

# Esercizi

## 8.1 Esercizi di meccanica lagrangiana

**Esercizio 1.** Si studi il moto di un punto materiale soggetto ad una forza centrale.

**Soluzione.** Il caso del moto centrale è già stato discusso. Ci si mette nel piano passante per il centro delle forze e perpendicolare al vettore momento angolare  $\mathbf{L}$  (costante). Si riferisce il piano a coordinate polari  $r, \varphi$ , e si ha una energia potenziale  $V = V(r)$ . Dunque

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) , \quad (8.1.1)$$

Delle due equazioni di Lagrange per il sistema, relative alle coordinate  $r$  e  $\varphi$ , la seconda è particolarmente semplice, in virtù dell'invarianza per rotazioni, ossia del fatto che  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ . Ciò implica che l'intensità  $l$  del momento angolare (momento  $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$  coniugato a  $\varphi$ ) è una costante del moto

$$mr^2\dot{\varphi} = l_0 . \quad (8.1.2)$$

L'equazione in  $r$  può essere sostituita dall'integrale dell'energia (che è una costante del moto per il teorema dell'energia generalizzata):

$$E(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) . \quad (8.1.3)$$

Si hanno dunque le due equazioni del primo ordine

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E_0 , \quad mr^2\dot{\varphi} = l_0 ,$$

dipendenti parametricamente dai valori  $E_0$  dell'energia e  $l_0$  dell'intensità del momento angolare, fissati dalle condizioni iniziali.

Sostituendo la seconda nella prima, ci si riduce in tal modo a un sistema fittizio monodimensionale (o meglio, su una semiretta, perché si ha  $r > 0$ ), con energia

$$E(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{l_0}^*(r) , \quad V_{l_0}^*(r) = V(r) + \frac{l_0}{2mr^2} . \quad (8.1.4)$$

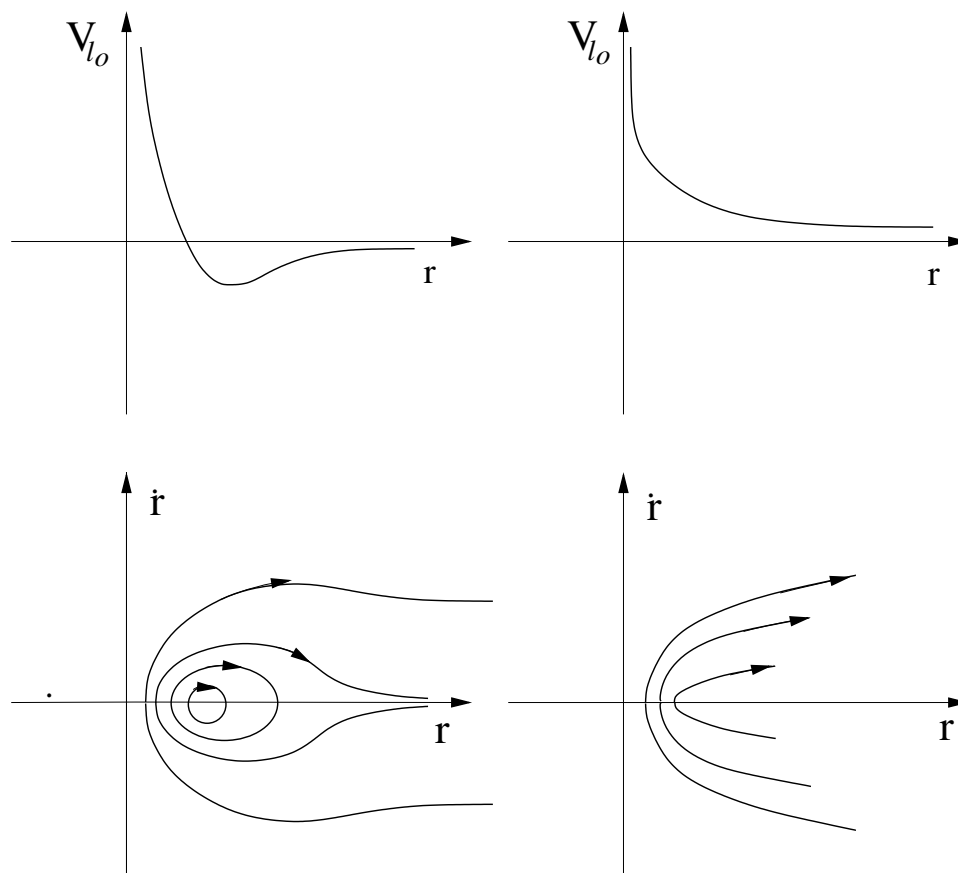


Figura 8.1: Potenziale efficace e ritratto in fase nei casi attrattivo (sinistra) e repulsivo (destra)

Quando lo studio del moto monodimensionale abbia fornito il moto  $r = r(t)$ , allora dalla conservazione del momento angolare (8.1.2) si ottiene la legge  $\dot{\varphi} = \varphi(t)$  per banale integrazione:

$$\dot{\varphi} = \frac{l_0}{mr^2(t)} \equiv g(t) \quad (8.1.5)$$

con una certa funzione  $g = g(t)$  assegnata. Dunque  $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t g(s)ds$ . Naturalmente, consideriamo qui il caso generale in cui sia  $l_0 \neq 0$ , perché altrimenti si ha  $\dot{\varphi} = 0$ , ovvero  $\varphi(t) = \varphi_0$ , e il moto è veramente monodimensionale; nel caso di potenziale  $V(r)$  attrattivo, il punto (nel piano) cade sull'origine lungo una retta. Così farebbe anche la Luna rispetto alla Terra, se le condizioni iniziali non le avessero assegnato un momento angolare  $l_0 \neq 0$  (cioè una velocità trasversa non nulla) che le impedisce di cadere. Formalmente ciò avviene perché il termine di energia cinetica  $\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$  agisce, nel moto fittizio monodimensionalmente, come una barriera di potenziale di altezza infinita, che impedisce la caduta. Nel caso particolare in cui nel

moto fittizio monodimensionale si abbia un punto  $\bar{r}$  di equilibrio, il corrispondente moto nel piano è circolare uniforme.

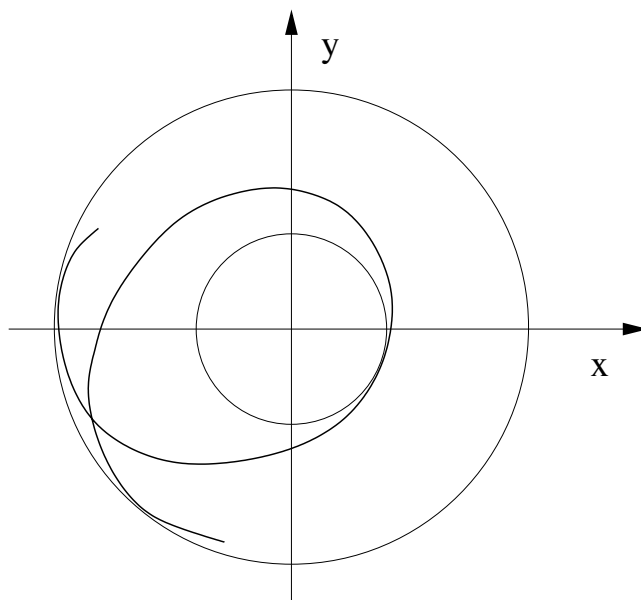


Figura 8.2: Caso attrattivo: traiettoria nel piano  $(x, y)$ , e fenomeno della precessione

Si danno due casi particolarmente significativi per il potenziale “vero”  $V(r)$ : caso *attrattivo* (prototipo  $V(r) = -\frac{k}{r}$ ,  $k > 0$ , ovvero caso kepleriano, oppure coulombiano con cariche di segno opposto), e caso *repulsivo* (prototipo  $V(r) = +\frac{k}{r}$ ,  $k > 0$ , ovvero caso coulombiano con cariche di segno uguale). Il potenziale “efficace”  $V_{l_0}^*(r)$  dato dalla (8.1.4) ha aspetto ben differente in tali due casi (figura 8.1, in alto). Infatti, in entrambi i casi si ha nell’origine una barriera infinita; ma poi, mentre nel caso repulsivo la barriera decresce continuamente al crescere di  $r$ , nel caso attrattivo si presenta invece una buca di potenziale. Questi fatti si stabiliscono con uno studio elementare delle funzioni, confrontando gli ordini di infinito dei termini in gioco.

I ritratti in fase del corrispondente sistema fittizio monodimensionale sono illustrati in figura 8.1 in basso, insieme con i rispettivi potenziali efficaci (in alto). Nel caso attrattivo, per  $E_0 < 0$  si hanno *stati legati* (moto confinato), mentre per  $E_0 > 0$  si hanno *stati d’urto o di scattering*; per  $E_0 = 0$  si ha la separatrice, in corrispondenza della quale si ha  $\dot{r} \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ . Se si passa alla descrizione nel piano “fisico” (figura 8.2), nel caso attrattivo i moti corrispondenti a stati legati per un fissato valore  $E_0 < 0$  (avendo preliminarmente fissato  $l_0 \neq 0$ ), si svolgono in una corona circolare con due raggi minimo e massimo. In particolare, la corona circolare si riduce a una circonferenza in corrispondenza del raggio in cui il potenziale efficace presenta un minimo. Come già osservato, in tal caso il moto è anche uniforme.

Nello specialissimo caso con  $V = -k/r$  si mostra, con un altro argomento, che per energia negativa le orbite si chiudono (e sono ellissi), altrimenti si ha il famoso fenomeno della precessione. Sempre nel caso  $V = -k/r$ , con un calcolo diretto (si veda un'altra parte delle dispense) si mostra che per energia negativa, nulla o positiva le traiettorie sono rispettivamente ellissi, parabole e iperboli (dunque, qualunque sia l'energia, si hanno delle coniche).

## Esercizio 2. Il pendolo semplice ed il pendolo sferico

**Soluzione.** Per il *pendolo semplice* su un cerchio di raggio  $R$  (figura 8.3) abbiamo già visto che, se  $\varphi$  è l'angolo contato a partire dalla verticale discendente, la Lagrangiana (divisa per  $mR^2$ ) è data da  $L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \cos \varphi$ , con  $\omega^2 = g/R$ , e l'energia  $E$  (divisa per  $mR^2$ ) è data dunque da

$$E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi . \quad (8.1.6)$$

Nel ritratto in fase si riconoscono i due punti di equilibrio: quello in  $\varphi = 0$ , e quello in  $\varphi = \pi$  (equivalente a  $\varphi = -\pi$ ), rispettivamente stabile e instabile, con il corrispondente centro e la corrispondente sella. Si hanno le cosiddette *librazioni* (da latino *libra* = bilancia) cioè le oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile, le cosiddette *rotazioni*, in verso positivo o negativo, e inoltre le due separatrici.

Per il *pendolo sferico* (punto pesante su una sfera liscia di raggio  $R$ ) basta considerare le coordinate polari  $\rho, \theta, \varphi$  nello spazio e imporre il vincolo  $\rho = R$  (sicché  $\dot{\rho} = 0$ ) nella nota espressione dell'energia cinetica in coordinate polari (si osservi che l'angolo  $\theta$  è contato a partire dalla verticale ascendente). Si ha allora la Lagrangiana (divisa per  $mR^2$ )

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + (\sin^2 \theta)\dot{\varphi}^2) - \omega^2 \cos \theta , \quad \text{con } \omega^2 = \frac{g}{R} , \quad (8.1.7)$$

con corrispondente energia

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + (\sin^2 \theta)\dot{\varphi}^2) + \omega^2 \cos \theta .$$

Segue allora (poiché  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ ) la conservazione del momento angolare, che comporta

$$\dot{\varphi} \sin^2 \theta = l_0 , \quad (8.1.8)$$

e ci si riconduce dunque a un sistema fittizio a un grado di libertà con “energia riscalata” (energia/ $(mR^2)$ ), che denotiamo ancora con  $E$ ) data da

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + V_{l_0}^* \quad V_{l_0}^*(\theta) = \frac{l_0^2}{2 \sin^2 \theta} + \omega^2 \cos \theta . \quad (8.1.9)$$

Si vede dunque che il potenziale efficace (figura 8.4) presenta una buca con due barriere infinite in  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , e si controlla che esso presenta un solo minimo. Dunque il ritratto in fase è, qualitativamente, analogo a quello di una buca di potenziale. Si conclude che la presenza di un momento angolare  $l_0 \neq 0$  ( $\dot{\varphi} \neq 0$ ) impedisce al punto di cadere sul polo Sud.

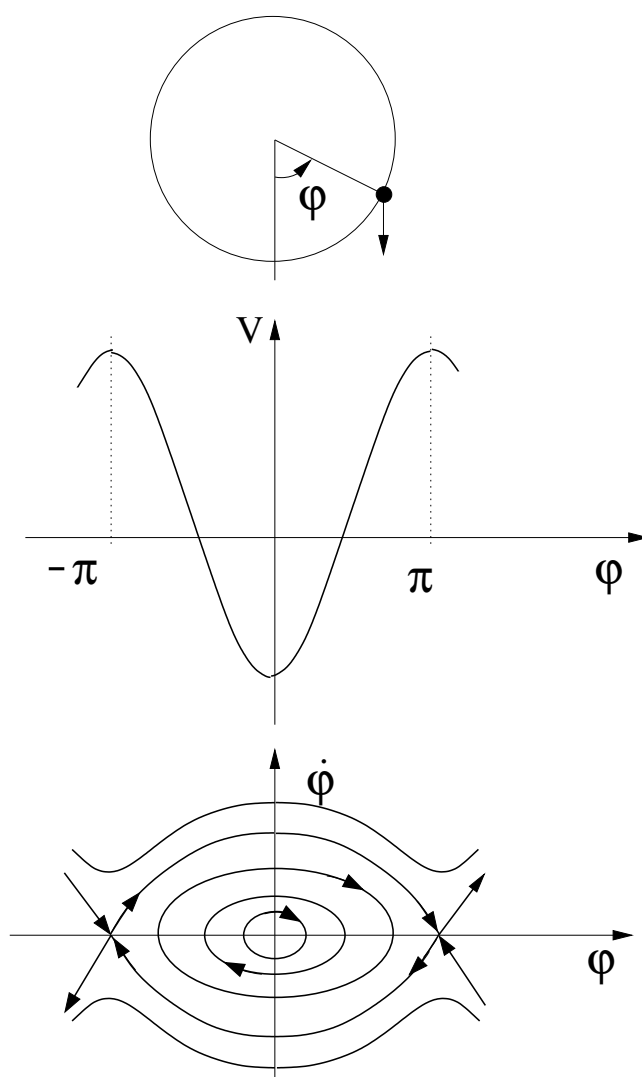


Figura 8.3: Pendolo semplice: spazio delle configurazioni, potenziale e ritratto in fase (dall'alto verso il basso)

**Esercizio 3.** Si studi il moto di un punto pesante, collegato all'origine da una molla lineare, vincolato a muoversi su una superficie a simmetria cilindrica

**Soluzione.** Consideriamo qui il caso generale con superficie

$$z = f(r) \tag{8.1.10}$$

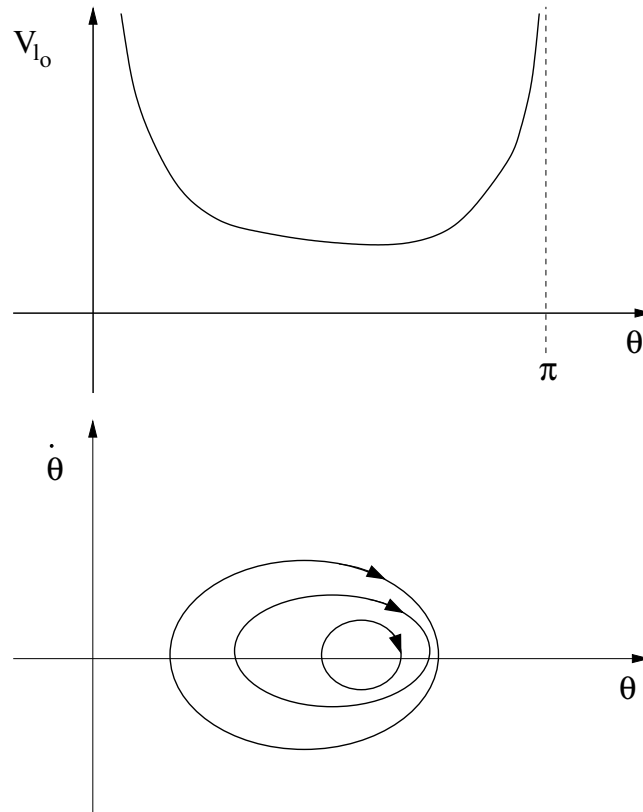


Figura 8.4: Pendolo sferico: potenziale efficace e ritratto in fase

in coordinate cilindriche (ad esempio,  $f(r) = \alpha r^2$ ). Ciò comporta

$$\dot{z} = f'(r)\dot{r} . \quad (8.1.11)$$

Sappiamo che in coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$  la Lagrangiana per il punto privo di vincoli risulta

$$L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz - V(r, z) ,$$

dove  $mgz$  è il potenziale della forza peso, mentre  $V(r, z) = \frac{1}{2}k(r^2 + z^2)$  rappresenta il potenziale di una molla lineare che attiri il punto verso l'origine.<sup>1</sup> Ma per il vincolo si hanno le (8.1.10), (8.1.11), e dunque abbiamo la Lagrangiana (coordinate libere  $r, \varphi$ )

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m [(1 + f'^2(r))\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2] - mgf(r) - \tilde{V}(r) , \quad (8.1.12)$$

con  $\tilde{V}(r) = \frac{1}{2}k(r^2 + f^2(r))$ . Ancora si ha la conservazione del momento angolare,

<sup>1</sup>Si noti che la trattazione qualitativa si può svolgere in maniera più generale per un qualunque potenziale esterno a simmetria cilindrica, il quale, cioè, non dipenda da  $\varphi$ .

$$mr^2\dot{\varphi} = l_0, \quad (8.1.13)$$

e ci si riduce a un caso monodimensionale con una opportuna energia fittizia:

$$\frac{1}{2}m(1 + f'^2(r))\dot{r}^2 + V_{l_0}^* = E_0, \quad (8.1.14)$$

$$V_{l_0}^* = \tilde{V}(r) + mgf(r) + \frac{l_0^2}{2mr^2}. \quad (8.1.15)$$

Nella figura 8.5, diamo il potenziale efficace  $V_{l_0}^*$  per il caso  $f(r) = \alpha r^2$ , e tracciamo il corrispondente ritratto in fase. Si noti che il fattore che moltiplica  $\dot{r}^2$ , invece di essere costante (uguale a  $\frac{1}{2}m$ ) dipende ora da  $r$ , avendo la forma  $\frac{1}{2}(1 + f'^2(r))$ , ad esempio  $\frac{1}{2}(1 + 4\alpha^2 r^2)$  per  $f(r) = \alpha r^2$ ; ma il ritratto in fase non viene qualitativamente alterato.

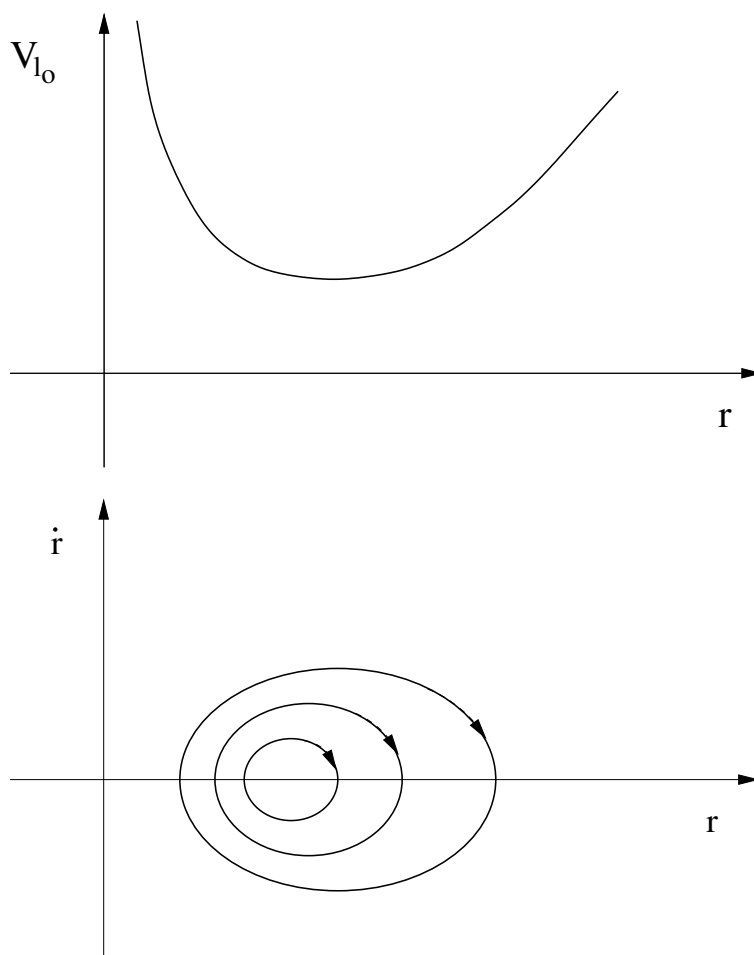


Figura 8.5: Punto vincolato alla superficie  $z = \alpha(x^2 + y^2)$

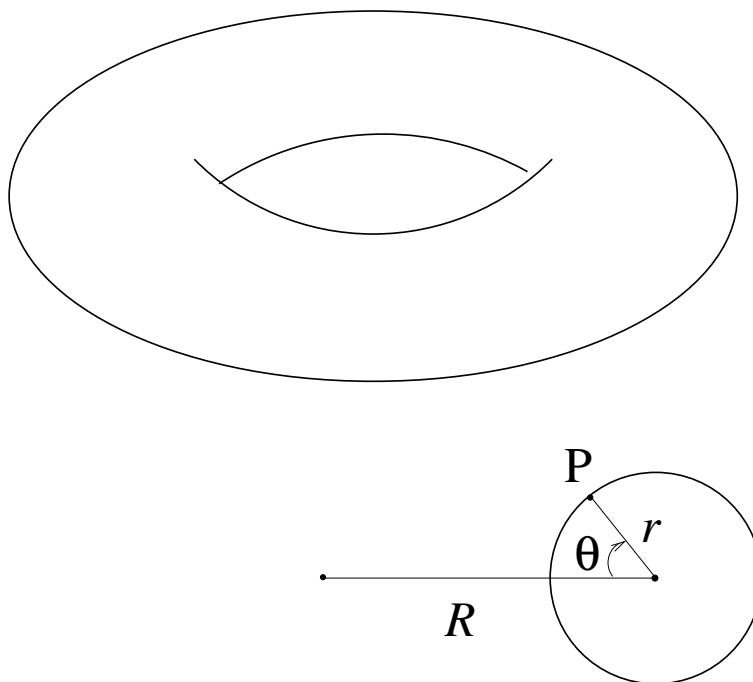


Figura 8.6: Il toro bidimensionale

**Esercizio 4.** Si studi il moto per inerzia (cioè in assenza di forze esterne, in particolare in assenza della forza peso) per un punto su un toro bidimensionale<sup>2</sup>. Si consideri poi il caso di presenza della forza peso, e si descriva come cambiano i movimenti rispetto al caso del moto per inerzia.

**Soluzione.** Il toro è definito come il prodotto cartesiano di due cerchi. Quando è pensato immerso in  $\mathbb{R}^3$ , esso può essere descritto nel modo seguente (figura 8.6). La sezione in un piano verticale, diciamo il piano  $x, z$  (ovvero  $y = 0$ ) è un cerchio di raggio  $r > 0$ , con centro sull'asse delle  $x$  a distanza  $R > r$  dall'origine delle coordinate. Poi si fa ruotare questo cerchio attorno all'asse  $z$ . Un punto  $P$  sul cerchio nella sezione  $y = 0$  sia individuato dall'angolo  $\theta$  (con  $0 \leq \theta < 2\pi$ ), contato ad esempio a partire dall'asse delle  $x$  (con verso arbitrario, prendendo ad esempio  $\theta = 0$  quando  $P$  è situato tra il centro del cerchio e l'origine delle coordinate). Le linee coordinate sono allora dei cerchi nei piani di sezione verticali passanti per l'asse  $z$  (*meridiani*) e cerchi paralleli al piano orizzontale (*paralleli*). È pertanto evidente che i raggi dei meridiani sono lunghi  $r$ , mentre i raggi dei paralleli sono lunghi  $R - r \cos \theta$ .

<sup>2</sup>Una ciambella regolare immersa in  $\mathbb{R}^3$ .



Scegliendo come coordinate lagrangiane  $(\theta, \varphi)$ , per l'energia cinetica si ha, in maniera del tutto analoga al caso dell'energia cinetica in coordinate polari,

$$T = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + (R - r \cos \theta)^2\dot{\varphi}^2) ,$$

da cui si possono dedurre direttamente le equazioni di Lagrange per il moto per inerzia, per il quale  $L = T$ . La coordinata  $\varphi$  è ciclica, per cui il suo momento coniugato (il momento angolare rispetto all'asse  $z$ ) si conserva:

$$m(R - r \cos \theta)^2\dot{\varphi} = l_0 .$$

Ancora una volta ci si può allora ridurre ad un problema monodimensionale fittizio per la variabile  $\theta$  sfruttando la conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{l_0^2}{2m(R - r \cos \theta)^2} ,$$

e determinare il moto qualitativo in a partire dal grafico del potenziale efficace

$$V_{l_0} = \frac{l_0^2}{2m(R - r \cos \theta)^2} ,$$

come illustrato dalla figura 8.7.

Nel caso in cui si consideri l'azione della forza peso, la Lagrangiana viene modificata con l'aggiunta del potenziale

$$V = mgr \sin \theta ,$$

siccome  $z = r \sin \theta$ . Corrispondentemente, il potenziale efficace per il problema fittizio monodimensionale diviene

$$\tilde{V}_{l_0} = \frac{l_0^2}{2m(R - r \cos \theta)^2} + mgr \sin \theta .$$

Si lascia al lettore di determinare gli aspetti qualitativi del moto in questo caso.

**Esercizio 5.** Si consideri (cfr. figura 8.8) una semiretta  $r$  imperniata in  $O$ , libera di ruotare in un piano verticale intorno ad  $O$ , ed punto pesante  $P$  di massa  $m$  fissato ad  $r$  a distanza  $l$  da  $O$ . Il punto sia inoltre sottoposto al richiamo di una molla elastica collegata al punto  $B$ , situato sulla verticale di  $O$ , al di sopra di esso, ad una distanza  $a$ . Indicata con  $k$  la costante elastica della molla, si trovi per quali valori della massa  $m$  ogni posizione possibile è un punto di equilibrio.

**Soluzione.** Si tratta di un sistema ad un solo grado di libertà, per il quale scegliamo come coordinata lagrangiana l'inclinazione  $\theta$  di  $r$  sulla verticale. L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 .$$

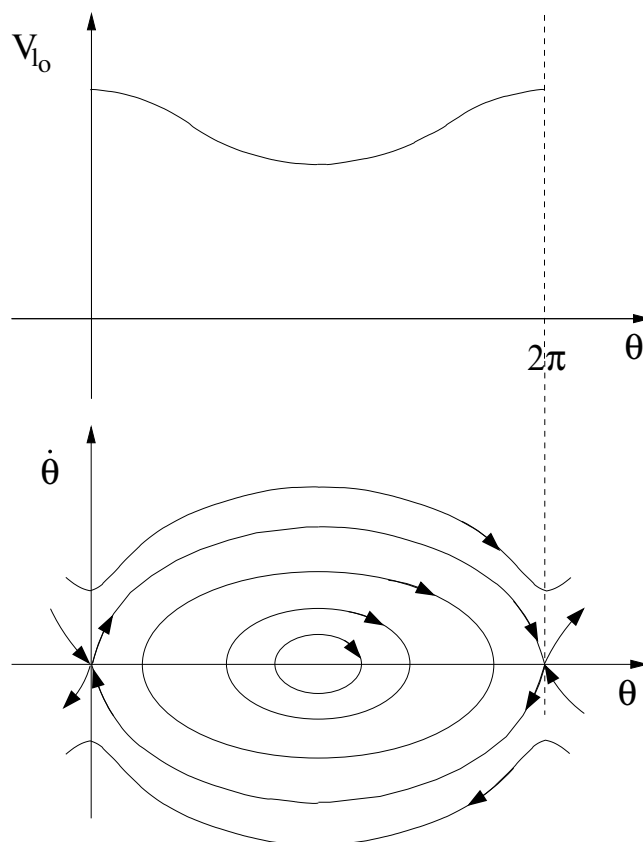


Figura 8.7: Moto per inerzia sul toro: potenziale efficace e ritratto in fase

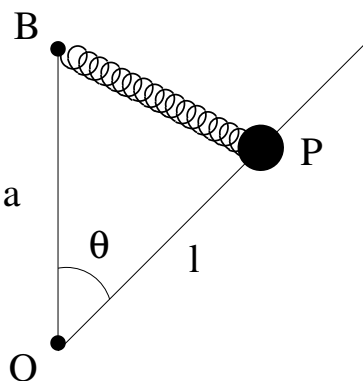


Figura 8.8: Configurazione del torsiografo

Il potenziale della forza peso è  $mgl \cos \theta$ , mentre il potenziale della molla elastica si può scrivere

$$V_{el} = \frac{1}{2}k(\overline{BP})^2 = \frac{1}{2}k(l^2 + a^2 - 2al \cos \theta) ,$$

in virtù del teorema di Carnot (o dei coseni).

La Lagrangiana risulta quindi (tralasciando una costante inessenziale)

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + kal \cos \theta .$$

I punti di equilibrio si ottengono dall'equazione di Lagrange, che dà

$$ml^2\ddot{\theta} = (mg - ka)l \sin \theta ,$$

imponendo che il secondo membro sia nullo. Questo avviene per ogni valore di  $\theta$  (ossia, per ogni configurazione possibile del sistema) se  $m = ka/l$ . In questo caso, la posizione di equilibrio è evidentemente indifferente. In tutti gli altri casi, il moto si desume per analogia con il pendolo semplice.

**Esercizio 6.** Due punti materiali di masse  $m_1, m_2$  sono vincolati a muoversi su due rette parallele in un piano orizzontale, e si attraggono con una forza elastica di costante  $k$ . Determinare il movimento.

**Soluzione.** Scegliamo come coordinate lagrangiane le coordinate  $x_1$  e  $x_2$  dei punti sulle rispettive rette. Perciò, l'energia cinetica ha la forma

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} (m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) ,$$

mentre, denotando con  $d$  la distanza tra le due rette, l'energia potenziale corrispondente alla forza elastica è

$$V(x_1, x_2) = \frac{k}{2} ((x_1 - x_2)^2 + d^2) .$$

Le equazioni di Lagrange corrispondenti alla Lagrangiana  $T - V$  sono quindi

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) \end{cases} .$$

Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali lineari *accoppiate*. Per risolverlo, si considerano le seguenti combinazioni lineari delle coordinate

$$x_b = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} , \quad r = x_1 - x_2 , \quad (8.1.16)$$

ossia, rispettivamente la coordinata del baricentro delle due masse e la loro distanza relativa. Le coordinate  $x_b, r$  sono scelte in modo tale da disaccoppiare il sistema, giacché

$$\begin{cases} \ddot{x}_b = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2) = 0 \\ \ddot{r} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{k}{m_1}(x_1 - x_2) + \frac{k}{m_2}(x_1 - x_2) = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2}r \end{cases}$$

Si osserva immediatamente che il baricentro si muove come una particella libera su di una retta, mentre la distanza relativa compie un moto armonico con frequenza  $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$ . Ciò vuol dire che

$$\begin{cases} x_b(t) = x_b^0 + \dot{x}_b^0 t \\ r(t) = r^0 \cos \omega t + \frac{\dot{r}^0}{\omega} \sin \omega t \end{cases} \quad (8.1.17)$$

in cui i dati iniziali si possono ricavare, una volta noti i valori iniziali di  $x_1$  ed  $x_2$ , dalle equazioni (8.1.16). Questo vuol dire

$$\begin{cases} x_b^0 = \frac{m_1 x_1(t=0) + m_2 x_2(t=0)}{m_1 + m_2}, & \dot{x}_b^0 = \frac{m_1 \dot{x}_1(t=0) + m_2 \dot{x}_2(t=0)}{m_1 + m_2}, \\ r^0 = x_1(t=0) - x_2(t=0), & \dot{r}^0 = \dot{x}_1(t=0) - \dot{x}_2(t=0). \end{cases}$$

Per ottenere la legge oraria delle coordinate  $x_1$ ,  $x_2$  non resta che invertire le stesse relazioni (8.1.16) ed inserirvi le soluzioni (8.1.17). L'inversione dà

$$x_1(t) = x_b(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r(t), \quad x_2(t) = x_b(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r(t).$$

**Esercizio 7.** Siano dati due punti pesanti  $P_1$  e  $P_2$  di egual massa  $m$ , tra di loro interagenti (vedi figura 8.9) mediante una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica  $k$ . I punti sono vincolati a muoversi su due rette distinte giacenti in un piano verticale e formanti un angolo  $\beta$  tra di loro. Inoltre la bisettrice dell'angolo risulta verticale. Studiare i punti di equilibrio del sistema, ed il moto nell'intorno di questi.

