

Capitolo 3

I principi variazionali

3.1 Introduzione

Lo scopo centrale di questo capitolo è di discutere il *principio variazionale di Hamilton* per i *movimenti* di un sistema meccanico (*Principio di minima azione, o dell'azione stazionaria*), e della sua variante che va sotto il nome di *Principio di Maupertuis–Jacobi*, e riguarda solo le corrispondenti *traiettorie*.¹ Risulterà che il principio di Hamilton è sostanzialmente un sostituto del familiare principio della meccanica che caratterizza i movimenti “fisici” come quelli soddisfacenti le equazioni di Newton o le equazioni di Lagrange o di Hamilton. Ma, come sempre avviene quando si formula un principio in una forma “sostanzialmente equivalente”, accade anche che il nuovo punto di vista può essere più conveniente a scopi “euristici”, ovvero ai fini di estendere le vecchie teorie a nuovi campi.

Questo fatto è descritto in maniera mirabile da Feynman, nella conferenza che egli tenne in occasione del conferimento del premio Nobel, dove egli dice (pag. 177):

*“Theories of the known (cioè le teorie dei fatti conosciuti) which are described by different physical ideas may be equivalent in all their predictions and are hence scientifically indistinguishable. However, they are not psychologically identical when trying to move from that base into the unknown. For different views suggest different kinds of modifications which might be made and hence are not equivalent in the hypotheses one generates from them in one’s attempt to understand what is not yet understood.”*²

¹Ad esempio, per un punto nello spazio un **movimento** è definito dalla legge $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, cioè dalla funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R}^3 che ad ogni tempo $t \in \mathbb{R}$ associa il corrispondente punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ in \mathbb{R}^3 . La corrispondente **traiettoria** (o curva) è invece il sottoinsieme dei punti di \mathbb{R}^3 ottenuti in tal modo, ovvero, come anche si dice in matematica, è l’*immagine* della funzione definente il movimento.

²In questa conferenza vi è (nella penultima pagina) una parte mirabile che dovrebbe essere importante per chi intenda dedicarsi alla ricerca scientifica. Si tratta di quando egli parla del *sacrificio* richiesto allo studioso che osi dedicarsi a punti di vista che non siano *fashionable* (alla moda). Feynman comunque aggiunge poi che tale sacrificio potrebbe anche rivelarsi remunerativo.

È proprio per questo motivo che la forma del principio di Hamilton è quella preferita nel determinare i movimenti ad esempio in relatività generale³ e già anche in relatività speciale (metodo delle geodetiche); ne faremo uso noi stessi per determinare la corretta forma della lagrangiana della particella libera relativistica, giustificando in tal modo la celebre relazione $E = mc^2$.

Ma l'importanza del principio di Hamilton venne particolarmente esaltata in epoca recente (poco dopo il 1945) dall'uso che ne fece Feynman per riformulare la dinamica nell'ambito della meccanica quantistica in un modo formalmente nuovo rispetto a quello tradizionale introdotto da Heisenberg, Schrödinger e Dirac attorno all'anno 1925. Si tratta del cosiddetto metodo dei "cammini di Feynman" ("*Feynman paths*"), invero ispirato a un precedente lavoro di Dirac.⁴

Storicamente,⁵ i principi variazionali divennero un argomento centrale di ricerca nella comunità scientifica, con una considerevole attenzione anche ai suoi risvolti filosofici,⁶ un secolo prima di Hamilton, e se si vuole se ne potrebbe assegnare un anno ufficiale di nascita, il 1744. Qualche tempo prima, aveva suscitato grandi discussioni la formulazione che Maupertuis aveva dato del principio di Fermat per i raggi dell'ottica geometrica, e la trasposizione che egli ne aveva fatto in ambito puramente meccanico. Toccò al grande Eulero di ricondurre il problema entro ambiti puramente matematici. Stimolato dalla discussione che Jean Bernoulli aveva dato del problema della brachistocrona, Eulero aveva formulato il problema di caratterizzare analiticamente le **geodetiche**, cioè le curve di lunghezza minima su una assegnata superficie, e aveva risolto questo problema in un fondamentale lavoro del 1744 dal titolo "*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietates gaudentes*". Tale lavoro, in effetti, contiene la soluzione di un problema alquanto più generale che costituisce il cuore del presente capitolo, ovvero caratterizzare come soluzioni di equazioni differenziali le funzioni che hanno la proprietà di essere punti stazionari per un assegnato funzionale di tipo integrale (il significato di queste parole verrà spiegato più avanti).

³Ma anche nella "teoria dei campi".

⁴Si vedano gli articoli di Dirac e di Feynman riprodotti nel volume J. Schwinger. *Quantum electrodynamics*, Dover (New York, 1958), pag. 312 e pag. 321. Si tratta di R.P. Feynman, *Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics*, Rev. Mod. Physics **20**, 267(1948); P.A.M. Dirac, *The lagrangian in quantum mechanics*, Phys. Zeits. Sovjetunion **3**, 1 (1933). Vedi anche P.A.M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **17**, 195 (1945), e anche il libro R.P.Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, Mc Graw-Hill (New York, 1965).

⁵Si veda U. Bottazzini, *La meccanica razionale*, in P. Rossi *Storia della scienza*, Unione Tipografica Editrice Torinese (Torino 1988) e Gruppo Editoriale L'Espresso (2006), Vol. II.; R. Dugas, *Histoire del la Mécanique*, Éditions du Griffon (Neuchâtel, 1950), Trad. inglese Dover (New York).

⁶Fece scalpore lo scritto di Voltaire dal titolo *La diatribe du Dr. Akakia médecin du Pape*.

Il metodo attualmente usato per discutere i principi variazionali, che verrà illustrato in questo capitolo, è sostanzialmente quello introdotto da Lagrange (1736–1813) nel suo primo lavoro, che lo rese celebre. Il contributo di Hamilton fu esposto in tre lavori (del 1833, 1834, 1835) dai titoli: “*On a general method of expressing the paths of light, and of the planets, by the coefficients of a characteristic function*”; “*On a general method in dynamics*”; “*Second essay on a general method in dynamics*”.

Una trattazione compatta e forte dei principi variazionali rilevanti per la meccanica si trova nella fondamentale opera di Poincaré “*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*”, riprodotta da A. Blanchard (Paris, 1987). Si veda il capitolo 29, “*Diverses formes du principe de moindre action*”, in Tomo III, pag. 249. e anche il capitolo 1 del Tomo I, “*Généralités et méthode de Jacobi*”.⁸ Si veda anche C. Carathéodory, “*Calculus of variations and partial differential equations of the first order*”, Holden–Day (San Francisco, 1965). Si tratta di opere di tipo avanzato, anche se quella di Poincaré è abbastanza ben leggibile. Per gli aspetti analitici del calcolo delle variazioni, una bellissima introduzione, molto conveniente dal punto di vista didattico, è invece quella di A. Kolmogorov, S. Fomin, “*Elementi della teoria delle funzioni e di analisi funzionale*”. Si veda il Cap. 10: “*Elementi di calcolo differenziale in uno spazio vettoriale*”. Infine, non possiamo non citare i lavori di Vito Volterra.⁹

Molto bella è anche la trattazione data in appendice al classico libro di M. Born e E. Wolf, “*Principles of optics*”, Pergamon (Londra, 1959). Interessante è anche il libro J. Kijowski, V.M. Tulczyjew, *A symplectic framework for field theories*, Lecture Notes in Physics n. 107, Springer–Verlag (Nerlino, 1979). Infine, come per quasi tutti gli argomenti di meccanica, risulta didatticamente molto efficace la trattazione data nel libro qui spesso citato di Dubrovin, Novikov, Fomenko, *Geometria contemporanea*, in cui la trattazione dei principi variazionali è svolta nel Volume I, capitolo 5, con una estensione al caso della teoria dei campi nel capitolo 6.

3.2 Formulazione del problema

L’idea fondamentale che sta alla base dei principi variazionali consiste nel cercare di caratterizzare un movimento o una traiettoria non attraverso un’e-

⁷Si noti bene: *luce e pianeti*. Questa corrispondenza tra *onde e corpuscoli*, divenne poi, nelle mani di De Broglie e di Schroedinger, il perno per il passaggio dalla meccanica classica a quella quantistica (con il procedimento di Schroedinger). Si veda ad esempio E. Fermi, *Notes on quantum mechanics*.

⁸Si veda anche H. Poincaré, *Leçons de Mécanique Céleste*.

⁹V. Volterra, *Opere matematiche: memorie e note*, Accademia Nazionale dei Lincei (Roma, 1954); V. Volterra, J. Peres, *Thorie générale des fonctionnelles*. Gauthier-Villars (Paris, 1936); V. Volterra, J. Peres, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Gauthier-Villars (Paris, 1913).

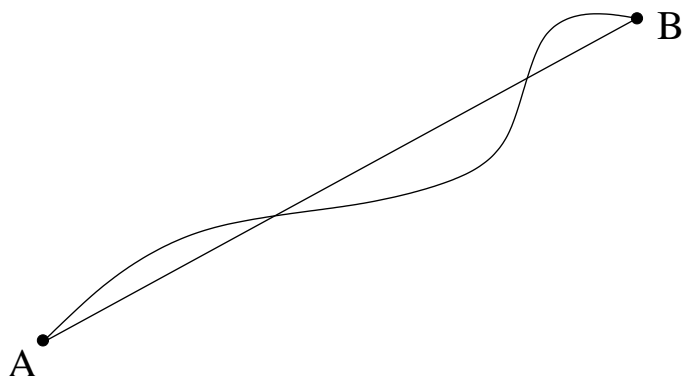


Figura 3.1: La retta passante per due punti come curva di lunghezza minima

quazione differenziale, ma mediante una proprietà di minimo o di massimo rispetto ad una famiglia di movimenti o traiettorie. L'esempio più ovvio, riferendosi al caso delle traiettorie, è quello delle rette in un piano: da una parte esse sono caratterizzate dall'avere una pendenza costante (ovvero curvatura nulla), e dunque dal soddisfare l'equazione differenziale $y'' = 0$ (l'apice denota derivazione rispetto all'argomento) se sono espresse nella forma analitica $y = y(x)$; d'altra parte esse sono caratterizzate dal fatto di essere *curve di lunghezza minima*.

Per precisare quest'ultima proprietà è necessario mettere in luce un aspetto caratteristico dei principi variazionali, cioè il loro carattere in un certo modo *finalistico*, ovvero **globale** (in contrapposizione a **locale**). Infatti per parlare di proprietà di minimo della lunghezza, si fissano due punti A e B del piano e si considera l'insieme \mathcal{U}_{AB} di tutte le curve che “vanno” da A a B ; risulta allora che, tra gli elementi di questo insieme¹⁰, il segmento \overline{AB} è caratterizzato come quello avente lunghezza minima¹¹ (figura (3.1). In

¹⁰Più precisamente, tra gli elementi del sottoinsieme di \mathcal{U}_{AB} costituito da curve “rettificabili”, per le quali cioè è definita la lunghezza.

¹¹Sostanzialmente la dimostrazione di questo fatto riposa sulla *disuguaglianza triangolare*, per cui in un triangolo la lunghezza di un lato è minore della somma della lunghezza degli altri due. In tal modo, per induzione, si può concludere che il segmento rettilineo congiungente due punti ha lunghezza minima rispetto alle curve congiungenti tali punti, che siano unione di segmenti rettilinei. Se si volesse dedurre da questa proprietà anche la proprietà di minimo nella classe di tutte le curve congiungenti i due punti si commetterebbe un errore logico di “petitio principii”, ed occorrerebbe restringere opportunamente la classe di curve considerate. Questo problema è discusso da Galileo nella seconda giornata dei Dialoghi sopra i massimi sistemi, e l'argomento sopra ricordato, che vorrebbe dedurre la proprietà di minimo rispetto a tutte le curve utilizzando la disuguaglianza triangolare, viene messo in bocca a Simplicio. A questo argomento ribatte Salviati, che ricorda come il grande Archimede, che ovviamente non metteva in dubbio la disuguaglianza triangolare (in quanto dedotta dai postulati di Euclide), avesse ritenuto di non poterne fare uso, e aveva addirittura introdotto questa proprietà di minimo come un postulato indipendente (da aggiungersi, assieme ad altri quattro, ai postulati di Euclide). Ringraziamo Massimo

questo senso la caratterizzazione della retta come minimizzante la distanza è di tipo globale, perché coinvolge una nozione come la lunghezza, che è una proprietà che riguarda tutta una curva γ (si tratta di un certo integrale definito, che dunque coinvolge tutta la curva – si veda più avanti). Invece, è locale la proprietà che la derivata seconda $y''(x)$ si annulli in un punto x , o ivi abbia un valore determinato. Dunque la caratterizzazione mediante la proprietà $y'' = 0$ (ovvero $y''(x) = 0$ per ogni x) è una unione (su tutti gli x) di proprietà locali, mentre la caratterizzazione mediante la proprietà di minimo della lunghezza è globale.

Un altro aspetto molto rilevante di questa differenza tra le due caratterizzazioni riguarda una proprietà di **invarianza**. Infatti una curva γ può essere descritta analiticamente in infiniti modi, a seconda delle coordinate che si scelgono: si pensi alla retta descritta in coordinate cartesiane (espressione banalissima) oppure in coordinate polari (espressione alquanto più complicata). Dunque la caratterizzazione mediante proprietà locali (annullarsi della curvatura, nel caso della retta) viene descritta analiticamente in forma diversa al variare delle coordinate scelte. Invece le proprietà globali, come la lunghezza, espresse tipicamente mediante degli integrali definiti, sono indipendenti dalle coordinate scelte, e quindi le caratterizzazioni di tipo globale sono le più significative.¹² Corrispondentemente avviene che i movimenti naturali, definiti come soluzioni delle equazioni di Newton (o equivalentemente di Lagrange o di Hamilton), hanno forma analitica dipendente dalle coordinate scelte, mentre la loro caratterizzazione globale che ne daremo in questo capitolo mediante il principio variazionale di Hamilton, di tipo globale, risulterà indipendente dalle coordinate. Si può dunque dire che le equazioni di Newton o di Lagrange o di Hamilton costituiscono la forma locale di un principio variazionale (di tipo globale), che è il principio variazionale di Hamilton. È chiaro dunque che questo principio costituisce la forma più profonda delle leggi naturali, e non meraviglia che esso venga utilizzato sistematicamente a livello euristico, cioè quando si devono formulare nuove teorie. Noi ne vedremo un esempio nella formulazione delle leggi di moto nell'ambito della relatività speciale.

Esercizio: la legge della riflessione, con metodi variazionali. È un interessante esercizio mostrare come la proprietà di minimo sopra ricordata per le rette permetta di ottenere *la legge della riflessione* dell'ottica geometrica in ambito variazionale (figura (3.3)). Dati due punti A, B nel semipiano al di sopra della retta r , si consideri l'insieme \mathcal{U}_{AB}^r delle curve che li giungono, aventi almeno un punto C su r . In tale insieme, la curva di lunghezza minima, è quella per cui l'angolo di riflessione è uguale all'angolo d'incidenza. È questo un caso felice, in cui “la dimostrazione viene ridotta al caso precedente”. Infatti, se B' è il punto simmetrico

Bertini per una discussione su questo argomento.

¹²La lunghezza di una curva (un certo sottoinsieme del piano) è un numero, che viene calcolato come un certo integrale, e il numero che si ottiene non dipende dalle coordinate scelte per definire analiticamente la curva.

