12.1. **Terra-luna-satellite.** Le equazioni di moto di un satellite intorno del sistema terra-luna sono

$$
\begin{aligned}
u_1'' &= u_1 + 2u_2' - \hat{\mu}\frac{u_1+\mu}{N_1} - \mu\frac{u_1-\hat{\mu}}{N_2},\\
u_2'' &= u_2 - 2u_1' - \hat{\mu}\frac{u_2}{N_1} - \mu\frac{u_2}{N_2}
\end{aligned}
$$

con le abbreviazioni

$$N_1 = \left[(u_1+\mu)^2 + u_2^2\right]^{3/2}, \qquad N_2 = \left[(u_1-\hat{\mu})^2 + u_2^2\right]^{3/2}$$

e i dati

$$\mu = 0.012277471, \qquad \hat{\mu} = 1-\mu.$$

Applicare il metodo di Euler esplicito e il metodo di Dormand e Prince di ordine 5 per

$$u_1(0) = 0.994, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = -2.001585106$$

e il tempo finale $T = 17.0652166$. Visualizzare le soluzioni numeriche nel piano (u_1, u_2), ad esempio con MATLAB, e interpretarle.

12.2. **Un'applicazione del metodo di Euler esplicito.** Applicare il metodo di Euler esplicito a

$$u'(t) = f(t,u) \quad (t \in \left]0,1\right[), \qquad u(0) = 0$$

con

$$f(t,u) = 4\left[\operatorname{sgn} u(t)\sqrt{|u(t)|} + \max\left\{0, t - \frac{|u(t)|}{t}\right\}\cos\left(\frac{\pi \ln t}{\ln 2}\right)\right]$$

e implementarlo, evitando (inutili) divisioni per 0. Eseguire il codice in particolare con passi uniformi $\tau = 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$, ed osservare il comportamento della soluzione approssimato in dipendenza di τ. Spiegare le osservazioni.

12.3. **Un problema con nonlinearità oscillante.** Considerare il problema

$$u'(t) = \cos\left(\frac{1}{u(t)}\right) - 2, \qquad u(0) = 1$$

e farsi un'idea qualitativa della soluzione esatta. Applicare un metodo numerico opportuno e motivare la scelta. Confrontare i risultati numerici con le aspettative.

12.4. **Due metodi multistep.** Considerare i metodi multistep

$$U_{n+1} = U_{n-1} + \frac{\tau}{3}\left[f\big((n+1)\tau, U_{n+1}\big) + 4f\big(n\tau, U_n\big) + f\big((n-1)\tau, U_{n-1}\big)\right]$$

(proposto da Milne nel 1926) e

$$U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n = \tau\Big[\frac{1}{4}f\big((n+2)\tau, U_{n+2}\big) + 2f\big((n+1)\tau, U_{n+1}\big) + \frac{3}{4}f\big(n\tau, U_n\big)\Big].$$

Determinare i loro ordini di consistenza e applicarli al problema

$$u' = -u \text{ in } (0, 20), \qquad u(0) = 1$$

con diversi passi $\tau > 0$ ed i valori iniziali

$$U_0 = 1, \qquad U_1 = e^{-\tau}.$$

Spiegare i risultati numerici.

12.5. **Passi espliciti per un problema stiff.** Considerare il problema

$$u' = -\lambda u \text{ in } (0, 10), \qquad u(0) = 1$$

con $\lambda = 10^3$. Confrontare numericamente i metodo di Euler con il metodo

$$U_{n+1} = (1 - \tau_* \lambda)^m (1 - \tau^* \lambda) U_n$$

proposto da Eriksson, Johnson e Logg nel 2003 con i parametri $\tau_* = 0.5 \cdot 10^{-3}$, $\tau^* = 1$, e $m = 7$. Spiegare la scelta dei parametri, analizzando la stabilità.

N.B: nel testo c'è un refuso: la frase corretta è : " confrontare i metodi di Eulero …"