Metodi Matematici per la Comunic. Digit. (Matematica del Discreto) – 5 aprile 2019
Prima Prova Intermedia: Turno 1

Cognome:	**Per ritirarsi ed evitare la valutazione del compito firmare:**
Nome:	
Matricola:	
Anno di Corso:	**RITIRATO/A**

Riservato alla Commissione						
Quesito	**D**	**E1**	**E2**	**E3**		
Voto	7	8	8	9		**/30**

Domanda teorica **(punteggio: 7)**

Si dia la definizione di *relazione d'equivalenza* su un insieme X, specificando il significato delle proprietà che devono essere soddisfatte, e di *classe di equivalenza* individuata da un elemento x di X.
Si dia un esempio di relazione d'equivalenza nel caso in cui X=$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dove $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, e si descrivano le classi di equivalenza.

Svolgimento

Esercizio 1 **(punteggio: 4 + 4)**

a) Mediante il metodo di Gauss determinare il rango della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

indicando con chiarezza le operazioni elementari eseguite;

b) posto $\mathbf{x} = [x, y, z, w]_{\mathbf{T}}$, determinare le soluzioni del sistema omogeneo $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

<u>Svolgimento:</u>

Esercizio 2 **(punteggio: 4 + 4)**

Sia $V = \mathrm{M}(2;\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a elementi reali si consideri il sottoinsieme

$$U := \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V, \text{ tali che } c = b \right\}.$$

1) Verificare che U è un sottospazio vettoriale di V;
2) Stabilire se le matrici $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ costituiscono un sistema di generatori per U;
3) Stabilire se tali matrici sono linearmente indipendenti;
4) Determinare una base di U.

<u>Svolgimento</u>

Esercizio 3 **(punteggio: 2+2+2+3)**

Siano f, g, h le applicazioni dall'insieme $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, dove $\mathbb{R}$ denota l'insieme dei numeri reali, definite nel modo seguente:

$f(x,y) = (x - 1, 2y+2)$; $g(x,y) = (x+ay, -ax + y)$; $h(x,y) = (2xy, x-y)$; $a, x, y \in \mathbb{R}$.

i) Determinare se esiste un valore di a tale che g sia l'applicazione identica.
ii) Determinare l'espressione di $h\circ f$ (il simbolo $\circ$ denota la composizione di applicazioni).
iii) Stabilire se f è iniettiva.
iv) Stabilire se h è biunivoca.

Svolgimento