**Soluzione.** Introduciamo come coordinate lagrangiane  $q_1$  e  $q_2$  le coordinate dei punti  $P_1$  e  $P_2$  sulle rette, avendo preso il punto  $O$  come origine di ambedue e orientandole verso l'alto.<sup>3</sup> Prendendo la quota di  $O$  come quota di riferimento per il potenziale gravitazionale, ed usando il teorema di Carnot per esprimere la distanza  $\overline{P_1 P_2}^2$ , il potenziale del sistema diventa

$$V(q_1, q_2) = mgq_1 \cos \frac{\beta}{2} + mgq_2 \cos \frac{\beta}{2} + \frac{k}{2}(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos \beta).$$

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \partial_{q_1} V &= mg \cos \frac{\beta}{2} + k(q_1 - q_2 \cos \beta) = 0 \\ \partial_{q_2} V &= mg \cos \frac{\beta}{2} + k(q_2 - q_1 \cos \beta) = 0. \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} (q_1 + q_2)(1 - \cos \beta) &= -mg \cos \frac{\beta}{2} \\ q_1(1 + \cos \beta) - q_2(1 + \cos \beta) &= 0, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Per i punti in figura, le coordinate  $q_1$  e  $q_2$  avranno allora valori negativi.

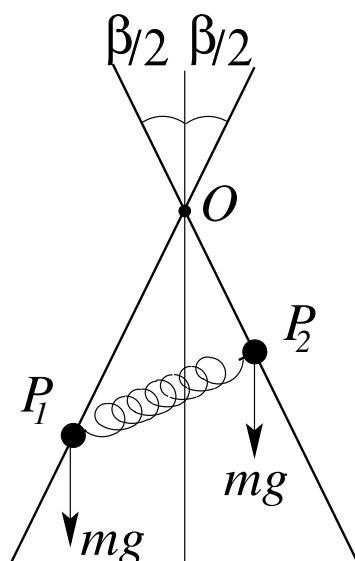


Figura 8.9: Due masse su rette distinte.

che porgono, la seconda  $q_1 = q_2$ , e la prima

$$q_1 = -\frac{mg \cos \beta/2}{4 \sin^2 \beta/2}.$$

L'unico punto di equilibrio è evidentemente un punto di minimo del potenziale, per cui è un punto di equilibrio stabile.

Analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente, per studiare le oscillazioni attorno al punto di equilibrio introduciamo nuove coordinate  $x_1$  ed  $x_2$  che misurano lo scarto rispetto alla posizione di equilibrio mediante le relazioni

$$x_1 = q_1 + \frac{mg \cos \beta/2}{4 \sin^2 \beta/2}, \quad x_2 = q_2 + \frac{mg \cos \beta/2}{4 \sin^2 \beta/2}.$$

Nelle nuove variabili il potenziale si scrive, trascurando al solito il termine costante, nel modo seguente

$$V(x_1, x_2) = \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \beta),$$

in cui, come già spiegato, non compaiono termini lineari in  $x_1$  o in  $x_2$ . Di conseguenza la Lagrangiana si scrive come

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \beta),$$

da cui si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2 \cos \beta) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 \cos \beta). \end{aligned}$$

Questo sistema si può disaccoppiare ponendo, come nell'esercizio precedente,  $r = x_1 - x_2$  ed  $x_b = x_1 + x_2$ . Infatti, sommando e sottraendo le due equazioni differenziali si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_b &= -k(1 - \cos \beta)x_b \\ m\ddot{r} &= -k(1 + \cos \beta)r , \end{aligned}$$

che mostra come le variabili  $x_b$  ed  $r$  si muovono di moto armonico semplice con frequenze rispettivamente pari a  $\omega_1 = \sqrt{k(1 - \cos \beta)/m}$  ed  $\omega_2 = \sqrt{k(1 + \cos \beta)/m}$ . Come nel caso precedente, al modo normale  $x_b$  corrisponde un moto in fase dei punti  $P_1$  e  $P_2$ , che oscillano entrambi prima verso l'alto e poi verso il basso. Invece, al modo normale  $r$  corrisponde un moto in controfase dei punti materiali, in cui uno sale mentre l'altro scende e viceversa.

**Esercizio 8.** Un pendolo semplice di massa  $m$  e lunghezza  $l$  è soggetto, oltre alla gravità, ad una forza elastica esercitata da una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo trascurabile. Un estremo della molla è legato ad  $m$ , l'altro estremo è libero di scorrere su una retta orizzontale, posta a distanza  $a$  dal punto di sospensione del pendolo (cfr. figura 8.13), in modo che la molla rimanga costantemente verticale. Si studi la dinamica del sistema e si trovino i punti di equilibrio per i due valori di  $a = 0$  e  $a = 2l$ .

**Soluzione.** Si può descrivere questo sistema ad un grado di libertà dando

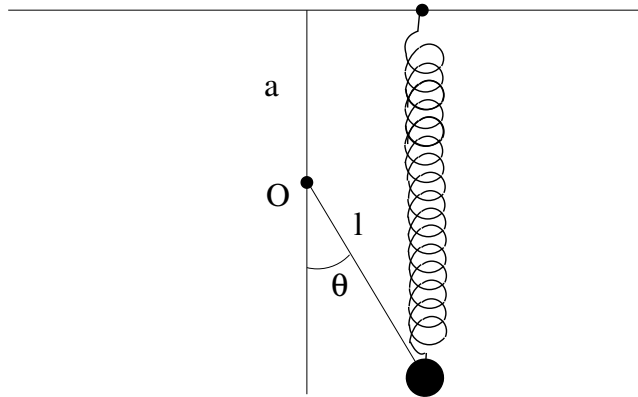


Figura 8.10: Pendolo agganciato

l'inclinazione  $\theta$  del pendolo sulla verticale (si veda la figura 8.10). Se attribuiamo una massa trascurabile alla molla, l'energia cinetica del sistema risulta

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 .$$

Il potenziale è costituito dalla somma di due termini,

$$V = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2}k(a + l \cos \theta)^2 ,$$

di cui il primo è dovuto alla forza peso, il secondo alla forza elastica di costante  $k$ .

L'equazione di Lagrange per la coordinata  $\theta$  conduce all'equazione differenziale seguente, che determina la dinamica:

$$ml^2\ddot{\theta} = -l(mg - ka) \sin \theta + kl^2 \sin \theta \cos \theta .$$

I punti di equilibrio si possono individuare risolvendo rispetto a  $\theta$  l'equazione che si ottiene uguagliando a zero il membro di destra. Ciò mostra che  $\theta_{1,2} = 0, \pi$  sono punti di equilibrio per ogni valore di  $a$ , mentre altri punti di equilibrio provengono dalle eventuali soluzioni dell'equazione

$$-l(mg - ka) + kl^2 \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{mg}{kl} - \frac{a}{l} .$$

In base al teorema di Dirichlet, lo studio della derivata seconda del potenziale

$$V''(\theta) = l(mg - ka) \cos \theta - kl^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

permetterà poi di individuare la stabilità o instabilità dell'equilibrio in tali punti.

Cominciamo dal caso in cui  $a = 0$ :

- il punto  $\theta_1 = 0$ , per il quale  $V''(0) = l(mg - kl)$ , corrisponde ad un massimo o ad un minimo di  $V$  a seconda che  $kl$  sia maggiore o minore di  $mg$ , ed è quindi stabile nel secondo caso;
- nel punto  $\theta_2 = \pi$  si ha in ogni caso un massimo del potenziale;
- altri punti di equilibrio, di angoli  $\theta_{3,4} = \pm \arccos(mg/kl)$ , esistono solo se  $kl > mg$ , e, siccome  $V''(\theta_{3,4}) = -m^2g^2/k + kl^2$ , sono in tal caso stabili.

Se si immagina di far crescere la costante elastica della molla, tenendo tutti gli altri parametri fissati, si assiste ad un fenomeno di biforcazione: per bassi valori di  $k$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono gli unici punti di equilibrio, di cui  $\theta_1$  è il solo stabile; quando si raggiunge la soglia  $k = mg/l$   $\theta_1$  diviene instabile ed appaiono due nuovi punti d'equilibrio stabile,  $\theta_3$  e  $\theta_4$ , simmetrici rispetto alla verticale.

Vendendo al caso per  $a = 2l$ , il comportamento è qualitativamente diverso:

- siccome  $V''(0) = l(mg - 3kl)$ , il punto  $\theta_1 = 0$  è stabile se  $kl < mg/3$ ;
- il punto  $\theta_2 = \pi$ , per il quale  $V''(\theta_2) = l(-mg + kl)$  è stabile se  $kl > mg$ ;
- i punti d'equilibrio aggiuntivi  $\theta_{3,4} = \arccos(mg/kl - 2)$  esistono per  $kl < mg$  e sono stabili se  $kl > mg/3$ .

Facendo crescere  $k$  a partire da zero, si osserva qui che avviene una biforcazione in cui  $\theta_1$  diventa instabile e appaiono i due punti d'equilibrio stabili  $\theta_{3,4}$  per  $k = mg/3l$ , ma al crescere ulteriore di  $k$ , per  $k = mg/l$  tali punti scompaiono ed il punto  $\theta_2$ , precedentemente instabile, diventa stabile.