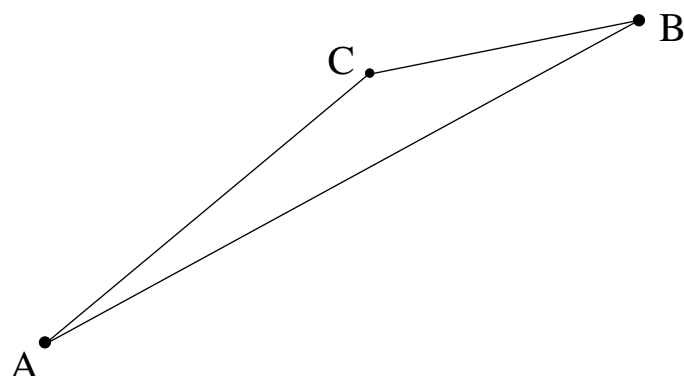


Figura 3.2: La disuguaglianza triangolare

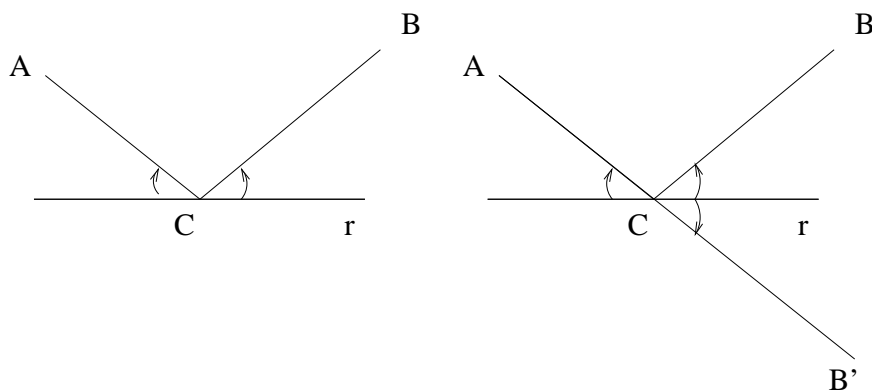


Figura 3.3: La legge della riflessione.

(o riflesso) rispetto alla retta r di B si ha che (lunghezza di ACB) = (lunghezza di ACB'), sicché la spezzata soddisfacente la legge della riflessione ha lunghezza uguale a quella del segmento AB' .

Per inciso, l'esempio della legge della riflessione consente di mettere in luce un altro aspetto caratteristico dei principi variazionali, cioè quello di non presentare necessariamente unicità delle soluzioni (ammesso che ne esistano). Infatti, il raggio soddisfacente la legge della riflessione *realizza un minimo locale* perché ha lunghezza minima nell'insieme \mathcal{U}_{AB}^r delle curve che incidono sulla retta r , ma non nell'insieme più ampio \mathcal{U}_{AB} di tutte le curve che congiungono A e B ; infatti il minimo "assoluto" (cioè in \mathcal{U}_{AB}) è raggiunto dal segmento che unisce A e B direttamente senza toccare la retta r . Ovviamente, questa è una situazione analoga a quella che si ha per una funzione $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ (dove \mathcal{U} è un insieme arbitrario) quando la funzione F presenta più di un minimo, e si hanno dei minimi locali ed eventualmente

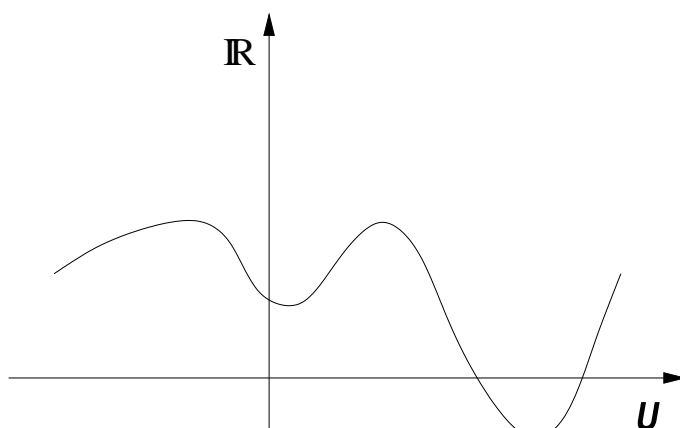


Figura 3.4: Minimi locali e minimo globale.

un minimo globale (figura (3.4)).

Esercizio: distanza da un punto ad una retta. Un altro esercizio interessante consiste nel trovare la distanza tra un punto P ed una retta r . Sappiamo dalla geometria elementare che questo problema si risolve tracciando la perpendicolare s ad r passante per P , e porre la distanza eguale alla lunghezza del segmento PK , dove K è il punto di intersezione tra la perpendicolare ed r . Il medesimo problema si può porre sotto forma variazionale, cercando la curva di lunghezza minima nell'insieme \mathcal{U}_P^r delle curve con un estremo in P e l'altro sulla retta r . Il problema si risolve in due passi: prima si fissa un punto K su r , e si trova la curva di minima lunghezza (ovvero il segmento PK); si cerca quindi il minimo nella classe di curve così determinate (cioè i segmenti con un estremo su r) facendo variare l'estremo. Se sposto l'estremo K in K' , allora in prima approssimazione la lunghezza l del segmento varia della quantità $\delta l = \overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{KK'}$. Il minimo della lunghezza si ottiene quando $\delta l = 0$, cioè PK è ortogonale a KK' e dunque alla retta r .

L'ambiente matematico in cui ci si muove è dunque quello in cui è dato un insieme \mathcal{U} di curve (ciascuna rappresentata analiticamente in maniera opportuna), e ad ogni elemento dell'insieme si associa un numero reale. Si ha quindi una funzione a valori reali

$$F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} ,$$

o, come spesso si dice, un *funzionale*¹³ (nel nostro caso la lunghezza della curva considerata); poiché in \mathbb{R} è definita una relazione d'ordine (sappiamo

¹³Ricordiamo dunque che per funzionale si intende semplicemente "funzione a valori reali". Se in particolare \mathcal{U} è uno spazio vettoriale, allora tra tutti i funzionali esiste il sottoinsieme dei *funzionali lineari*, che vengono studiati nei corsi di geometria e di metodi matematici della fisica. Nella seguente discussione, al fine di definire la derivata di un funzionale avremo a che fare con funzionali lineari visti come linearizzazione di funzionali

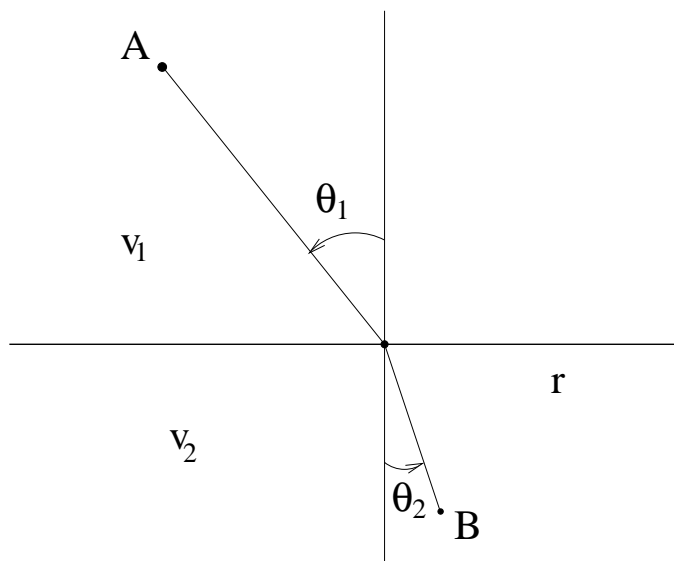


Figura 3.5: La legge della rifrazione.

cosa vuol dire che un numero reale è maggiore di un altro), possiamo confrontare i valori di F al variare dell'elemento in \mathcal{U} , e stabilire l'eventuale esistenza di minimi locali.

3.2.1 Excursus sul principio di Fermat dell'ottica geometrica.

Prima di addentrarci in un approfondimento degli aspetti matematici rilevanti, vogliamo qui illustrare il principio di Fermat (1601–1655), che fu il primo fondamentale principio variazionale dell'epoca moderna. Tra l'altro esso fu il primo in cui si associò ad una curva un numero reale diverso dalla familiare lunghezza euclidea. Il principio di Fermat è strettamente associato alla **legge della rifrazione**¹⁴ (la cui formulazione pare sia dovuta a

nonlineari. Questo in effetti è proprio l'analogo del procedimento che si tiene nel familiare calcolo differenziale in \mathbb{R}^n , quando si definisce il differenziale (un funzionale lineare!) come approssimante lineare di una funzione in generale nonlineare. Facciamo osservare tuttavia che il funzionale F di cui qui discutiamo è assolutamente generico, e non si richiede affatto che sia lineare.

¹⁴O *legge del bagnino*: un bagnino in A sulla spiaggia (regione 1 in cui può correre con velocità v_1) vuole salvare una bagnante in B nel mare (regione 2, dove può nuotare con velocità $v_2 < v_1$). La curva di lunghezza minima è il segmento AB , ma la curva con il tempo minimo di percorrenza (la più conveniente) è la spezzata soddisfacente la legge della rifrazione. In questo esempio, come sottolineato anche da Feynman nel suo manuale, l'aspetto finalistico dei principi variazionali è particolarmente evidente.

Descartes)¹⁵(figura (3.5)): sono dati due mezzi omogenei 1,2, separati dalla retta r , nei quali la luce si propaga rispettivamente con velocità v_1, v_2 , e ci si domanda quale è la curva che congiunge A e B , per la quale il tempo di percorrenza sia minimo; risulta che tale curva è la spezzata $A\bar{C}B$ soddisfacente la legge della rifrazione, cioè tale che

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} . \tag{3.2.1}$$

Esempio: la legge della rifrazione (o del bagnino), con metodi variazionali. La dimostrazione di questo fatto è particolarmente illuminante (figura (3.6)). Anzitutto, già sappiamo che, in ciascuno dei due mezzi, le curve aventi tempo di percorrenza minimo sono le rette, perché hanno lunghezza minima. Dunque cercheremo la curva di tempo minimo nell'insieme \mathcal{U}_{AB}^r delle spezzate che hanno vertice C su r , sicché ogni elemento di \mathcal{U}_{AB}^r è individuato da un numero reale x , ovvero l'ascissa di C : $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq l\}$, dove l è la distanza tra le proiezioni ortogonali di A e B sulla retta r . Il funzionale che consideriamo (tempo di percorrenza della curva ACB) è dunque

$$\frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} ,$$

ovvero la funzione reale di variabile reale $F : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2} , \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

e vogliamo determinare il punto \bar{x} in cui F ha valore minimo. Ciò richiede anzitutto che \bar{x} sia un *punto di stazionarietà* (o estremale o critico), ovvero tale che sia $F'(\bar{x}) = 0$. D'altra parte si ha

$$F'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{l_1} - \frac{1}{v_2} \frac{l-x}{l_2} ,$$

ovvero

$$F'(x) = \frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} , \tag{3.2.3}$$

sicché si conclude che *la legge di rifrazione (3.2.1) è equivalente al principio di stazionarietà* (o estremale o criticità) $F'(\bar{x}) = 0$; ovvero, il raggio soddisfacente la legge della rifrazione è quello per cui il tempo di percorrenza è stazionario.

Dunque le curve significative per l'ottica geometrica sono sufficientemente caratterizzate da una proprietà di stazionarietà del funzionale "tempo di percorrenza". È questo pertanto il principio cui ci si attiene: si

¹⁵Si veda U. Bottazzini, *Curve ed equazioni*, in P. Rossi, *Storia delle scienze*, Vol I.; R. Dugas, *Histoire de la mécanique*.

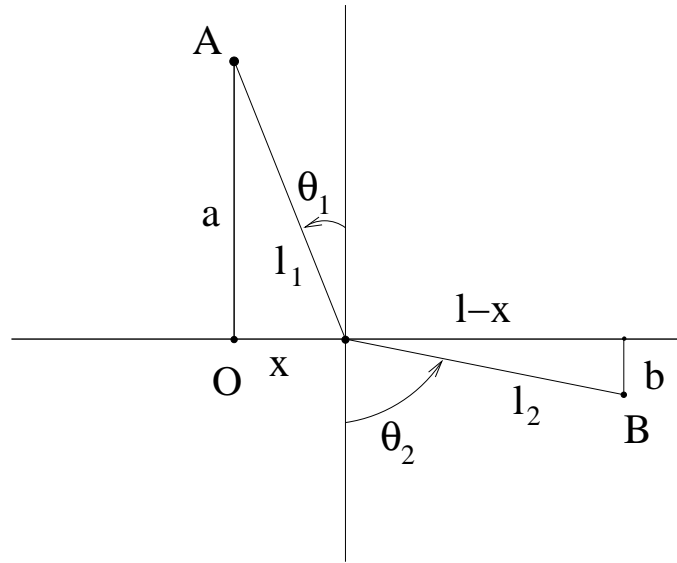


Figura 3.6: Dimostrazione della legge della rifrazione.

caratterizzano delle curve mediante la stazionarietà di un assegnato funzionale, riservandosi poi di controllare se un certo punto di stazionarietà sia eventualmente un minimo.¹⁶

Possiamo ora venire alla formulazione del *Principio di Fermat dell'ottica geometrica*. Si considera un mezzo arbitrario,¹⁷ in ogni punto \mathbf{x} del quale è assegnata una velocità locale di propagazione $v(\mathbf{x})$; equivalentemente è assegnato il cosiddetto “indice di rifrazione”

$$n(\mathbf{x}) = \frac{c}{v(\mathbf{x})} ,$$

dove c è la velocità di propagazione della luce nel vuoto. Denotiamo con dl il consueto “elemento di linea” ovvero la lunghezza “infinitesima” secondo la metrica euclidea, $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (dove $dl^2 \equiv (dl)^2$ e così via) se x, y, z sono le consuete coordinate cartesiane ortogonali.¹⁸ Pertanto un

¹⁶Ad esempio, nel capitolo sulla relatività vedremo che i movimenti hanno pseudolunghezza massima (anziché lunghezza minima). Questo fatto costituisce in effetti la controparte matematica del famoso paradosso dei gemelli.

¹⁷In effetti, ci limitiamo qui al caso di mezzi *isotropi*, in cui cioè le proprietà di interesse possono variare da punto a punto (mezzi disomogenei), ma in ogni punto non dipendono dalla direzione.

¹⁸Facciamo qui riferimento a una nozione intuitiva, nella quale la relazione sopra scritta per dl^2 è la “versione infinitesima” della relazione finita $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ per la lunghezza di un vettore di componenti cartesiane ortogonali x, y, z . La nozione “rigorosa” verrà ricordata più sotto.

elemento di linea dl viene percorso in un tempo

$$dt = \frac{dl}{v(\mathbf{x})} ,$$

ovvero si ha $cdt = n(\mathbf{x})dl$, e per una curva γ il tempo di percorrenza $T(\gamma)$ è dato da $T(\gamma) = \int_{\gamma} dt = \int_{\gamma} \frac{dl}{v(\mathbf{x})}$, ovvero da

$$cT(\gamma) = \int_{\gamma} n(\mathbf{x})dl . \quad (3.2.4)$$

È evidente che il funzionale $T(\gamma)$ è, per curve generiche, l'analogo del tempo di percorrenza $F(x)$ definito dalla (3.2.2) nel caso di curve spezzate ACB individuate dalla sola ascissa x del punto C sulla linea di separazione tra i due mezzi. È spontaneo pertanto generalizzare le note leggi dell'ottica geometrica (cammino rettilineo nei mezzi omogenei illimitati, legge della riflessione, legge della rifrazione) compendiandole nel

Principio di Fermat: In un mezzo individuato otticamente da un indice di rifrazione $n = n(\mathbf{x})$, il raggio luminoso $\bar{\gamma}$ tra due punti A e B che si realizza in natura è caratterizzato, fra tutte le curve γ congiungenti tali punti, come la curva per cui è minimo (più precisamente, stazionario, o estremale o critico) il tempo di percorrenza, o equivalentemente è minimo il funzionale

$$F(\gamma) = \int_{\gamma} n(\mathbf{x})dl , \quad (3.2.5)$$

(detto *cammino ottico*).

Evidentemente la precisazione di questo principio richiede che si definisca cosa si intende per punto stazionario (o critico) nel caso di funzionali aventi per dominio un insieme \mathcal{U} di funzioni (cioè, come si dice, un sottoinsieme di uno **spazio funzionale**) anziché un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . Si deve dunque procedere a dare un cenno al calcolo differenziale in spazi di dimensione infinita, cosa che faremo nella maniera più semplice possibile nel prossimo paragrafo. Vedremo che, come nel caso dei funzionali (funzioni a valori reali) F definiti in \mathbb{R}^n i punti di stazionarietà sono caratterizzati dalla proprietà $dF = 0$, così anche per i funzionali F aventi dominio in uno spazio di funzioni i punti di stazionarietà sono caratterizzati dalla proprietà $\delta F = 0$, dove δF è l'analogo del differenziale in \mathbb{R}^n . Dunque il principio di Fermat viene compendiato nella formula

$$\delta \int_{\gamma} n(\mathbf{x}) dl = 0 . \quad (3.2.6)$$

3.2.2 Formulazione variazionale della meccanica lagrangiana.

Quanto detto finora riguarda l'ottica geometrica. Risulta tuttavia che si ha una profonda analogia tra ottica geometrica e meccanica. Consideriamo

infatti il caso più semplice possibile, del moto di un punto soggetto ad un campo di forze $F(\mathbf{x})$ derivanti da energia potenziale $V(\mathbf{x})$, ovvero soddisfacente la legge di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = -\text{grad } V(\mathbf{x})$. In tal caso, siamo interessati sia al moto del punto, ovvero alla legge $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, sia alla corrispondente traiettoria (curva in \mathbb{R}^3), e allora risulta che la analogia più immediata si ha fra curve dell'ottica geometrica e traiettorie del punto. Infatti si trova che le traiettorie γ corrispondenti ai moti $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ soddisfacenti l'equazione di Newton soddisfano ad un principio variazionale profondamente analogo al principio di Fermat: si tratta del

Principio di Maupertuis–Jacobi: Le traiettorie di un punto materiale soggetto ad una energia potenziale $V(\mathbf{x})$, ad una fissata energia E , sono caratterizzate dalla proprietà di stazionarietà

$$\delta \int_{\gamma} \sqrt{E - V(\mathbf{x})} dl = 0 . \quad (3.2.7)$$

In altri termini, la traiettoria di un punto materiale in un potenziale V ad energia E coincide con il cammino di un raggio luminoso in un mezzo ottico avente indice di rifrazione

$$n(\mathbf{x}) = \sqrt{E - V(\mathbf{x})} . \quad (3.2.8)$$

Osservazione diversa dipendenza dalla velocità nel principio di Fermat e in quello di Maupertuis–Jacobi. Si ricordi che per un punto si ha $E = (1/2)mv^2 + V(\mathbf{x})$, sicché si ha

$$v = \sqrt{(2/m)(E - V(\mathbf{x}))} .$$

Dunque il principio di Maupertuis–Jacobi si formula come

$$\delta \int v dl = 0 ,$$

mentre quello di Fermat si formula come

$$\delta \int \frac{dl}{v} = 0 .$$

Questa differenza viene tuttavia eliminata se, per l'ottica geometrica, si viene a distinguere tra velocità di fase e velocità di gruppo. Questo fatto venne particolarmente sottolineato da Schroedinger. Si veda E. Schroedinger, *An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules*, *Phys. Rev.* **28**, 1049–1070 (1926).

È questo un primo esempio di analogia tra ottica geometrica e meccanica del punto. Tale analogia fu utilizzata nel 1925 da Schroedinger per inventare la meccanica ondulatoria (o meccanica quantistica)¹⁹. Ma essa era già stata messa in luce da Hamilton, che giunse, nel 1833, alla sua formulazione (hamiltoniana) della meccanica proprio partendo dall'analogia con l'ottica.

¹⁹Si veda ad esempio E. Fermi, *Notes on quantum mechanics*, The University of Chicago Press (Chicago, 1961), pag. 1.

Illustriamo ora, indipendentemente dall'analogia con l'ottica geometrica, come viene data la formulazione variazionale della dinamica. Consideriamo un sistema lagrangiano. Ciò significa che è assegnata una varietà \mathcal{C} (spazio delle configurazioni) di dimensione n ed una funzione lagrangiana. In una carta locale, un punto su \mathcal{C} è allora individuato da coordinate libere $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, e la Lagrangiana è una funzione

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) . \quad (3.2.9)$$

Si considerano allora tutti i movimenti $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ che si svolgono in un fissato intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ e che soddisfano certe fissate condizioni al contorno (cioè agli estremi dell'intervallo). Si considera dunque l'insieme \mathcal{U} di funzioni $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ definito da

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{q} = \mathbf{q}(t) : t_0 \leq t \leq t_1; cc \} , \quad (3.2.10)$$

dove la notazione *cc* indica che sono assegnate delle ben definite *condizioni al contorno* (boundary conditions) ai tempi estremi t_0, t_1 . Un esempio tipico (figura (3.7)) è quello di valori fissati agli estremi, ovvero le $2n$ condizioni $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}$, $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}^{(1)}$, ma le $2n$ condizioni più generali appariranno più sotto in maniera naturale. Un esempio significativo in una situazione che riguarda le traiettorie (in cui la cosiddetta *legge oraria* – legge di percorrenza temporale delle traiettorie – è irrilevante) è quello di determinare la traiettoria più breve che congiunge un punto fissato da una retta. In tal caso è fissato il punto iniziale, ma del punto finale si sa solo che giace su una retta assegnata. Allora già sappiamo che la traiettoria deve essere una retta passante per il punto assegnato, e vedremo che la seconda condizione (il secondo punto deve giacere su una assegnata retta) si traduce nella condizione che nel punto di arrivo il segmento uscente dal primo punto deve cadere in maniera ortogonale alla assegnata retta (sicché il segmento uscente dal primo punto deve essere ortogonale alla assegnata retta).

Si definisce poi il funzionale *azione hamiltoniana* $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt , \quad (3.2.11)$$

e si formula il

Principio di Hamilton: Per un sistema lagrangiano con lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, i moti naturali sono i punti-funzione stazionari (o estremali, o critici) dell'azione hamiltoniana S , ovvero sono i movimenti $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ per cui

$$\delta \int L dt = 0 . \quad (3.2.12)$$

La rilevanza di questo principio riposa sul fatto che si dimostra poi il

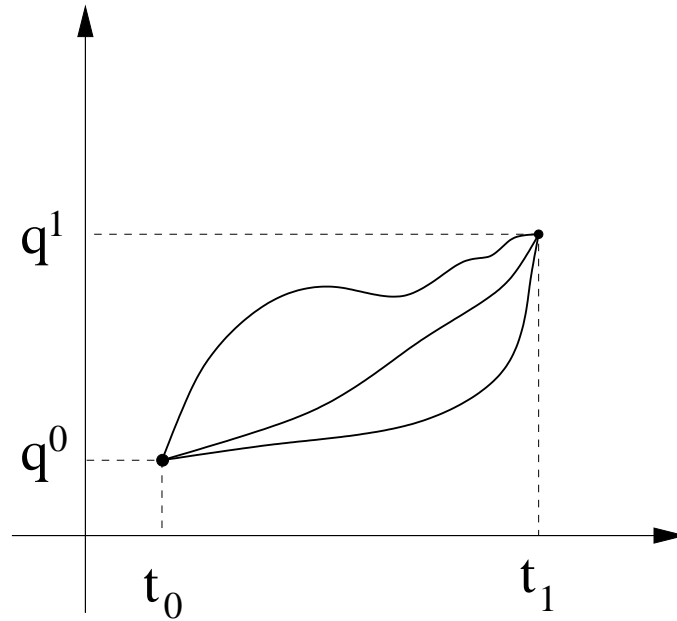


Figura 3.7: Il dominio delle funzioni $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ ammissibili.

Teorema 1 *I movimenti $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ nel dominio (3.2.10) che sono punti stazionari dell'azione hamiltoniana $S[\mathbf{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ sono tutti e soli quelli che soddisfano le equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (3.2.13)$$

e le assegnate condizioni al contorno.

In virtù di questo teorema si può prendere l'atteggiamento di assumere il principio di Hamilton, e la sua naturale generalizzazione ai sistemi continui, come principio fondamentale della meccanica, ed è questo appunto l'atteggiamento che si tiene di consueto.

Nei prossimi paragrafi verranno dati i necessari cenni di calcolo delle variazioni e verrà dimostrato il teorema sopra enunciato. Verrà poi mostrato come segue il principio di Maupertuis–Jacobi. Verrà poi data la versione del principio di Hamilton in relazione alle equazioni di Hamilton (anziché di Lagrange). Poi verrà mostrato come tale formulazione permetta di dare una caratterizzazione delle trasformazioni canoniche mediante una funzione generatrice (peocedimento che avevamo anticipato nel capitolo sulle equazioni di Hamilton). Si mostrerà anche come il flusso generato dalle soluzioni delle equazioni di Hamilton sia una famiglia di trasformazioni canoniche, e la funzione generatrice sia la azione hamiltoniana stessa. Quest'ultimo argomento è l'elemento centrale che fa da cardine per l'introduzione del metodo dei

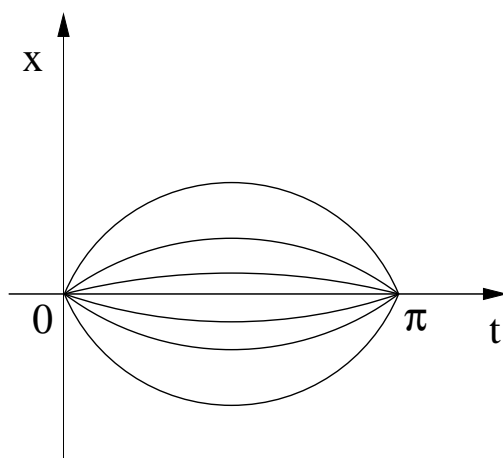


Figura 3.8: Nonunicità nei problemi variazionali.

cammini di Feynman, che non abbiamo qui il tempo di illustrare. Da ultimo, verrà indicata l'estensione del principio di Hamilton a semplici esempi di corpi continui, come la corda vibrante.

Concludiamo ora questa introduzione con una osservazione. È già stato osservato che i principi variazionali vengono posti in un ambito globale anziché locale, nel senso che si ricercano traiettorie o movimenti in cui vengono assegnate delle “condizioni al contorno”: curve che vanno da A a B o movimenti che, in un certo intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, vanno da $\mathbf{q}^{(0)}$ a $\mathbf{q}^{(1)}$. Ora, tali problemi al contorno non sempre hanno soluzione, e inoltre la soluzione può non essere unica. Esempi di questo tipo sono ben noti nella meccanica del punto e in ottica (punti focali).

Esempio di nonesistenza e di nonunicità. Consideriamo un oscillatore armonico. Allora sappiamo che secondo i principi della meccanica (equazione di Newton) i corrispondenti movimenti $x = x(t)$ sono quelli che soddisfano l'equazione differenziale $\ddot{x} + x = 0$ (consideriamo, per semplicità di notazione, il caso in cui la pulsazione è unitaria, $\omega = 1$), ovvero sono le funzioni

$$x(t) = a \cos t + b \sin t$$

con parametri a, b reali arbitrari. Ma ricerchiamo ora se, tra tutti questi, esistano dei movimenti definiti nell'intervallo chiuso $[0, t_1]$ che soddisfino le condizioni al contorno (problema globale)

$$x(0) = 0, \quad x(t_1) = x^{(1)}$$

per un fissato $x^{(1)} \in \mathbb{R}$. Ora, la prima delle due condizioni, ovvero $x(0) = 0$, implica $a = 0$ e dunque si resta con

$$x(t) = b \sin t.$$

Allora, se $t_1 \neq n\pi$ (con n intero nonnullo), la seconda condizione determina univocamente il moto, ovvero $b = \frac{x^{(1)}}{\sin t_1}$, e si ha dunque esistenza e unicità. Ma se

invece ad esempio si è nel caso in cui $t_1 = \pi$ (figura (3.8)), allora si ha $x(t_1) = 0$ qualunque sia b , e dunque si hanno infinite soluzioni (b arbitrario) se $x^{(1)} = 0$, e nessuna soluzione se $x^{(1)} \neq 0$.

3.3 Cenni di calcolo delle variazioni: i punti stazionari di un funzionale, e le equazioni di Eulero–Lagrange.

Lo scopo principale della prima parte di questo paragrafo è di illustrare come la nozione di differenziale o di derivata viene estesa al caso di funzioni il cui dominio è esso stesso uno spazio di funzioni, anziché \mathbb{R}^n . Si tratta di uno degli argomenti classici dell' *Analisi funzionale*²⁰. Cercheremo qui di darne una introduzione in una maniera allo stesso tempo semplice e matematicamente coerente.

Preliminarmente, forniamo anzitutto un esempio concreto in cui si tocchi con mano che, nel caso dell'azione hamiltoniana S introdotta sopra, abbiamo effettivamente a che fare con una funzione (a valori reali, e perciò detta *funzionale*), definita su un dominio che è esso stesso uno spazio di funzioni (come in figura (3.7)). Da un punto di vista didattico, si verifica che questo è un punto niente affatto banale, che molti studenti faticano a comprendere. Vogliamo illustrare quanto segue: allo stesso modo in cui, se vogliamo sapere quanto vale $\sin x$, dobbiamo prima dichiarare quale valore di x stiamo considerando, analogamente qui, se vogliamo sapere quanto vale $\int L dt$, dobbiamo prima dichiarare quale è il movimento $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ che stiamo considerando. Per questo motivo introduciamo la notazione $\int L dt = S[\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)]$ o più semplicemente la notazione

$$\int L dt = S[\mathbf{q}(t)] .$$

Ambiguità della notazione. Si spera che la notazione con la parentesi quadra (invece della parentesi tonda) sia sufficiente per mettere in evidenza il fatto che qui **non stiamo considerando una funzione composta (o funzione di funzione!)**. Ad esempio, per funzioni reali di variabile reale, se $f(x) = x^2$ e $x(t) = t^3$, allora la funzione composta $\tilde{f}(t) = f(x(t))$ risulta essere la funzione $\tilde{f}(t) = t^6$. Nel nostro caso, invece, l'azione $S[\mathbf{q}(t)]$ **non** dipende dal tempo, non è una funzione del tempo !

L'azione è funzione del movimento: esempio. Consideriamo il caso della particella libera (cioè in assenza di forze attive), vincolata a una retta (asse delle

²⁰Uno tra i più bei libri è: A. Kolmogorov, S. Fomin, *Elementi della teoria delle funzioni e di analisi funzionale*. Si veda il Cap. 10: *Elementi di calcolo differenziale in uno spazio vettoriale*.

x). Allora la lagrangiana si riduce all'energia cinetica ed è quindi data, prendendo la massa unitaria, da

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} \dot{x}^2, \quad (\text{con } m = 1).$$

Consideriamo ora i moti $x = x(t)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1] = [0, 1]$ con certe condizioni al contorno, ad esempio $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. In questo dominio di funzioni $x = x(t)$, diciamolo \mathcal{U} , esiste anzitutto il moto $x(t) = t$, che è la soluzione dell'equazione di Newton $\ddot{x} = 0$ per la particella libera. Ma ne esistono infiniti altri, come ad esempio $x(t) = t^n$ per $n = 2$ oppure per $n = 3, 4, \dots$. In connessione con il funzionale $S = \int L dt$ avente dominio in \mathcal{U} , fissare uno di questi moti è l'equivalente di fissare il valore della variabile indipendente x quando si considera il funzionale (con dominio in \mathbb{R}) $y(x) = \sin x$. Fissiamo dunque un "punto", un elemento di \mathcal{U} , ad esempio la funzione $x(t) = t^2$. Poiché il funzionale azione hamiltoniana $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ è definito da $S = \int L dt = (1/2) \int_0^1 \dot{x}^2 dt$, allora avremo in questo caso (essendo $\dot{x}(t) = 2t$)

$$S[x(t) = t^2] = \frac{1}{2} \int_0^1 4t^2 dt = \frac{2}{3}$$

(leggi: il valore di S corrispondente al punto-funzione $[x(t) = t^2]$ è $2/3$). Allo stesso modo si calcola

$$S[x(t) = t^n] = \frac{1}{2} \frac{n^2}{2n-1},$$

e in particolare $S[x(t) = t] = 1/2$. Si verifica facilmente che tra tutti i punti-funzione del tipo $x(t) = t^n$, $n = 1, 2, \dots$, la funzione $x(t) = t$, che è proprio la soluzione dell'equazione di Newton $\ddot{x} = 0$ per la particella libera, è anche quella in cui il funzionale S assume il valore minimo. Risulta in effetti che tale funzione è quella per cui S assume il valore minimo rispetto a qualunque elemento (funzione rappresentante un movimento) del dominio \mathcal{U} .

3.3.1 Il differenziale (o la variazione) di un funzionale

Nel caso di funzionali F (funzioni a valori reali) con dominio in \mathbb{R} , ovvero $F = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ben sappiamo²¹ che i punti di estremo, ovvero di minimo o di massimo (se esistono, e se non sono situati sul bordo del dominio di definizione di F) devono essere anzitutto punti di stazionarietà (o estremali, o critici), cioè sono punti \bar{x} in cui si annulla la derivata prima, $F'(\bar{x}) = 0$, o equivalentemente si annulla il differenziale $dF = F' dx$. Nel caso di funzionali con dominio in \mathbb{R}^n , $F = F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha ancora che condizione necessaria per l'esistenza di un estremo (minimo o massimo) è che si abbia stazionarietà, condizione che ora si esprime nell'annullarsi del differenziale, $dF = 0$, a sua volta equivalente all'annullarsi di tutte le derivate parziali, $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \dots, n$. Vogliamo ora estendere la nozione di differenziale al caso di un funzionale avente per dominio uno spazio di

²¹Qui e nel seguito non ci poniamo problemi di regolarità, e consideriamo di trattare con funzioni lisce (*smooth*), ovvero infinitamente differenziabili.

funzioni, e a tal fine cominciamo col richiamare nozioni note per funzioni di una o più variabili.

Cominciamo con il caso di funzioni di una sola variabile reale $F = F(x)$. Ricordiamo anzitutto come in tal caso l'esistenza del differenziale risulta essere equivalente all'esistenza della derivata definita nel modo familiare, come limite di un rapporto incrementale. Infatti si dice che (per un fissato x) esiste la derivata di F se esiste il limite

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

In tal caso il numero $a = a(x)$ viene detto derivata prima di F nel punto x e viene denotato con $F'(x)$:

$$a(x) \equiv F'(x).$$

D'altra parte è evidente che l'esistenza di tale limite è equivalente al fatto che esista un numero $a = a(x)$ tale che si abbia

$$F(x+h) = F(x) + ah + R \quad (3.3.1)$$

dove R è un "resto di ordine 2", tale cioè che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R}{|h|} = 0$$

(in tal caso si scrive anche $R = O(h^2)$.) Allora la parte principale (cioè la parte lineare rispetto all'incremento h)²² dell'incremento di F viene chiamata "differenziale di F " e denotata con dF :

$$dF = F'(x)h. \quad (3.3.2)$$

Si noti che, prendendo come caso particolare la funzione $F(x) = x$ si trova proprio $dx = h$, e per questo motivo, coerentemente, la (3.3.2) si scrive anche

$$dF = F'(x)dx. \quad (3.3.3)$$

La definizione di differenziale appena data si estende spontaneamente al caso di funzioni (diremo anche *funzionali*, se vogliamo sottolineare che si tratta di funzioni a valori reali) di n variabili, $F = F(\mathbf{x}) \equiv F(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Basta, nelle relazioni (3.3.1), (3.3.3) sostituire al numero $a = F'(x)$ un operatore lineare $A = A(\mathbf{x})$. Si ammetterà cioè che valga

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x})\mathbf{h} + R, \quad (3.3.4)$$

dove A è un operatore lineare in \mathbb{R}^n (una matrice, in una assegnata base),²³ e R un resto di ordine 2.²⁴ Ribadiamo questo fatto. Nel caso in cui il dominio è \mathbb{R}^n , per definire il differenziale si considera l'incremento che il funzionale F subisce quando ci si sposta da un punto \mathbf{x} a un punto $\mathbf{x} + \mathbf{h}$, e si studia come l'incremento di F dipende dallo spostamento \mathbf{h} . Se si trova che tale l'incremento di F risulta

²²È ovvio che questa definizione è significativa. Infatti per incrementi h piccoli è evidente che la parte lineare dell'incremento è la parte dominante.

²³Geometricamente questo significa che, nell'intorno di \mathbf{x} , si approssima la funzione $F(\mathbf{x})$ mediante un iperpiano tangente alla superficie $z = F(\mathbf{x})$.

²⁴Si intende, rispetto alla *norma* del vettore \mathbf{h} .

decomposto in una parte lineare nell'incremento \mathbf{h} , più un resto di ordine superiore al primo, allora si definisce il differenziale di F come la parte dell'incremento che è lineare nello spostamento \mathbf{h} .

Ora, questo procedimento è dal punto di vista formale facilmente estendibile al caso in cui il dominio è uno spazio funzionale (cioè, i cui elementi sono funzioni). A tal fine, basta avere presente l'idea-guida secondo la quale gli spazi funzionali possono essere pensati immediatamente come spazi vettoriali, solo che i vettori hanno ora dimensione infinita. Infatti, ad esempio, una funzione $y = y(x)$ è un "vettore le cui componenti hanno un indice continuo" x . Come un vettore $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ di \mathbb{R}^n è individuato dalle componenti y_i , $i = 1, \dots, n$, e si parla di i -esima componente, così nel caso della funzione $y = f(x)$ si può pensare alla funzione stessa come individuata da tutte le x -esime componenti $f(x)$, dove l'indice di componente x varia in un dominio continuo anziché in un dominio discreto (addirittura finito). La somma di due vettori e il prodotto di un vettore per un numero sono poi definite come in \mathbb{R}^n , ovvero "per componenti" (*componentwise*): date due funzioni f, g , la somma $(f + g)$ è definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ per tutti gli x , e così via. Si noti come distinguiamo tra i simboli f ed $f(x)$. Qui f denota la funzione (analoga del vettore \mathbf{y}), mentre $f(x)$ denota il valore che la funzione f assume in x ; si tratta della x -esima componente di f , analoga della i -esima componente y_i del vettore \mathbf{y} . Nel seguito, spesso denoteremo la funzione f con $f = f(x)$, oppure talvolta con $f(\cdot)$, o anche, per abuso di notazione, addirittura con $f(x)$.

