabilire per quali, tra i valori di  $a$  determinati al punto precedente,  $f_a$  è un isomorfismo.
- c) Posto  $a = 0$ , determinare autovalori ed autospazi di  $f_0$ .

**Svolgimento**

**Metodi Matematici per la Comunicazione Digitale**  
**14 Giugno 2019**

<b>Cognome:</b>	
<b>Nome:</b>	
<b>Matricola:</b>	
<b>Anno di Corso:</b>	

**Quesito**

**(punteggio: 4)**

Sia  $f: V \rightarrow W$  una applicazione lineare tra due spazi vettoriali reali della stessa dimensione  $n$ . Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa, fornendo una motivazione.

Nelle ipotesi fatte  $f$  è iniettiva se e soltanto se è suriettiva.

**Risposta:**