Problemi d'esame di **Calcolo Numerico 2**

a.a. 2015/2016

Per ogni progetto fare attenzione in particolare ai seguenti punti:

- testare la correttezza della propria implementazione e documentarla brevemente nella relazione, e
- ove possibile, valutare la compabilità dei risultati numerici con quelli teorici.

La consegna corretta del progetto consiste in

- un file di formato pdf contenente la relazione (max. cinque pagine),
- un archivio di formato zip contenente i codici in C (ad esempio, nel caso di `codeblocks` la cartella associata al progetto corredata da tutte le funzioni).

Bisogna presentarsi all'esame orale con una copia cartacea della relazione. Per ulteriori informazioni consultare le modalità d'esame sulla homepage del corso

`users.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html`.

---

1. **Reazione di Belusov-Zhabotinsky.** Il sistema

$$\begin{aligned} u_1' &= 77.27\Big(u_2 + (1 - 8.375 \cdot 10^{-6} u_1 - u_2)u_1\Big) \\ u_2' &= \frac{1}{77.27}\Big(u_3 - (1 + u_1)u_2\Big) \\ u_3' &= 0.161(u_1 - u_3), \end{aligned}$$

detto oregonatore, è un modello per la reazione chimica di Belusov-Zhabotinsky. Scegliere in modo motivato un opportuno metodo numerico per ottenere delle approssimazioni per $u(t)$ con $t = 30, 60, 90, \dots,$ 360, partendo da

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 2, \quad u_3(0) = 3.$$

La soluzione corrispondente a questi valori iniziali del suddetto sistema è periodica? Motivare la risposta con i risultati numerici.

2. **Terra-luna-satellite e due metodi di Runge-Kutta.** Le equazioni di moto di un satellite intorno del sistema terra-luna sono

$$u_1'' = u_1 + 2u_2' - \hat{\mu}\frac{u_1 + \mu}{N_1} - \mu\frac{u_1 - \hat{\mu}}{N_2},$$
$$u_2'' = u_2 - 2u_1' - \hat{\mu}\frac{u_2}{N_1} - \mu\frac{u_2}{N_2}$$

con le abbreviazioni

$$N_1 = \left[(u_1 + \mu)^2 + u_2^2\right]^{3/2}, \qquad N_2 = \left[(u_1 - \hat{\mu})^2 + u_2^2\right]^{3/2}$$

e i dati

$$\mu = 0.012277471, \qquad \hat{\mu} = 1 - \mu.$$

Applicare

- il metodo con lo schema di Butcher

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & \\
\frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & \\
\frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{6}{5} & & & \\
1 & -\frac{11}{54} & \frac{5}{2} & -\frac{70}{27} & \frac{35}{27} & & \\
\frac{7}{8} & \frac{1631}{55296} & \frac{175}{512} & \frac{575}{13824} & \frac{44275}{110592} & \frac{253}{4096} & \\
\hline
 & \frac{37}{378} & 0 & \frac{250}{621} & \frac{125}{594} & 0 & \frac{512}{1771}
\end{array}$$

- il metodo risultante dall'applicazione dell'estrapolazione di Richardson su precedente metodo

per

$$u_1(0) = 0.994, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = -2.0015851064$$

e il tempo finale $T = 17.06521656$.

Determinare numericamente l'ordine di consistenza del primo metodo e verificare numericamente l'aumento grazie all'estrapolazione di Richardson. Inoltre valutare, per il suddetta problema, l'eventuale vantaggio della variante adattiva del secondo metodo. La soluzione esatta si chiude per i parametri dati? Motivare la risposta con i risultati numerici.

3. **Determinare il passo corrispondente ad una accuratezza quasi-ottimale.** Considerare l'applicazione del metodo

$$\rho(E)U_n = \tau\sigma(E)F_n$$

con

$$\rho(\zeta) = \tfrac{49}{20}\zeta^6 - 6\zeta^5 + \tfrac{15}{2}\zeta^4 - \tfrac{20}{3}\zeta^3 + \tfrac{15}{4}\zeta^2 - \tfrac{6}{5}\zeta + \tfrac{1}{6},$$
$$\sigma(\zeta) = \zeta^6$$

al problema

$$u' = t^2 + u^2, \qquad u(0) = 0.$$

Determinare approssimativamente il passo che restituisce per la vostra implementazione la soluzione più accurata su $[0,1]$.

4. **Rotazione di un corpo rigido.** Le equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} I_1 u_1' &= (I_2 - I_3) u_2 u_3 \\ I_2 u_2' &= (I_3 - I_1) u_3 u_1 \\ I_3 u_3' &= (I_1 - I_2) u_1 u_2 + f \end{aligned}$$

descrivono la rotazione di un corpo rigido, dove u_1, u_2, u_3 sono le coordinate del vettore di rotazione e I_1, I_2, I_3 i momenti d'inerzia principali. La terza componente ha una forza esterna

$$f(t) = \begin{cases} 4^k \sin^2 t, & \text{se } 3\pi \leq t \leq 4\pi, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Considerare il caso in cui

$$I_1 = 0.5, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = 3,$$
$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = 0.9,$$
$$k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

e indagare l'accuratezza delle approssimazioni di $u(10)$ e $u(20)$ per due metodi numerici adeguati, ma di ordine di consistenza diverso.

Informazioni:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento