Andrea Carati – Luigi Galgani

Appunti di Meccanica Analitica II

Anno Accademico 2013–2014

Indice

1 Ordine e caos nei sistemi dinamici. 1

1. Introduzione. Poincaré e la rivoluzione degli anni '60: Fermi, Pasta e Ulam (FPU), Lorenz, Hénon 1
2. Lo standard map: visualizzazione numerica 10
3. Due esempi di coesistenza di moti ordinati e caotici: il pendolo forzato e il sistema di Hénon e Heiles 18
4. Lo standard map imperturbato 26
5. Lo standard map perturbato 29
6. Classificazione delle trasformazioni lineari simplettiche piane 30
7. L'ultimo teorema di Poincaré: il twist map 33
8. Il teorema della varietà stabile e i punti omoclíni di Poincaré 40
9. Il gatto di Arnol'd e i sistemi iperbolici (o di Anósov) 50
10. Sistemi dissipativi e stabilità delle orbite 53
11. L'attrattore di Lorentz 62

Appendici 67

A.1 Dimostrazione del Teorema della Varietà Stabile 67
  A.1.1 Rappresentazione delle successioni convergenti al punto fisso 67
  A.1.2 Studio dell'esistenza del punto fisso 70
  A.1.3 La varietà stabile 72
  A.1.4 La dimostrazione del teorema delle contrazioni 73
  A.1.5 Lo spazio dello successioni convergenti come spazio di Banach 74
A.2 Integrazione numerica della equazione di Newton 76
  A.2.1 Il metodo del *leap-frog* 76
  A.2.2 I metodi di splitting 79
A.3 Listati dei programmi usati per generare le figure 88
  A.3.1 Standard map 88
  A.3.2 Pendolo forzato 89
  A.3.3 Il sistema di Hénon ed Heiles 91
  A.3.4 Le varietà stabili ed instabili 93

2 Introduzione alla Teoria delle Perturbazioni **99**
1. Introduzione 99
2. La perturbazione del moto 100
3. Stima della crescita dell'errore 101
4. Principio della Media 104
5. L'azione come invariante adiabatico: sistemi monodimensionali . . . 109
6. Il caso dell'oscillatore armonico 113
7. Il momento magnetico come invariante adiabatico, e lo specchio magnetico 115
8. Il teorema della media per sistemi con piú angoli veloci 119
9. Il caso hamiltoniano bidimensionale 122
10. Le coordinate azione–angolo per sistemi integrabili bidimensionali: il Teorema di Arnold–Liouville 124
11. Le coordinate azione–angolo per il moto Kepleriano 127
12. Le variabili d'azione 129
13. Le variabili angolari 131

A Appendici **135**
A.1 Il M.C.D. di due interi 135
A.2 Dimostrazione dell'integrabilità della forma $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$ 136

3 Introduzione alla Teoria Ergodica **139**
1. Introduzione 139
2. Il gas perfetto 140
3. Il teorema del viriale: un modello più realistico di gas perfetto 142
4. Dipendenza delle Medie Temporali dai dati iniziali 144
5. Distribuzione di Probabilitá dei dati iniziali 148
6. Il teorema del ritorno di Poincaré 151
7. L'evoluzione come operatore unitario sulle osservabilli 154
8. Il Teorema ergodico di von Neumann 156
9. L'approccio all'equilibrio: proprietá di mixing dei flussi 159
10. Un esempio di sistema mixing 162
11. L'irreversibilità macroscopica tramite la reversibilità microscopica . 164
12. La Termodinamica come teoria delle grandi deviazioni 174
13. Il teorema di Cramér–Gartner 175
14. Applicazione: la distribuzione di Maxwell–Boltzmann delle velocità 179
15. Il lemma di Varadhan 180
16. Probabilità condizionata e distibuzione canonica 183

Appendici **185**
A.1 Il teorema di Krylov–Bogoliubov 185
A.2 Dimostrazione del teorema di Kac. 191

Prefazione

In queste dispense abbiamo raccolto le lezioni che teniamo per il corso di Meccanica razionale II per fisici e per il corso di Sistemi dinamici 1 per matematici, entrambi corsi del terzo anno per la laurea triennale. Il corso prevede anche delle esercitazioni al calcolatore in cui si tracciano i ritratti in fase per lo standard map (con particolare attenzione ai punti omoclini), e si integrano le equazioni differenziali per il modello di Hénon e Heiles e per il pendolo forzato.