**Esercizio 9.** In un piano verticale, consideriamo due punti pesanti  $P_1$  e  $P_2$  di egual massa  $m$  (vedi figura 8.11), vincolati in modo che le distanze  $\overline{O_1P_1}$  ed  $\overline{O_2P_2}$  risultino costanti ed eguali tra loro. I due punti interagiscono mediante una molla ideale elastica di lunghezza a riposo trascurabile. Trovare i punti

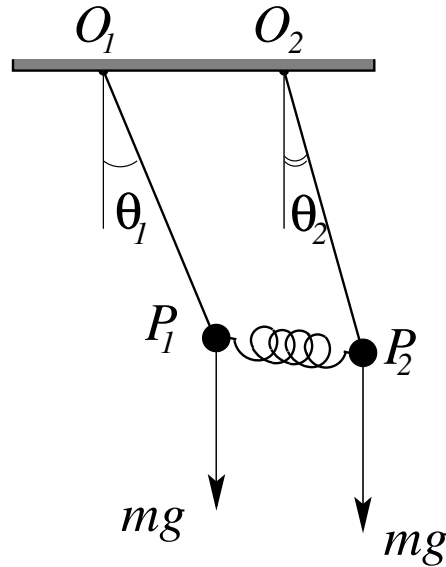


Figura 8.11: Pendoli matematici accoppiati.

di equilibrio e studiarne la stabilità. Studiare inoltre le piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio stabile.

**Soluzione.** L'energia cinetica del sistema si scrive senza difficoltà, e si trova

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2),$$

dove  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono gli angoli che i due segmenti  $\overline{O_1P_1}$  ed  $\overline{O_2P_2}$  formano con la verticale (presi come in figura 8.11), e si è posto  $l = O_1P_1 = O_2P_2$ . Il potenziale risulta invece alquanto più complicato, essendo dato dalla somma del potenziale della forza peso che ha la forma usuale, e del potenziale della molla che in questo caso ha una forma analitica complessa. Sicuramente però ha il minimo assoluto in  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  in quanto è minima sia l'energia potenziale gravitazionale (il baricentro del sistema è nel punto più basso possibile) sia l'energia della molla (in quanto l'allungamento è nullo)<sup>4</sup> Per il teorema di Dirichlet, questo punto risulterà allora di equilibrio stabile.

Per studiare le piccole oscillazioni, si tratta allora di sviluppare in serie di Taylor il potenziale nell'intorno di del punto  $(0, 0)$  arrestandosi al secondo ordine. Per il potenziale della forza peso si ha

$$V_g(\theta_1, \theta_2) = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) \simeq \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2).$$

Per quanto riguarda il potenziale elastico, per il calcolo dell'allungamento al primo ordine si può trascurare lo spostamento verticale degli estremi (che risulta del

<sup>4</sup>Ricordiamo che l'energia potenziale della molla vale  $1/2k(\Delta L)^2$  dove  $\Delta L$  è la variazione di lunghezza della molla rispetto alla lunghezza a riposo.



secondo ordine)<sup>5</sup> per cui vale semplicemente

$$\Delta L \simeq l |\sin \theta_1 - \sin \theta_2| \simeq l |\theta_1 - \theta_2| ,$$

da cui ottengo che lo sviluppo al secondo ordine del potenziale è dato da

$$V_{el} = \frac{kl^2}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 .$$

La Lagrangiana diventa quindi, semplificando per il fattore  $ml^2$ , la seguente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{\omega^2}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \varepsilon(\theta_1 - \theta_2)^2) ,$$

dove si è posto  $\omega = \sqrt{g/l}$  ed  $\varepsilon = kl/mg$ . La quantità  $\varepsilon$  misura il rapporto tra l'intensità della forza peso e quello della forza elastica. E' interessante studiare il problema per  $\varepsilon \ll 1$ , che corrisponde al caso della cosiddetta "risonanza". Infatti per  $\varepsilon = 0$ , cioè se la molla è assente, il problema si riduce a due pendoli identici disaccoppiati, per cui questi oscilleranno con la medesima frequenza. Un accoppiamento, per quanto piccolo, produrrà un grosso effetto: mostreremo infatti che l'energia può passare totalmente da un oscillatore all'altro, in quanti esistono degli stati in cui oscilla uno solo dei pendoli mentre l'altro è fermo, mentre dopo un certo tempo il primo si ferma e comincia ad oscillare il secondo.<sup>6</sup>

Le soluzioni delle equazioni del moto si trovano semplicemente mediante un cambiamento di variabili. Si riesce infatti a disaccoppiare il problema tramite il cambiamento di variabili seguente

$$\chi = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\sqrt{2}} , \quad \xi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{2}} \quad (8.1.18)$$

Infatti un semplice calcolo mostra che

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = \chi^2 + \xi^2 , \quad \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 = \dot{\chi}^2 + \dot{\xi}^2 ,$$

per cui nelle nuove variabili la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 - \omega^2 \xi^2) + \frac{1}{2} (\dot{\chi}^2 - \omega^2 (1 + \varepsilon) \chi^2) ,$$

---

<sup>5</sup>A scanso di equivoci, detto  $d = O_1O_2$  l'allungamento, si deve calcolare in questo modo: la distanza  $P_1P_2$  è data da

$$P_1P_2 = \sqrt{(d + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2} ,$$

per cui l'allungamento vale  $\Delta L = |P_1P_2 - d|$ . Sviluppando i quadrati si arriva alla seguente espressione del potenziale

$$V_{el} = \frac{k}{2} (d - P_1P_2)^2 = \frac{k}{2} \left( d - \sqrt{d^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + 4l^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1)/2} \right)^2 .$$

Per angoli piccoli, possiamo approssimare il seno con l'angolo per cui si ottiene

$$d^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + 4l^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1)/2 \simeq d^2 + 2dl(\theta_2 - \theta_1) + l^2(\theta_2 - \theta_1)^2 = (d + l(\theta_1 - \theta_2))^2 .$$

Si ha dunque immediatamente che lo sviluppo di Taylor al secondo ordine risulta quello dato nel testo, in cui si è cercato di dare sinteticamente la ragione di tale risultato.

<sup>6</sup>Nel caso dell'acustica il fenomeno analogo viene detto battimento.

cioè la Lagrangiana di due oscillatori indipendenti di frequenza rispettivamente pari ad  $\omega$  ed  $\omega_1 = \omega(1 + \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2))$ . Le soluzioni sono le seguenti

$$\begin{aligned}\chi(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \xi(t) &= A_2 \cos(\omega t + \phi_2),\end{aligned}$$

con opportune ampiezze  $A_1, A_2$  e fasi iniziali  $\phi_1, \phi_2$ . Consideriamo il caso molto significativo in cui le ampiezze  $A_1$  ed  $A_2$  sono eguali ad un valore comune, diciamo  $A\sqrt{2}$ . Dalla (8.1.18) si ha

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\xi + \chi}{\sqrt{2}} = A (\cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega_1 t + \phi_2)) \\ \theta_2 &= \frac{\xi - \chi}{\sqrt{2}} = A (\cos(\omega t + \phi) - \cos(\omega_1 t + \phi_2)),\end{aligned}$$

ed applicando le formule di prostaferesi si ottiene

$$\begin{aligned}\theta_1 &= A \cos\left(\frac{\omega - \omega_1}{2}t + \frac{\phi - \phi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_1}{2}t + \frac{\phi + \phi_1}{2}\right) \\ \theta_2 &= A \sin\left(\frac{\omega - \omega_1}{2}t + \frac{\phi - \phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_1}{2}t + \frac{\phi + \phi_1}{2}\right).\end{aligned}$$

La struttura della soluzione è dunque quella di una oscillazione sinusoidale con frequenza  $(\omega + \omega_1)/2$  (cioè essenzialmente  $\omega$ ) ma con ampiezza che varia lentamente, essendo una funzione di  $(\omega_1 - \omega)t = \varepsilon t/2$ . Consideriamo un tempo  $t$  tale che sia

$$\frac{\omega - \omega_1}{2}t + \frac{\phi - \phi_1}{2} = 0 \quad \text{mod } 2\pi.$$

Allora l'ampiezza di oscillazione di  $\theta_2$  è nulla, per cui sta oscillando solamente il primo pendolo. Tale situazione permane per un tempo di ordine  $1/\varepsilon$ , in quanto l'ampiezza varia lentamente. Però dopo un tempo sufficientemente lungo si avrà

$$\frac{\omega - \omega_1}{2}t + \frac{\phi - \phi_1}{2} \simeq \frac{\pi}{2} \quad \text{mod } 2\pi,$$

per cui ora sarà nulla l'ampiezza di oscillazione di  $\theta_1$ , cioè starà oscillando solo il secondo pendolo. Si avrà dunque un completo passaggio dell'energia dal primo pendolo al secondo. Naturalmente, dopo un tempo convenientemente lungo si ritornerà alla situazione iniziale in cui oscilla solo il primo pendolo, e così via. Nel caso di risonanza, dunque, l'energia del sistema viene suddivisa tra i diversi oscillatori, e non può restare bloccata in un sottosistema.

Per quanto riguarda l'esistenza di altri possibili punti di equilibrio, notiamo che il potenziale è periodico, per cui ci si può limitare a studiarlo nel dominio  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Questo insieme è compatto, per cui il potenziale assume sia il suo valore minimo (nel punto  $(0, 0)$ , come abbiamo detto) che il suo valore massimo. Tale punto di massimo sarà un altro punto di equilibrio, sebbene instabile. La presenza di ulteriori punti di equilibrio dipende dal valore della costante elastica  $k$  della molla. Ad esempio, se  $k = 0$ , la posizione con i pendoli verticali nella posizione superiore, rappresenta una posizione di equilibrio nonché il massimo del potenziale.

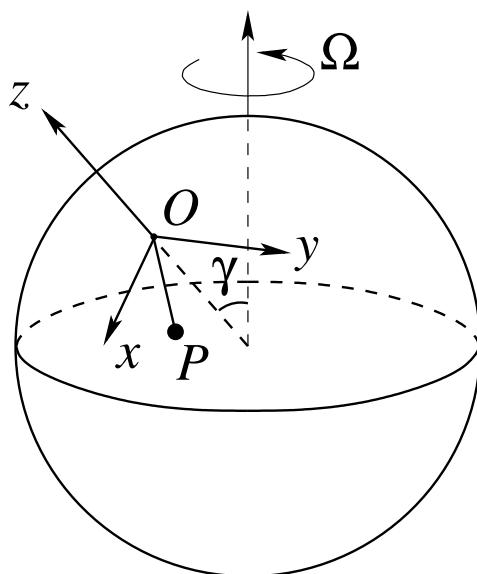


Figura 8.12: Il pendolo di Foucault.

Tale posizione rimane un punto di equilibrio (instabile) per ogni valore di  $k$ , ma non necessariamente il massimo per grandi valori della costante elastica.<sup>7</sup>

**Esercizio 10 (Pendolo di Foucault).** Scrivere l'equazione delle piccole oscillazioni per un pendolo sferico, il cui punto di sospensione è solidale con la Terra. Risolvere le equazioni di moto mostrando che il piano di oscillazione, in un riferimento solidale con la Terra, ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}$ , essendo  $\boldsymbol{\omega}$  la velocità angolare della terra, e  $\mathbf{k}$  la direzione della verticale.

**Soluzione.** Cominciamo con lo scrivere la Lagrangiana del nostro sistema, in un sistema di riferimento solidale con la Terra e dunque in rotazione. Supporremo il baricentro della Terra in moto rettilineo uniforme, trascurando cioè la rotazione di questa attorno al Sole (nonché l'azione della Luna). Introduciamo, come usuale, un riferimento cartesiano  $(x, y, z)$ , in cui l'origine coincide con alla posizione di equilibrio stabile del pendolo, l'asse  $z$  risulta verticale, mentre l'asse  $x$  si trova nel piano meridiano passante per il punto d'equilibrio stabile (vedi figura 8.12). La velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$  formerà dunque un angolo  $\gamma$  con la verticale che è complementare all'angolo che esprime la latitudine del punto di sospensione.<sup>8</sup> Usando le coordinate

<sup>7</sup>Tale posizione rappresenta un massimo per il potenziale gravitazionale, ma un minimo per il potenziale elastico. Per grandi valori di  $k$ , il massimo si raggiungerà per posizioni prossime alla posizioni in cui l'energia elastica ha un massimo, cioè  $\theta_1 = -\pi/2$  e  $\theta_2 = \pi/2$ .

<sup>8</sup>L'angolo  $\gamma$  sarà dunque nullo ai poli, e pari a  $\pi/2$  all'equatore.

$x$  ed  $y$  come coordinate lagrangiane, il vincolo sarà espresso da

$$z = l - \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} ,$$

dove  $l$  è la lunghezza del pendolo. L'energia potenziale del punto sarà quindi data da

$$V = mgz = \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) + O(x^2 + y^2) ,$$

dove i termini di ordine superiore si possono trascurare nell'approssimazione delle piccole oscillazioni.

L'energia cinetica nel sistema rotante si scrive invece come

$$T = \frac{m}{2} (\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}) + (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x})^2) ,$$

dove, rispetto all'esercizio precedente, si è semplicemente esplicitato il quadrato. Si può controllare che, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, la componente verticale delle velocità  $\dot{z}$  si può trascurare nell'espressione dell'energia cinetica,<sup>9</sup> e quindi ci si può limitare a scrivere l'energia cinetica per un moto che avvenga nel piano  $(x, y, 0)$ . Ricordando ancora che per le proprietà del triplo prodotto misto vale  $\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v})$  si trova allora

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\Omega_z(x\dot{y} - y\dot{x}) + \Omega_z^2 x^2 + |\boldsymbol{\Omega}|^2 y^2) ,$$

dove il  $\Omega_z = |\boldsymbol{\Omega}| \cos \gamma$  è la proiezione della velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$  sulla verticale.

Dopo aver semplificato il fattore comune  $m$ , la Lagrangiana linearizzata del problema diventa la seguente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\Omega_z(x\dot{y} - y\dot{x}) + \Omega_z^2 x^2 + |\boldsymbol{\Omega}|^2 y^2) - \frac{g}{2l} (x^2 + y^2) ,$$

dove si è pure trascurato il termine costante del potenziale, e si ottengono quindi le equazioni del moto seguenti

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega_z \dot{y} + \left( \frac{g}{l} - \Omega_z^2 \right) x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega_z \dot{x} + \left( \frac{g}{l} - |\boldsymbol{\Omega}|^2 \right) y &= 0 . \end{aligned}$$

Queste equazioni si possono risolvere come mostrato nella sezione precedente cercando i modi normali di oscillazione. La soluzione assume una forza particolarmente espressiva se si trascura  $|\boldsymbol{\Omega}|^2$  rispetto a  $g/l$ ; una maniera molto rapida di ricavarla consiste nel notare che, in questa approssimazione, la Lagrangiana si riduce alla Lagrangiana di due oscillatori armonici disaccoppiati

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{g}{2l} (X^2 + Y^2) ,$$

se ci si pone in un sistema ruotante attorno all'asse  $z$  con velocità angolare  $-\Omega_z$ . Le soluzioni saranno date dunque dalla composizione di due moti armonici semplici

<sup>9</sup>Infatti si ha  $\dot{z} = (x\dot{x} + y\dot{y})/l$  più termini di ordine superiore, cioè  $\dot{z}$  dipende almeno quadraticamente da  $x$ ,  $y$  e dalle loro derivate. Nell'espressione dell'energia cinetica allora i termini in cui compaiono  $z$  o  $\dot{z}$  sono almeno del **terzo ordine** in  $x$ ,  $y$  e nelle loro derivate. Nella procedura di linearizzazione tali termini devono quindi essere ignorati.

di frequenza  $\omega = \sqrt{g/l}$  lungo gli assi  $X$  ed  $Y$ , e da una rotazione attorno all'asse  $z$  con velocità  $-\Omega_z$ . Si troverà dunque

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega_z t & \sin \Omega_z t \\ -\sin \Omega_z t & \cos \Omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega t + \phi_0) \\ A_2 \sin(\omega t + \phi_1) \end{pmatrix},$$

con opportune ampiezze  $A_1, A_2$  e fasi  $\phi_1, \phi_2$ .

In particolare, per dati iniziali per cui  $A_2 = 0$ , il pendolo oscillerà in un piano che ruota lentamente. A differenza di quanto si potrebbe ingenuamente pensare, il piano non compirà una rotazione completa in un giorno, a meno che il punto di sospensione si trovi ad uno dei poli terrestri. Viceversa la sua velocità angolare sarà tanto più piccola quanto più ci si avvicina all'equatore, fino ad annullarsi su tale linea.

**Osservazione.** Il piano di rotazione non rimane fisso in un sistema inerziale solidale con le stelle fisse, in quanto nell'analisi bisogna ricordare che è presente anche la reazione vincolare, che appunto fa ruotare il piano di oscillazione anche nel sistema inerziale.

## 8.2 Il corpo rigido

**Esercizio 11 (Il pendolo composto).** Si consideri un corpo rigido liberamente girevole intorno all'asse fisso orizzontale  $x$ , soggetto alla forza peso, e se ne determini il moto.

**Soluzione.** Il vincolo imposto in questo caso è olonomo e riduce il numero di gradi di libertà ad uno solo: infatti, la posizione del solido nello spazio può essere individuata indicando l'angolo  $\theta$  d'inclinazione rispetto alla verticale discendente nel piano contenente l'asse di rotazione e il baricentro (cfr. figura 8.13). Poiché ogni moto possibile corrisponde ad un moto di rotazione attorno all'asse  $x$ , l'energia cinetica si riduce al termine

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{A} \dot{\theta}^2,$$

con  $\mathcal{A}$  momento d'inerzia del solido rispetto ad  $x$ , mentre l'energia potenziale gravitazionale si può calcolare immaginando che tutta la massa del sistema sia concentrata nel baricentro, ossia

$$V = -mgr \cos \theta,$$

in cui  $r$  indica la distanza del baricentro dall'asse (si noti che  $r \cos \theta$  è l'altezza del baricentro sulla verticale).

La dinamica è quindi determinata dall'equazione

$$\mathcal{A} \ddot{\theta} = -mgr \sin \theta.$$

Essa è evidentemente identica all'equazione del moto di un pendolo semplice, di lunghezza  $\mathcal{A}/mr$ , che è detta *lunghezza ridotta* del pendolo composto. Si osservi

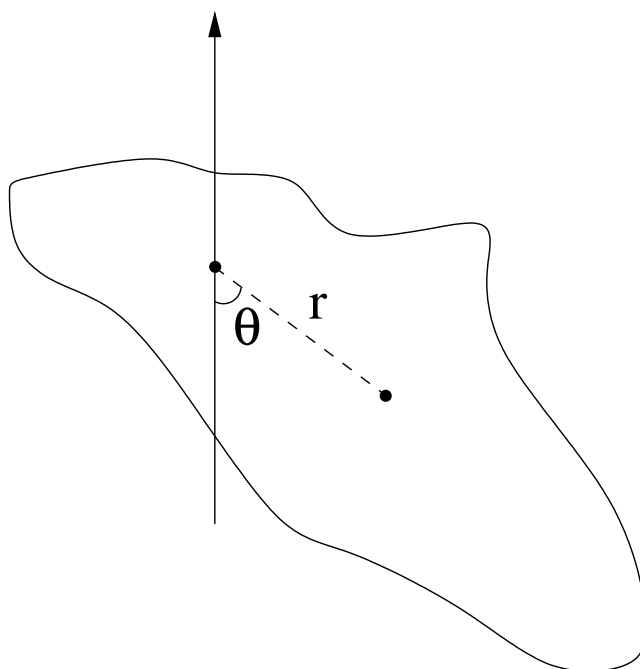


Figura 8.13: Il pendolo composto

che nel caso in cui la massa del solido sia concentrata in un punto, posto a distanza  $r$  dall'asse, esso sarà il baricentro e si avrà  $\mathcal{A} = mr^2$ , trovando che la lunghezza ridotta è uguale ad  $r$ : si è, infatti, ricaduti nel caso di un pendolo semplice puntiforme, visto come limite di un pendolo composto esteso.

**Esercizio 12 (L'altalena basculante su un appoggio circolare).**

Si consideri un'asta pesante omogenea  $AB$  di lunghezza  $2l$  e massa  $m$ , che si muova, senza strisciare, in modo da rimanere sempre appoggiata su un cerchio di centro  $O$  e raggio  $\overline{OH} = r$  (vedi la Figura 8.14). Si supponga dapprima che il centro  $C$  dell'asta coincida, quando essa sia orizzontale, con il punto  $H$  (intersezione della verticale per il centro  $O$  del cerchio con il cerchio medesimo). In questo caso si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. Si studino inoltre le piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio stabile. Successivamente si compia il medesimo studio, rimuovendo la condizione che  $C$  coincida con  $H$  quando l'asta sia orizzontale.

