
Calcolo Numerico 2 – a.a. 2017/18

foglio n. 1 per il 09.03.2018

1.1. Riscalando il tempo. Siano u una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria $u' = u$ e $\alpha > 0$ un numero reale positivo. Determinare quale equazione differenziale ordinaria soddisfa la funzione

$$\tilde{u}(t) := u(\alpha t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.2. Invertendo il tempo. Data $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ una soluzione di una delle due equazioni differenziali ordinarie:

$$u' = f(u) \quad \text{oppure} \quad u'' = f(u).$$

Determinare in entrambi i casi l'equazione che soddisfa la funzione

$$\tilde{u}(t) := u(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre interpretare l'ottenuto, in particolare discutendo eventuali differenze fra i due casi.

1.3. Problemi autonomi e soluzioni traslate. Considerare il problema autonomo

$$u' = f(u) \text{ in } \mathbb{R}, \quad u(t_0) = v$$

con $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Verificare che, senza perdita in generalità, si può assumere $t_0 = 0$.

Suggerimento: Verificare che con u anche $u(\cdot + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, è soluzione.

1.4. Formulazione integrale. Siano $t_0, v \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue. Verificare l'equivalenza dei seguenti due enunciati:

(a) u è derivabile con continuità tale che

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = v.$$

(b) u è continua tale che

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = v + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

1.5. Soluzione di $u' = \lambda u$ con λ complesso. Verificare che

$$\frac{d}{dt} \exp(\lambda t) = \lambda \exp(\lambda t)$$

vale per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Suggerimento: Si ha $\exp(a + ib) = e^a[\cos(b) + i \sin(b)]$ per $a, b \in \mathbb{R}$.

1.6. **Convergenza del metodo di Eulero esplicito per $u' = \lambda u$.**
Data $\lambda \in \mathbb{R}$, considerare il metodo di Eulero esplicito per il problema a valore iniziale

$$u' = \lambda u, \quad u(0) = v$$

e dimostrarne la convergenza in $T > 0$, cioè

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |U^N(T) - u(T)| = 0$$

dove $U^N(T)$ indica l'approssimazione di $u(T)$ con N passi uniformi di lunghezza T/N .

Suggerimento: Risolvere la ricorsione ottenuta dall'applicazione del metodo di Eulero esplicito al suddetto problema.

INFORMAZIONI:

Homepage del corso:

<http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calculus2.html>

Prof. A. Veeser

Studio: 2051 (nel "sottotetto")

Telefono: 02.503.16186

E-mail: andreas.veeser@unimi.it

Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30 o su appuntamento

Dott.ssa N. Bressan

Studio: 1025

Telefono: 02.503.16133

E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it

Orario di ricevimento: su appuntamento