Il testo contiene tre capitoli di natura alquanto diversa.

Il primo, dal titolo “Ordine e caos nei sistemi dinamici” è di tipo introduttivo e di carattere molto discorsivo. Vorrebbe introdurre il lettore al problema del passaggio dall'ordine al caos nei sistemi integrabili perturbati in maniera “facilmente leggibile”. Sostanzialmente, dopo un breve excursus storico su quella che abbiamo chiamato la rivoluzione degli anni '60 e avere illustrato l'esempio dello standard map, il capitolo è centrato sul cosiddetto *ultimo teorema di Poincaré*, di cui viene fornita la dimostrazione nella versione di Arnold (dal libro di Arnold e Avez). Viene poi enunciato il teorema della varietà stabile (la cui dimostrazione è riportata in Appendice), e viene illustrato il punto omoclino e come esso porti ai moti caotici.

Il secondo capitolo contiene una introduzione alla teoria delle perturbazioni. Preso atto che in generale le equazioni differenziali non si sanno risolvere, si cerca di essere garantiti che le soluzioni corrispondenti a certi dati iniziali restino vicine, entro certi tempi, a dei particolari movimenti che si possono facilmente descrivere. Si mette anzitutto in luce come in generale le informazioni vengano perse in maniera esponenzialmente veloce. Si dà poi il teorema della media, che invece fornisce buone informazioni (sotto certe condizioni) se il sistema è una piccola perturbazione di un sistema che ha delle costanti del moto (variabili lente) e una variabile (angolare) veloce. Si considera poi in particolare il caso hamiltoniano, in cui per il sistema imperturbato si introducono le variabili angolo–azione, e si mostra come nel caso perturbato si ottenga l'esistenza di invarianti adiabatici.

Il terzo capitolo (scritto in maniera alquanto provvisoria) vuole essere una introduzione alla teoria ergodica da un punto di vista abbastanza particolare. Infatti, ai giorni nostri la teoria ergodica può essere presentata come una capitolo della teoria delle probabilità o come un capitolo molto astratto della matematica originato dalla teoria dei sistemi dinamici, che riguarda il comportamento delle traiettorie su tempi infiniti. Qui invece si cerca di fare un ponte con le origini stesse del problema, in relazione ai fondamenti dinamici della meccanica statistica, secondo un procedimento il cui modello di riferimento è il classico libro di Khinchin. A tal fine, si comincia mostrando anzitutto come la teoria cinetica conduca spontaneamnete allo studio delle medie temporali delle osservabili. Nelle trattazione qui svolta, a differenza della maggior parte delle trattazioni disponibili, viene privilegiato il punto di vista di von Neumann rispetto a quello di Birkhoff, e viene appunto data la dimostrazione del teorema ergodico di von

Neumann. La ragione di questa scelta sta nel fatto che gli autori concordano con von Neumann nel ritenere il suo approccio come fisicamente più significaticvo. Il motivo principale è che l'approccio di von Neumann permette in linea di principio di descrivere la rapidità dell'approccio all'equilibrio (cioè di descrivere i tempi entro i quali le medie temporali rilassano concretamente al loro valore finale, che formalmente viene descritto mediante il limite per $t \to \infty$). Questo punto di vista (illustrato da von Neumann in un suo breve ma incisivo articolo, che non abbiamo ancora avuto il tempo di riassumere in queste note) sembra particolarmente adatto alla descrizione dei fenomeni di apparente equilibrio di "tipo vetroso" che sono oggi tanto studiati dopo il classico lavoro di Fermi, Pasta e Ulam (del 1955) e che sono di particolare interesse anche per le ricerche originali degli autori di queste note. Contiamo di aggiungere presto una nuova parte sui fondamenti della meccanica statistica di equilibrio, inquadrando l'insieme di Gibbs nell'ambito della teoria delle grandi deviazioni.