**Soluzione.** Il problema si può porre in forma lagrangiana, in quanto i vincoli sono perfetti. Il primo problema riguarda la determinazione dei gradi di libertà del sistema. Ora se si conosce la posizione del centro  $C$  dell'asta e l'angolo che

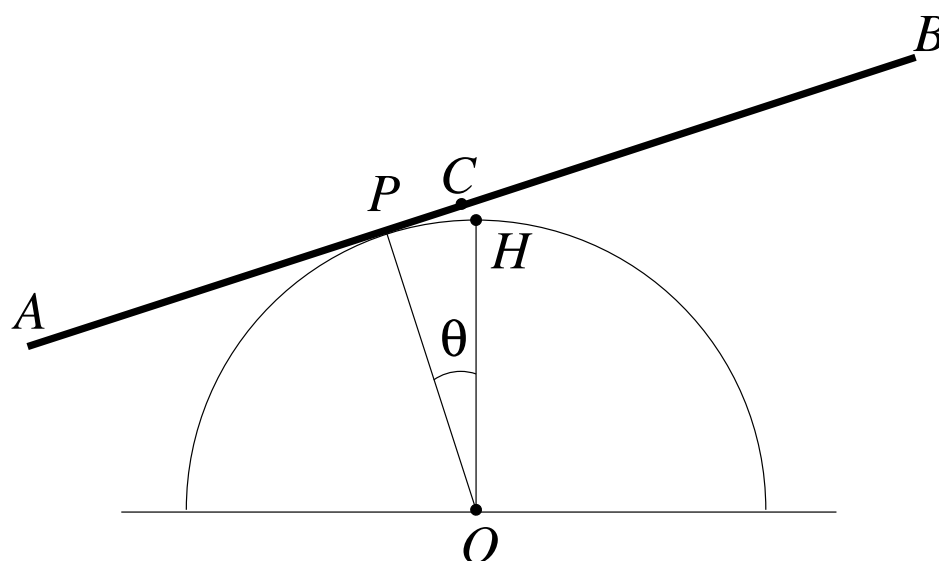


Figura 8.14: Altalena basculante.

essa forma per esempio con l'orizzontale, la posizione di tutti i punti dell'asta risulterà determinata. Con riferimento alla Figura 8.14, è evidente che l'angolo con l'orizzontale coincide con l'angolo  $\theta$  che il raggio  $OP$  (dove  $P$  è il punto d'appoggio) forma con la verticale. Il problema che rimane è ora determinare la posizione di  $C$ . Si deve ora usare il fatto che l'asta si muove senza strisciare sul cerchio: supponiamo sia  $Q$  il punto sulla circonferenza quando il punto di contatto dell'asta è  $C$ . Il testo del problema ci dice di supporre inizialmente  $Q \equiv H$ . In ogni caso questo punto sarà un certo punto sulla circonferenza. Se l'asta si muove senza strisciare, allora la lunghezza del segmento  $\overline{PC}$  coincide con la lunghezza dell'arco  $\widehat{PQ}$ .<sup>10</sup> In questo modo la posizione del centro  $C$  rimane fissata, per cui il problema ha UN SOLO GRADO di libertà. Nell'ipotesi più semplice che ci indica il testo del problema, quando cioè si ha  $Q \equiv H$ , vale  $\overline{PC} = r\theta$ , per cui indicate con  $(x_C, y_C)$  le coordinate cartesiane di  $C$  (rispetto ad un sistema con origine in  $O$  ed asse delle ascisse orizzontale) si avrà

$$\begin{aligned} x_C &= r \sin \theta - \overline{PC} \cos \theta = r(\sin \theta - \theta \cos \theta) \\ y_C &= r \cos \theta + \overline{PC} \sin \theta = r(\cos \theta + \theta \sin \theta) . \end{aligned}$$

Ora, per scrivere la Lagrangiana e quindi le equazioni di moto, bisogna scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale del nostro sistema. L'energia potenziale si scrive immediatamente, ricordando che, per la forza peso, l'energia potenziale si può calcolare pensando che tutta la massa del sistema sia concentrata nel baricentro, cioè è data da

$$V = mgy_C = mgr(\cos \theta + \theta \sin \theta) .$$

<sup>10</sup>La dimostrazione diviene intuitiva se si pensa all'asta fissa, sopra cui rotoli il cerchio.

Per il calcolo dell'energia cinetica, bisogna fare ricorso al Teorema di König. Questo afferma che l'energia cinetica di un sistema è la somma dell'energia cinetica del baricentro (cioè pensando il baricentro come un punto pesante in cui sia concentrata tutta la massa del sistema) e dell'energia cinetica dei movimenti relativi al baricentro, si ha cioè

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 ,$$

dove  $I$  è il momento di inerzia dell'asta rispetto al centro.<sup>11</sup> Usando le espressioni trovate per  $x_C$  e  $y_C$  si trova

$$T = \frac{1}{2}m \left( r^2\dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{3} \dot{\theta}^2 \right) ,$$

ove si è usato il valore  $I = m\overline{AB}^2/12$  relativo ad una sbarra omogenea. L'espressione per la Lagrangiana è dunque la seguente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( r^2\dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{3} \dot{\theta}^2 \right) - mgr(\cos \theta + \theta \sin \theta) .$$

Ora i punti di equilibrio si trovano risolvendo l'equazione seguente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}(0, \theta) = -mgr\theta \cos \theta = 0 ,$$

che fornisce i tre punti di equilibrio (dalla figura si vede che deve essere  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) seguenti:

$$\theta_0 = 0 , \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} , \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} .$$

La linearizzazione nell'intorno del punto  $\theta_0$  si effettua senza difficoltà e si trova che la Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgr\theta^2 ,$$

che corrisponde alla Lagrangiana di un oscillatore armonico. Il punto di equilibrio è stabile, come si poteva facilmente intuire applicando il criterio di Torricelli, in quanto ogni spostamento compatibile con i vincoli fa innalzare il baricentro  $C$  rispetto al punto  $H$  che è la posizione corrispondente al punto di equilibrio. Si riconosce immediatamente che la frequenza  $\omega$  delle piccole oscillazioni è data da

$$\omega = \sqrt{\frac{3gr}{l^2}} .$$

<sup>11</sup>Questa formula dovrebbe essere nota dai corsi elementari di fisica. La sua deduzione presenta alcuni aspetti non ovvi. Un modo per giungere a tale forma consiste nel pensare che il movimento di un generico punto  $P_i$  dell'asta relativo al baricentro, sia una rotazione attorno a  $C$  con velocità in modulo pari a  $\overline{CP_i}\dot{\theta}$ . Se ogni punto ha massa  $m_i$ , l'energia cinetica relativa al baricentro risulterà pari a  $T_{rel} = \frac{1}{2} \sum m_i \overline{CP_i}^2 \dot{\theta}^2$ , cioè quella data nel testo una volta che si ponga il momento di inerzia pari a  $I = \sum m_i \overline{CP_i}^2$ . La consueta espressione per una sbarra omogenea  $I = m\overline{AB}^2/12$  segue approssimando la somma mediante un integrale.



Invece gli altri due punti di equilibrio corrispondono alla sbarra verticale, e sono di equilibrio instabile. Infatti un poco di intuizione geometrica suggerisce che in tali posizioni il baricentro  $C$  è in una posizione di altezza (relativa) massima, e quindi la posizione corrisponde ad un punto di massimo (non degenere) del potenziale, cosicché la posizione risulta instabile. Formalmente introduciamo lo scostamento  $\varphi$  dalla posizione di equilibrio mediante  $\theta = \pm \frac{\pi}{2} + \varphi$ , e calcolando poi la derivata seconda del potenziale in  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , che fornisce

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \left( 0, \pm \frac{\pi}{2} \right) = mgr \frac{\pi}{2},$$

si ottiene la Lagrangiana linearizzata

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left( \frac{\pi^2}{4} r^2 + \frac{l^2}{3} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{\pi}{4} mgr \varphi^2.$$

Questa è la Lagrangiana del repulsore armonico che mostra, come avevamo annunciato, che i due punti di equilibrio risultano instabili.

Per quanto riguarda la seconda parte del problema, si risolve esattamente come qui indicato, a patto di sostituire la distanza  $\overline{PC} = r(\theta - \theta_Q)$  dove  $\theta_Q$  è l'angolo che il punto  $Q$ , punto di contatto tra  $C$  e la circonferenza, forma con la verticale. I calcoli sono in linea di principio i medesimi, ma evidentemente con qualche dettaglio diverso. Lasciamo tali calcoli ai lettori più volenterosi, o particolarmente curiosi.

### 8.3 Cinematica degli urti relativistici

In questo paragrafo descriviamo come avvengano gli urti tra coppie di particelle nella teoria della relatività ristretta, esponendo quali sono le restrizioni imposte dalla legge di conservazione del quadri-impulso totale. Tratteremo prima l'urto elastico (in cui la massa a riposo delle particelle non varia), poi un caso particolare di urto anelastico.

La legge di conservazione del quadri-impulso in assenza di forze esterne garantisce che il quadri-impulso *totale*  $P_{TOT}^\mu$  non vari nel corso dell'urto. Indicando con una tilde le quantità riferite alla situazione *dopo* l'urto, essa si scrive

$$P_{TOT}^\mu = \tilde{P}_{TOT}^\mu.$$

Nel caso di urto di una coppia di particelle, si ha  $P_{TOT}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ , in cui  $p_1^\mu$  e  $p_2^\mu$  indicano i quadri-impulsi delle due particelle, e la conservazione del quadri-impulso totale diviene

$$p_1^\mu + p_2^\mu = \tilde{p}_1^\mu + \tilde{p}_2^\mu. \quad (8.3.1)$$

Si tratta di un sistema di quattro equazioni, in cui abitualmente sono note le condizioni prima dell'urto e si vogliono determinare quelle al termine dello stesso. Le incognite sono quindi le quattro componenti di  $\tilde{p}_1^\mu$  e le quattro

componenti di  $\tilde{p}_2^\mu$ . A ridurre la complessità del problema intervengono le due relazioni  $p_i^\mu p_{i\mu} = \tilde{p}_i^\mu \tilde{p}_{i\mu} = m_i^2 c^2$ , valide nel caso di urto elastico, e l'ipotesi che, per ragioni di simmetria, le forze in gioco nell'urto siano tali che le particelle rimangano nel piano definito dalle quantità di moto iniziali  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  (ossia, delle componenti spaziali di  $p_1^\mu, p_2^\mu$ ). In ogni sistema di riferimento inerziale si possono quindi scegliere delle coordinate tali che le componenti  $p_1^z = p_2^z = \tilde{p}_1^z = \tilde{p}_2^z$  siano tutte identicamente nulle, mentre le componenti temporali  $\tilde{p}_i^0$  possono essere espresse in termini delle altre componenti e delle masse. Ci siamo ridotti così ad un sistema di 3 equazioni, dato dalle componenti  $(0, x, y)$  della (8.3.1), nelle 4 incognite  $\tilde{p}_1^x, \tilde{p}_1^y, \tilde{p}_2^x, \tilde{p}_2^y$ . Ci si può quindi attendere di avere genericamente un'infinità di soluzioni, dipendente da un parametro, il quale è solitamente scelto come l'angolo (ovviamente dipendente dal sistema di riferimento in cui ci si pone) di deviazione di una particella, detto angolo di diffusione o di scattering. La determinazione di tale angolo dipende dal tipo di forze coinvolte: non ci proponiamo qui questo scopo (cioè, di studiare la *dinamica* dell'urto), bensì di trovare l'espressione di tutte le incognite in funzione di quest'angolo (perciò si parla di semplice *cinematica* dell'urto).

### 8.3.1 Lo scattering di Compton

La soluzione più immediata si trova nell'urto di una particella di massa nulla (un fotone) con una particella massiva, detto *scattering di Compton*. Supponiamo che la particella massiva, di massa a riposo  $M$ , sia inizialmente ferma nel sistema di riferimento del laboratorio, cosicché il suo quadri-impulso prima dell'urto abbia componenti  $P^\mu = (Mc, 0, 0, 0)$  in questo sistema. Il fotone ha nello stesso sistema un quadri-impulso  $p^\mu = (\hbar\omega/c, \hbar\mathbf{k})$ , dove  $\mathbf{k}$  è il vettore d'onda del fotone,  $\omega = c|\mathbf{k}|$  la sua frequenza angolare e  $\hbar = h/2\pi$  la costante di Planck ridotta. In seguito all'urto esso assumerà un quadri-impulso  $\tilde{p}^\mu = (\hbar\tilde{\omega}/c, \hbar\tilde{\mathbf{k}})$ .

Intendiamo trovare la variazione di frequenza del fotone in funzione dell'angolo di diffusione nel sistema di riferimento del laboratorio, ossia dell'angolo  $\theta$  tra  $\mathbf{k}$  e  $\tilde{\mathbf{k}}$ . Partiamo dal riscrivere la conservazione dell'impulso totale (8.3.1) come

$$\tilde{P}^\mu = P^\mu + p^\mu - \tilde{p}^\mu .$$

Elevando al quadrato entrambi i membri si ha

$$M^2 c^2 = M^2 c^2 + 2 (P^\mu p_\mu - P^\mu \tilde{p}_\mu - p^\mu \tilde{p}_\mu) .$$

Sfruttando l'espressione di  $P^\mu$  e  $p^\mu$  nel sistema di riferimento del laboratorio si ha  $P^\mu p_\mu = M\hbar\omega$ ,  $P^\mu \tilde{p}_\mu = M\hbar\tilde{\omega}$ , mentre l'ultimo prodotto dà

$$p^\mu \tilde{p}_\mu = \hbar^2 \left( \frac{\omega\tilde{\omega}}{c^2} - \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{k}} \right) = \frac{\hbar^2 \omega\tilde{\omega}}{c^2} (1 - \cos\theta) .$$

Inserendo queste relazioni nell'uguaglianza precedente si ottiene

$$\frac{1}{\tilde{\omega}} - \frac{1}{\omega} = \frac{\hbar}{Mc^2}(1 - \cos \theta) ,$$

relazione che è spesso espressa in termini della lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi c/\omega$  del fotone e della lunghezza Compton  $\lambda_C = 2\pi\hbar/(Mc) = h/(Mc)$  della particella come

$$\tilde{\lambda} - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta) .$$

Questa formula riassume elegantemente la variazione della lunghezza d'onda in funzione di  $\theta$ , da una variazione nulla in assenza di deviazione ( $\theta = 0$ ), a quella massima pari a  $2\lambda_C$  per un fotone respinto all'indietro. Si noti che la lunghezza d'onda in ogni caso aumenta nell'urto, per cui l'energia del fotone diminuisce, in accordo col fatto che esso trasferisce parte della propria energia alla particella massiva.

### 8.3.2 Il sistema del centro di massa e l'urto elastico monodimensionale

Nel caso più generale di urto tra particelle massive, il sistema di riferimento più conveniente da scegliere per svolgere i calcoli è quello in cui la quantità di moto totale  $\mathbf{P}_{TOT}$  (la componente spaziale del quadri-impulso  $P_{TOT}^\mu$ ) è inizialmente nulla, detto sistema del centro di massa.

**Esercizio 13.** Una particella di impulso  $\mathbf{p}_1$  e massa a riposo  $m_1$  incide contro una di impulso uguale ed opposto  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$  e massa a riposo  $m_2$ . Si determinino gli impulsi delle due particelle dopo l'urto, che si suppone elastico.

**Soluzione.** Siamo nel caso di un urto binario nel sistema di riferimento del centro di massa, poiché  $\mathbf{P}_{TOT} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ . Poiché  $\mathbf{P}_{TOT}$  si conserva identicamente nullo, in seguito all'urto  $\tilde{\mathbf{p}}_1 = -\tilde{\mathbf{p}}_2$ . Inoltre, trattandosi di urto elastico, le masse a riposo di entrambe le particelle si conservano. Ciò, unitamente alla conservazione di  $P_{TOT}^0$ , implica che

$$\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2 c^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2 c^2} = \sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_1|^2 + m_1^2 c^2} + \sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2 + m_2^2 c^2} ,$$

e quindi che il modulo di  $\mathbf{p}_1$  (e  $\mathbf{p}_2$ ) resti costante. Le quantità di moto rimangono di modulo invariato, uguali ed opposte tra loro prima e dopo l'urto, l'unica cosa che può avvenire è che le particelle vengano deviate di un uguale angolo  $\chi$ . Questa è il comportamento generico in un urto elastico binario nel sistema di riferimento del centro di massa.

Il problema che resta da risolvere è comprendere come l'energia e l'impulso cambino in funzione di  $\chi$  in un generico altro sistema di riferimento, ad esempio, quello del laboratorio in cui avviene l'urto, che generalmente non coincide con quello del

centro di massa. Ci limitiamo qui a studiare nel dettaglio un caso di urto elastico monodimensionale (in cui, cioè, le particelle si muovono su una stessa retta nel sistema di riferimento del laboratorio e vi sia riflessione completa,  $\chi = \pi$ ).

**Esercizio 14.** Una particella di massa  $m$  si muove di velocità  $v_1 = v$  rispetto al sistema di riferimento del laboratorio ed urta contro una particella di ugual massa, con velocità lungo la stessa direzione ma verso opposto, di modulo  $v_2 = v/2$ . Si determinino le velocità di entrambe le particelle dopo l'urto.

**Soluzione.** Il primo passo da compiere è trovare il sistema di riferimento del centro di massa, che per ovvie considerazioni di simmetria si muoverà di velocità  $u$  lungo la direzione comune delle due particelle. Il valore di  $u$  è la soluzione di un'equazione lineare che si ottiene nel seguente modo. Il quadri-impulso totale ha componenti, nel sistema di riferimento del laboratorio,

$$P_{TOT}^\mu = \left( mc(\gamma(v) + \gamma(v/2)), mv \left( \gamma(v) - \frac{1}{2}\gamma(v/2) \right), 0, 0 \right).$$

Siccome le componenti del quadri-impulso si trasformano come quelle di un quadri-vettore, si deduce che la componente spaziale di  $P_{TOT}^\mu$  lungo la direzione del moto vale, nel sistema del centro di massa,

$$m\gamma(u) \left( \left( \gamma(v) - \frac{1}{2}\gamma(v/2) \right) v - u(\gamma(v) + \gamma(v/2)) \right) = 0.$$

Perciò, si ha

$$u = \frac{\gamma(v) - \frac{1}{2}\gamma(v/2)}{\gamma(v) + \gamma(v/2)} v.$$

Questo permette di inferire il valore della velocità  $v_0$  della particella 1 nel sistema di riferimento del centro di massa, secondo la formula relativistica di composizione delle velocità:

$$v_0 = \frac{v - u}{1 - uv/c^2}$$

Dopo l'urto, per ipotesi gli impulsi cambiano di segno nel sistema di riferimento del centro di massa, e così fanno le velocità, per cui, tornando al sistema di riferimento del laboratorio,

$$\tilde{v}_2 = \frac{v_0 + u}{1 + uv_0/c^2} = v \Rightarrow \tilde{v}_1 = -v/2.$$

### 8.3.3 L'urto completamente anelastico monodimensionale

Negli urti anelastici la massa delle particelle non si conserva, per cui vengono meno le considerazioni che ci avevano portato a concludere che nel sistema di riferimento del centro di massa l'impulso di ogni particella può cambiare di direzione, ma non d'intensità. Per caratterizzare la cinematica, bisogna allora specificare l'ammontare di massa che si trasforma in energia (o viceversa).

**Esercizio 15.** Si consideri un urto completamente anelastico tra due particelle che hanno inizialmente impulsi uguali ed opposti.

**Soluzione.** Si tratta del caso più semplice possibile, un urto binario nel sistema del riferimento del centro di massa. L'urto è detto completamente anelastico se in seguito ad esso si forma una sola particella, in quiete rispetto al sistema di riferimento del centro di massa. Inizialmente si ha una particella con massa  $m_1$  e velocità  $\mathbf{v}_1$ , incidente su di una particella di massa  $m_2$  e velocità  $\mathbf{v}_2$ , tali che  $m_1\gamma(v_1)\mathbf{v}_1 = -m_2\gamma(v_2)\mathbf{v}_2$ . In seguito all'urto, si ha la formazione di una sola particella di massa  $M$ , di cui vogliamo determinare il valore, in quiete. Si fa ancora una volta uso della conservazione del quadri-impulso, la cui quarta componente prima dell'urto è  $m_1\gamma(v_1)c + m_2\gamma(v_2)c$ . Dopo l'urto, essa diviene pari a  $Mc$ . Imponendo l'uguaglianza tra queste quantità, si ottiene

$$M = m_1\gamma(v_1) + m_2\gamma(v_2) .$$

**Esercizio 16.** Una particella di massa  $m$  e velocità iniziale  $\mathbf{v}$  incide su di una particella ferma, di massa  $2m$ . Si determinino la velocità e la massa a riposo della particella formantesi dall'urto completamente anelastico tra le due.

**Soluzione.** La soluzione del problema si riconduce agevolmente a quella dell'esercizio precedente, una volta che si sia passati al sistema del centro di massa. Ancora una volta scriviamo il quadri-impulso totale nel sistema del laboratorio come

$$P_{TOT}^\mu = (mc(\gamma(v) + 2), m\gamma(v)\mathbf{v}) .$$

La velocità  $\mathbf{u}$  di traslazione del sistema di riferimento del centro di massa rispetto al laboratorio si ottiene imponendo che le componenti spaziali di  $P_{TOT}^\mu$  siano nulle in tale sistema, per cui

$$m\gamma(u)(\mathbf{v} - (\gamma(v) + 2)\mathbf{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\gamma(v) + 2} .$$

Per definizione di urto completamente anelastico, questa è anche la velocità nel sistema del laboratorio della particella formatasi al termine dell'urto, giacché questa si trova in quiete rispetto al centro di massa. La massa  $M$  a riposo di tale particella si ricava poi andando ad imporre che la componente  $P_{TOT}^0$  sia uguale ad  $Mc$  nel sistema di riferimento del centro di massa. Questa componente può essere determinata dalle velocità delle due particelle rispetto al sistema del centro di massa, oppure applicando ancora le regole di trasformazione di un vettore a partire dall'espressione di  $P_{TOT}^\mu$  nel sistema del laboratorio. Il risultato è

$$M = m\gamma(u) \left( \gamma(v) + 2 - \gamma(v) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right) .$$