Laboratorio 8

Obiettivi

- Approssimazione del problema di Dahlquist con Eulero Esplicito, Eulero Implicito e Trapezi per diversi valori del parametro λ: studio della **stabilità**.
- Un esempio di come un sistema linearizzato possa comportarsi in modo diverso dal sistema originale.

Esercizio 8.1

Approssimare il Problema di Cauchy:

$u' = -20u, \quad 0 <= t < = 1,$

$u(0) = 1$

con il metodo di Eulero Esplicito con N= 5, 10, 15, 20, 40 eseguendo il grafico della soluzione approssimata.

Mettere in relazione il valore di N con le due condizioni che assicurano

a) che la soluzione approssimata tenda a zero: $\lambda\tau > -2$

b) che l'approssimazione ottenuta sia "qualitativamente corretta" $\lambda\tau > -1$;

e verificare che i grafici delle soluzioni approssimate ottenuti confermino le previsioni teoriche.

Ripetere le stesse prove con il metodo di Eulero Implicito (riscritto per questo problema particolare) e verificare che per tutte le scelte di N la soluzione approssimata è sempre "qualitativamente corretta".

Esercizio 8.2 (Un problema "complesso")

Si consideri il problema di Cauchy

$u' = \lambda u, \quad 0 \leq t \leq T,$

$u(0) = u_0$

con λ complesso e u_0 reale. Riscriverlo come problema reale in $\mathbf{R}^2$; approssimarlo con **Eulero Esplicito**, **Eulero Implicito** e **Trapezi** riscritti per problemi lineari ovvero, se

$$u' = A u,$$

Eulero Esplicito (*): $U_{n+1} = (I + \tau A)U_n$

Eulero Implicito (*): $(I - \tau A)U_{n+1} = U_n$

Trapezi (*) : $[I - (\tau/2)A]\, U_{n+1} = [I + (\tau/2)A]\, U_n$

(*) Per i dettagli dell'algoritmo vedi in Appendice.

Avendo ben presente il dominio di stabilità di ogni metodo, spiegare il comportamento dei metodi nei seguenti casi:

$\lambda = i$	T = 10	N = 10, 100, 1000
$\lambda = -1+10i$	T = 10	N = 10, 100, 1000
$\lambda = 1+10i$	T = 10	N = 10, 100, 1000
$\lambda = -50$	T = 10	N = 10, 100, 1000

Esercizio 8.3 – ovvero i pericoli della linearizzazione (quando il sistema linearizzato NON si comporta come quello originale)

Approssimare il seguente sistema di EDO con il metodo di Runge-Kutta 4 con N = 1000

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -(u_1)^2 \\ u_1(0) = v_1 \\ u_2(0) = v_2 \end{cases} \qquad t \in [0, 7], \quad N = 1000$$

Provare con diversi valori iniziali in un intorno dell'origine:

v_1	v_2
0	0.3000
-0.1000	0.1000
0.2000	0.2000
-0.4000	0.2000
-0.2000	0.2000
-0.2000	0.4000
-0.3000	0.2000

Interpretare le componenti della soluzione come coordinate di punti nel piano. Sovrapporre sullo stesso grafico le traiettorie ottenute per i diversi valori iniziali. Dedurre dal disegno il comportamento del sistema.

Linearizzare il sistema in un intorno dell'origine. Si ottiene un sistema banale la cui soluzione esatta NON si comporta come quella del sistema originale.

Appendice: Eulero Esplicito, Eulero Implicito e Trapezi per un sistema di EDO lineari

Assegnato il problema di Cauchy:

$f: \Re^{d+1} \longrightarrow \Re^{d}$

$u'(t) = Au(t) \quad t_0 \le t \le T, \qquad u(t) \in \Re^{d}$

$u(t_0) = v, \qquad v \in \Re^{d}$

con A matrice quadrata d*d, i tre metodi in oggetto si possono riscrivere

Eulero Esplicito

$U_{n+1} = U_n + \tau f(t_n, U_n) \quad \rightarrow \quad U_{n+1} = U_n + \tau A U_n \quad \rightarrow \quad \mathbf{U_{n+1} = (I + \tau A) U_n}$

Eulero Implicito

$U_{n+1} = U_n + \tau f(t_{n+1}, U_{n+1}) \quad \rightarrow \quad U_{n+1} = U_n + \tau A U_{n+1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{[I - \tau A] U_{n+1} = U_n}$

Trapezi

$U_{n+1} = U_n + (\tau/2)[f(t_n, U_n) + f(t_{n+1}, U_{n+1})] \quad \rightarrow \quad U_{n+1} = U_n + (\tau/2)AU_n + (\tau/2)AU_{n+1}$

$\rightarrow \quad \mathbf{[I - (\tau/2)A] U_{n+1} = [I + (\tau/2)A] U_n}$

Il calcolo del nuovo passo richede per i tre metodi rispettivamente

EE un prodotto matrice vettore

EI risoluzione di 2 sistemi triangolari (A fattorizzata prima del ciclo temporale)

T un prodotto matrice vettore + risoluzione di 2 sistemi triangolari (idem)