Calcolo Numerico 2 – a.a. 2017/18

foglio n. 10 per il 01.06.2018

10.1. **Sulla stiffness di diffusione.** Considerare l'equazione del calore

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \text{ in }]0,1[\times \mathbb{R}^+, \quad u(\cdot,0) = 0 = u(\cdot,1).$$

Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(x) := \sin(n\pi x), \qquad x \in]0,1[$$

è un'autofunzione di $-\partial_x^2$ con condizioni al bordo omogenei. Inoltre determinare u nel caso che il valore iniziale è dato da un v_n, usando l'ansatz di separazione $u(x,t) = w(t)v_n(x)$.

10.2. **Flussi non espansivi.** Sia ϕ il flusso di un'equazione autonomo $u' = f(u)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Mostrare che ϕ è non espansivo, cioè

$$\forall t \geq 0 \quad |\phi(t)v - \phi(t)\tilde{v}| \leq |v - \tilde{v}|,$$

se e solo se f è monotono

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d \quad [f(z_1) - f(z_2)] \cdot [z_1 - z_2] \leq 0.$$

10.3. **Reazione di tre specie.** Considerare il seguente sistema per la reazione di tre specie:

$$\begin{aligned} u_1' &= -0.04u_1 + 10^4 u_2 u_3 \\ u_2' &= 0.04u_1 - 10^4 u_2 u_3 - 3 \cdot 10^7 u_2^2 \\ u_3' &= 3 \cdot 10^7 u_2^2 \end{aligned}$$

Osservare che $u_1 + u_2 + u_3$ è un integrale primo. Inoltre, posto

$$Q^+ := \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0\},$$

verificare che per $u(0) \in Q^+$ la traiettoria $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto u(t)$ non può lasciare il quadrante Q^+.

10.4. **Isometria e perturbazione.** Siano $J \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(d)$ una matrice antisimmetrica e $v \in \mathbb{R}^d$. Inoltre siano

$$u, \tilde{u} \in C^1\big([0,T[; \mathbb{R}^d\big)$$

tali che

$$u' = Ju \text{ in }]0,T[, \quad u(0) = v$$

e

$$\tilde{u}' = J\tilde{u} + r \text{ in }]0,T[, \quad \tilde{u}(0) = v + \rho$$

con $r \in C^0\big([0,T[;\mathbb{R}^d\big)$ e $\rho \in \mathbb{R}^d$. Verificare

$$\big||u(0)| - |\tilde{u}(t)|\big| \leq |\rho| + \int_0^t |r|$$

per $t \in]0,T[$.

10.5. **Metodi di Gauß e integrali primi quadratici.** Considerare un'equazione differenziale autonomo $u' = f(u)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ e un integrale primo quadratico

$$\mathcal{E}(z) := Az \cdot z + b \cdot z + c, \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

dove $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^d$ e $c \in \mathbb{R}$. Mostrare che qualsiasi soluzione $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ di un metodo di Gauß verifica

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{E}(U_n) = \mathcal{E}(U_0).$$

INFORMAZIONI:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30 o su appuntamento

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento