Laboratorio 4

Obiettivi

1) Rapporto tra consistenza e regolarità. Confronto tra le prestazioni di un metodo di ordine 2 e uno di ordine 1

2) Stimare l'ordine p di un metodo usando la proprietà:

$$| U_N(T) - U_{2N}(T)| \sim | u(T) - U_N(T)| = O((1/N)^p)$$

dove $U_N(T)$ e $U_{2N}(T)$| sono le soluzioni approssimate al tempo T ottenute rispettivamente con un passo τ e un passo $\tau/2$ (ovvero con N passi e 2N passi)

Esercizio 4.1

Approssimare il seguente problema

$$\begin{cases} u'=t^q u, \; t\in(0,1) \\ u(1)=e^{1/(q+1)} \end{cases} \quad \text{Sol: } u(t)=\exp\left(\frac{t^{q+1}}{q+1}\right), \text{ dove } q > -1$$

con i metodi di Eulero Esplicito e di Eulero Modificato

$$U_{n+1} = U_n + \tau\, f(t_n + \tau/2 \,,\, U_n + (\tau/2)\, f(t_n \,,\, U_n)),$$

per $N = 10^k$, k = 1, 2, 3, 4.

Utilizzando la tabella degli errori finali stimare l'ordine dei due metodi nei casi q = -0.5, 0.1, 2.

e dare una giustificazione teorica ai risultati ottenuti. .

Lavoro aggiuntivo

Nel caso q = 2 confrontare le prestazioni dei due metodi in termini di costo/precisione.

Sempre nel caso q=2 per Eulero Modificato eseguire prove anche per k = 5, 6, 7. Fare un grafico in doppia scala logaritmica dell'errore al variare di N sovrapponendo i grafici, sempre in loglog, di $(1/N)^2$ e di 1e-16*N.

Esercizio 4.2

Dato il problema 1.2 (vedi **alcuni problemi di Cauchy (caso scalare)**) approssimarlo con il metodo di Heun. Confrontare l'errore finale vero e quello stimato $| U_N(T) - U_{2N}(T)|$.

Verificare che entrambi siano infinitesimi dello stesso ordine rispetto a 1/N e dedurre dall'errore stimato l'ordine p del metodo. A tale scopo compilare la seguente tabella:

N	$\lvert u(T) - U_N(T) \rvert$	$\lvert U_N(T) - U_{2N}(T) \rvert$
100		
200		
400		
800		