Calcolo Numerico 2 – a.a. 2017/18

foglio n. 9 per il 25.05.2018

9.1. **Un esempio per un passo di Eulero implicito.** Determinare la prima approssimazione U_1 del metodo di Euler implicito applicato al problema

$$u' = u^2, \qquad u(0) = 1.$$

9.2. **Stabilità e flash dell'esponenziale.** Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$ e $\tau > 0$, porre $A_\tau = \exp(\tau A)$. Mostrare che i seguenti enunciati sono equivalenti:

(i) $u' = Au$ è (asintoticamente) stabile.
(ii) $U_{n+1} = A_\tau U_n$ è (asintoticamente) stabile.

9.3. **Ricorsione di matrici diagonalizzabili.** Sia J una matrice diagonalizzabile. Derivare una formula per U_n, $n \in \mathbb{N}$ definito da

$$U_{n+1} = JU_n, \qquad U_0 = v$$

in termini di n e delle autocoppie di J.

9.4. **Caratterizzazione di A-stabile.** Sia R la funzione di stabilità di un metodo di Runge-Kutta implicito consistente. Verificare che R è A-stabile se e solo se vale la seguente implicazione per ogni matrice $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$:

$$u' = Au \text{ è stabile} \implies U_{n+1} = R(\tau A)U_n \text{ è stabile per ogni } \tau > 0.$$

9.5. **Collocazione e invertibilità.** Sia (c, A, b) un metodo di Runge-Kutta con s stadi di tipo collocazione. Mostrare che A è invertibile se e solo se

$$c_1 \cdots c_s \neq 0$$

Suggerimento: Usare E6.5.