Laboratorio di Matematica Computazionale
A.A. 2006-2007 - Laboratorio nr.9

Spline interpolanti

1. Approssimare nell'intervallo $[-5, 5]$ la funzione
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
mediante interpolazione lineare composita sui nodi x_i del vettore $[-5 : h : 5]$. A partire da $h = 5$ si dimezzi sei volte successivamente il valore di h. Per ogni h si disegni il grafico della spline lineare interpolante e della funzione di Runge.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$
Usando il comando `spline`, si disegni la spline cubica che la interpola su un insieme di $n = 10, 20, 30, 40$ nodi equispaziati nell'intervallo $[0.05, 0.5]$. Nella stessa finestra grafica si disegni anche il grafico di f e si indichino con $*$ i dati interpolati.

3. Si considerino i punti di coordinate
$$x = (-1, -0.5, 0, 1, 2, 5)$$
$$y = (0, -1, -2, -1, 5, 0)$$
si costruisca la spline che interpola i punti precedenti memorizzando le informazioni sulla spline in *pp-form*. A questo scopo si usi la sintassi:

```
>> pp=spline(x,y)
```

Si disegni quindi la spline ottenuta usando il comando `ppval` e si estragga ciascun campo di `pp` usando il comando `unmkpp`, spiegandone il significato

4. Si calcolino le derivate prima seconda e terza della spline ottenuta al punto precedente usando la function `ppder`; si rappresentino graficamente la derivate calcolate. Cosa osservate?

5. Si considerino le seguenti 4 coppie di punti

$$x = (-1,\ 1,\ 2,\ 5),$$
$$y = (0,\ -1,\ 5,\ 0).$$

Si verifichi che in questo caso la spline cubica interpolante ottenuta con il comando `spline` coincide con il polinomio interpolante di grado 3 ottenuto con il comando `polyfit`.

Approssimazione ai minimi quadrati

1. In un esperimento di laboratorio, viene misurata la posizione di un corpo che cade soggetto alla forza di gravità. Le misurazioni vengono effettuate ad intervalli di tempo uniformi e i dati sono riportati nel M-script `gravita.m` (da scaricare alla pagina web del corso).

   - Si costruisca il polinomio T_2 di grado 2 che approssima i dati sperimentali nel senso dei minimi quadrati. Si rappresentino sul medesimo grafico i dati e il polinomio T_2.

- Ricordando che la legge di moto che assegna la posizione del corpo in funzione del tempo è data da
$$d(t) = d_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$
dove d_0 è la posizione iniziale e v_0 è la velocità iniziale e g l'accelerazione di gravità, sulla base dell'espressione di T_2, si approssimi il valore dell'accelerazione di gravità g. Si compari il valore che si calcola in questo modo con il valore esatto $g = 9.80665\, m/s^2$.
- Si consideri ora la retta di regressione lineare che approssima i dati nel senso dei minimi quadrati e si verifichi che essa passa per il punto
$$\bar{t} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} t_i, \quad \bar{d} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d_i,$$
dove $\{t_i, d_i\}_{i=0}^{n}$ sono le coppie di dati ottenute dalla misurazione. Che significato ha questa proprietà?

2. Si considerino le coppie di dati definiti come

```
>> x=[0:1/9:1];
>> y=10*x+rand(size(x));
```

- Si calcoli il polinomio $\Pi_9 f(x)$ che interpola i dati in corrispondenza dei dati assegnati (perché abbiamo preso proprio grado 9?). Si calcoli poi la retta di regressione che approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

- Si confrontino graficamente i polinomi calcolati rispetto ai dati assegnati
- Se si ripete il calcolo dei dati, il vettore `rand` cambia e quindi anche i valori delle ordinate cambiano conseguentemente. Si commentino le proprietà rispettive dell'approssimazione ai minimi quadrati e dell'interpolazione di Lagrange in termini di sensibilità rispetto alle perturbazioni sui dati.

Esercizio aggiuntivo di riepilogo

A partire dai dati (x_i, y_i) memorizzati nei vettori:

```
>> x=[-55:10:55];
>> y=[3.22, 3.3, 3.32, 3.17, 3.07, 3.02, 3.02, ...
      3.12, 3.2, 3.35, 3.37, 3.25];
```

Eseguire quanto segue:

1) approssimarli nel senso dei minimi quadrati, con una retta ed una parabola,
2) interpolarli con una spline lineare,
3) interpolarli con una spline cubica,
4) interpolarli con un polinomio di grado 11.

Rappresentare graficamente le curve ottenute nei nodi `z=-55:55`.