

Estrapolazione di Richardson

Sia Φ un qualsiasi metodo Runge-Kutta esplicito di ordine p e sia U_n l'approssimazione al tempo t_n .

Se

$$V = \Phi(t_n + \tau, t_n)U_n$$

$$W_1 = \Phi(t_n + \tau/2, t_n)U_n$$

$$W_2 = \Phi(t_n + \tau, t_n + \tau/2)W_1$$

Allora

$$\left\| \frac{W_2 - V}{2^p - 1} \right\| = O(\tau^{p+1}) \text{ stima l'errore di consistenza del metodo } \Phi$$

$$U_{n+1} = W_2 + \frac{W_2 - V}{2^p - 1} \text{ è un metodo di ordine } p+1$$

Adattività del passo

- si corregge il passo moltiplicandolo per una costante $q = \sqrt[p+1]{\frac{tol}{Err_n}}$ (vedi esercizio 6.3 delle esercitazioni teoriche)
- sebbene si sia stimato l'errore di consistenza del metodo di ordine p , si calcola la soluzione approssimata utilizzando il metodo di ordine $p+1$

nella pagina seguente uno schema dell'algoritmo.

schema dell'algoritmo

fissata una tolleranza **toll**, posto $r = 0.5$ ($0 < r < 1$ è un parametro di sicurezza),
assegnato τ (valore di tentativo per il primo passo),
inizializzati $t = t_0$, $U = v$, $n = 0$ (conta il n° dei passi)

while ($t < T$)

calcolo di V , W_1 , W_2

stima dell'errore $Err = \left\| \frac{W_2 - V}{2^p - 1} \right\|$

$\tau_{nuovo} = \sqrt[p+1]{\frac{r * toll}{Err}} \cdot \tau$ nuovo τ per prossima prova

if($Err \leq toll$) il passo ha avuto successo: assegno

$$U_{n+1} = W_2 + \frac{W_2 - V}{2^p - 1},$$

$t = t + \tau$,

$\tau = \min(\tau_{nuovo}, T-t)$

$n = n+1$

eventuale gestione stampe su video o file

else // il passo non ha avuto successo, devo ripeterlo

$\tau = \tau_{nuovo}$

end if

end while