

**6.1. Lipschitzianità di RKE.** Sia

$$u' = f(u) \text{ in } \mathbb{R}, \quad u(0) = v$$

un problema a valori iniziali autonomo, dove  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  è Lipschitz con costante  $L$ . Inoltre sia  $\Phi$  un metodo Runge-Kutta consistente esplicito a  $s$  stadi caratterizzato da  $(c, A, b)$  tali che  $c = Ae$  con  $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^s$ . Verificare che, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e  $\tau > 0$ ,  $\Phi(t + \tau, t)$  è Lipschitz con costante  $\exp(\tau\gamma L)$  dove

$$\gamma := \max_{j=1}^s (j!|b^j||A|^{j-1}e)^{1/j} \geq 1$$

dove  $|A| = (|a_{ij}|)_{i,j=1,\dots,s}$ .

*Suggerimento:* Sfruttare il fatto che  $|A|$  è nilpotente.

**6.2. Un esempio di estrapolazione di Richardson.** Applicare l'extrapolazione di Richardson al metodo di Eulero esplicito con passo  $\tau/2$  e formulare il risultato come metodo di Runge-Kutta esplicito.

**6.3. Sulla scelta del passo adattativo.** Sia  $R = R(\tau)$  un residuo locale tale che  $R(\tau) \approx \tau^p$  per  $\tau \rightarrow 0$  con  $p > 0$ . Dati  $\text{tol} > 0$ ,  $\tau_0 > 0$  e  $R(\tau_0) > 0$ , proporre un nuovo passo  $\tau_1 > 0$  con lo scopo  $R(\tau_1) \lesssim \text{tol}$ , cioè  $R(\tau_1)$  è più piccolo di  $\text{tol}$  ma non molto diverso.

**6.4. Collocazione e metodi di Runge-Kutta.** Un metodo per

$$u' = f(\cdot, u)$$

si dice di collocazione se esistono

$$s \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad 0 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_s \leq 1.$$

tali che l'evoluzione discreta è definita da

$$\Phi(t + \tau, t)z = P(t + \tau)$$

dove  $P \in \mathbb{P}_s(\mathbb{R})$  soddisfi

(i)  $P(t) = z,$

(ii)  $\forall u = 1, \dots, s \quad P'(t + c_i\tau) = f(t + c_i\tau, P(t + c_i\tau)).$

Verificare che un metodo di collocazione è un metodo di Runge-Kutta.

*Suggerimento:* Introdurre i polinomi di Lagrange  $L_i \in \mathbb{P}_s(\mathbb{R})$  tali che

$$\forall i, j = 1, \dots, s \quad L_i(c_j) = \delta_{ij}$$

e porre  $k_i = P'(t + c_i\tau)$  per  $i = 1, \dots, s$ .

**6.5. Coefficienti di Runge-Kutta per metodi di collocazione.** Verificare che i coefficienti di un metodo di Runge-Kutta  $(c, A, b)$  indotto dalla collocazione soddisfano

$$\sum_{j=1}^s b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k},$$

per  $i, k = 1, \dots, s$  con la convenzione  $0^0 = 1$ . Inoltre verificare che il metodo di Runge-Kutta è consistente e invariante nel senso di E5.4.

*Suggerimento:* Usare le formule

$$b_j = \int_0^1 L_j \quad \text{e} \quad a_{ij} = \int_0^{c_i} L_j$$

per  $i, j = 1, \dots, s$  dimostrate in E6.4.

**6.6. FSAL.** Formulare le condizioni sui coefficienti di un metodo di Runge-Kutta esplicito per realizzare la seguente idea del “First same as last”, cioè il primo stadio di un passo corrisponde all’ultimo del passo precedente. Questa richiesta è compatibile con E5.4?

---

INFORMAZIONI:

Homepage del corso:

<http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calculus2.html>

Prof. A. Veeser

Studio: 2051 (nel “sottotetto”)

Telefono: 02.503.16186

E-mail: [andreas.veeser@unimi.it](mailto:andreas.veeser@unimi.it)

Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30 o su appuntamento

Dott.ssa N. Bressan

Studio: 1025

Telefono: 02.503.16133

E-mail: [nicoletta.bressan@unimi.it](mailto:nicoletta.bressan@unimi.it)

Orario di ricevimento: su appuntamento