Vediamo dunque in quale modo si estende formalmente la nozione di differenziale al caso in cui il dominio è uno spazio di funzioni, prendendo come esempio proprio l'azione hamiltoniana $S = \int L dt$ definita nello spazio funzionale \mathcal{U} (3.2.10), di moti che si svolgono in un fissato intervallo di tempo e soddisfano certe assegnate condizioni al contorno. Valutiamo l'incremento del funzionale S quando si passa da un punto-funzione $\mathbf{q}(t)$ a un altro punto-funzione $(\mathbf{q} + \mathbf{h})(t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t)$. Ora, data la definizione del funzionale S , l'incremento risulta essere dato da

$$S[(\mathbf{q} + \mathbf{h})(t)] - S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left(L(\mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t), t) - L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \right) dt. \quad (3.3.5)$$

D'altra parte, per il noto sviluppo di Taylor al primo ordine di una funzione, si ha

$$L(\mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t), t) - L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{h}} + R, \quad (3.3.6)$$

con un resto R che è quadratico nella norma dei vettori \mathbf{h} e $\dot{\mathbf{h}}$.²⁵ Inoltre, usando la nota formula di Leibniz per la derivata di un prodotto (che conduce alla nota formula di integrazione per parti), si ha

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{h}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{h} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{h} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \mathbf{h}. \quad (3.3.7)$$

²⁵Questo significa che, se $\|\mathbf{h}\| < \epsilon$, $\|\dot{\mathbf{h}}\| < \epsilon$, allora si ha $|R| < C\epsilon^2$ con una costante $C > 0$. Qui, come di consueto, dato un vettore $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, con $\|\mathbf{h}\|$ ne denotiamo la norma (o lunghezza), ad esempio euclidea.

Introduciamo ora le (3.3.6) e (3.3.7) nella (3.3.5). Ricordando che l'integrale di una somma è uguale alla somma dei corrispondenti integrali, troviamo che il valore del funzionale S nel punto–funzione spostato risulta essere

$$S[(\mathbf{q} + \mathbf{h})(t)] - S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \mathbf{h}(t) dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{h} \right|_{t_0}^{t_1} + \mathcal{R} \quad (3.3.8)$$

con un opportuno resto \mathcal{R} , che è evidentemente di ordine superiore al primo.²⁶ Vediamo così che l'incremento del funzionale S nel passaggio dal punto–funzione $\mathbf{q}(t)$ al punto–funzione $(\mathbf{q} + \mathbf{h})(t)$ risulta decomposto nella somma di una parte lineare nell'incremento $\mathbf{h}(t)$ e di un resto \mathcal{R} di ordine superiore al primo. La parte lineare (in \mathbf{h}) dell'incremento risulta essere la somma di due pezzi: un termine integrale, ed una parte “di bordo”, cioè un termine il cui valore dipende solo dai valori di $\mathbf{h}(t)$ al bordo dell'intervallo di integrazione.

A questo punto ci comportiamo in perfetta analogia con il caso di un funzionale F da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} . In quel caso, se si trova che, passando da un punto \mathbf{x} a un punto spostato $\mathbf{x} + \mathbf{h}$, l'incremento di F si decompone nella somma

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{h} + R(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \quad (3.3.9)$$

dove, per ogni punto \mathbf{x} fissato, $A = A(\mathbf{x})$ agisce lineamente su \mathbf{h} , ovvero è un certo funzionale **lineare** da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , mentre il resto R è di ordine superiore al primo nell'incremento \mathbf{h} , allora il differenziale dF di F viene definito come la parte lineare (nello spostamento \mathbf{h}) dell'incremento di F , ovvero $dF := A \cdot \mathbf{h}$, e si scrive anche, coerentemente,²⁷ $dF = A \cdot d\mathbf{x}$. Si trova poi $dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$, sicché il funzionale lineare dF viene espresso in termini delle derivate parziali del funzionale F .

Così ora, analogamente, si definisce il differenziale di S come la parte principale dell'incremento del funzionale S , cioè quella parte che è lineare nell'incremento $\mathbf{h}(t)$. Tradizionalmente, quando il dominio è uno spazio di funzioni, il differenziale di un funzionale viene denotato con il simbolo δ anziché d , e chiamato **variazione**, e dunque parleremo di **variazione** δS del funzionale S ; coerentemente, anche l'incremento $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t)$ del punto–funzione verrà denotato con il simbolo $\delta \mathbf{q}(t)$ e chiamato **variazione** di $\mathbf{q}(t)$.

²⁶Con questo si intende che, se

$$\sup_t \|\mathbf{h}(t)\| < \epsilon, \quad \sup_t \|\dot{\mathbf{h}}(t)\| < \epsilon,$$

allora si ha

$$|\mathcal{R}| < C\epsilon^2$$

con una costante $C > 0$. Nel nostro caso, questa proprietà del resto \mathcal{R} segue dal fatto che: i) per ogni t , il resto R (che figura nello sviluppo di Taylor della lagrangiana) è quadratico in $\|\mathbf{h}\|$, $\|\dot{\mathbf{h}}\|$, ii) la funzione $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t)$ è stata assunta liscia (sicché le sue derivate seconde hanno modulo limitato in un compatto), e iii) t varia in un dominio compatto.

²⁷Cioè si ha $\mathbf{h} = d\mathbf{x}$. Infatti, prendiamo come funzionale F proprio la i -esima componente del vettore \mathbf{x} , ovvero $F(\mathbf{x}) \equiv F(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Allora si ha $F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) = (x_i + h_i) - x_i = h_i$, ovvero $dF \equiv dx_i = h_i$.

Dunque abbiamo dimostrato che il funzionale azione hamiltoniana S , definito da

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt ,$$

ammette differenziale (termine classico: variazione) δS , e abbiamo calcolato l'espressione di tale variazione, che risulta essere data da²⁸

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \delta \mathbf{q}(t) dt + \mathbf{p}(t) \cdot \delta \mathbf{q}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} , \quad (3.3.10)$$

dove si é usato la definizione di momento $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$. Si osservi che, poiché per ogni valore di t le quantità $\mathbf{q}(t)$ e $\delta \mathbf{q}(t)$ sono dei vettori in \mathbb{R}^n , ovviamente l'integrale nell'espressione (3.3.10) per δS deve essere inteso come

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \delta \mathbf{q}(t) dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) dt . \quad (3.3.11)$$

Nota. Abbiamo qui considerato il caso di movimenti definiti in un fissato intervallo di tempo. Vi sono situazioni (come nel caso del principio di Maupertuis) in cui i moti variati si svolgono in un intervallo con estremi variati anche essi. E' questo il cosiddetto caso dei *moti variati asincroni*.

3.3.2 Stazionarietà di un funzionale; le equazioni di Eulero–Lagrange

La nozione di stazionarietà viene ora introdotta in analogia con il caso finito-dimensionale.

Definizione 1 . *Si consideri il funzionale $S = \int L dt$ definito nel dominio (3.2.10). Una funzione $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ è un punto stazionario (o estrema, o critico)²⁹ del funzionale S se ivi si annulla il differenziale (la variazione) di S , ovvero si ha $\delta S = 0$.*

Si dimostra allora il seguente teorema, che è nient'altro che quello annunciato nel precedente paragrafo:

²⁸Si osservi la analogia con il caso in cui il dominio è \mathbb{R}^n . In quel caso si ha, per il differenziale dF , una formula che lo esprime in termini delle derivate parziali di F , ovvero $dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$. Nel nostro caso, l'indice discreto i viene rimpiazzato dall'indice continuo t . Corrispondentemente, la somma su i viene rimpiazzata da un integrale su t , e possiamo dire di avere trovato l'analogo della derivata parziale rispetto a x_i , in questo caso la derivata parziale rispetto alla t -esima componennte $\mathbf{q}(t)$. Questo analogo della derivata parziale viene tradizionalmente denotato con il simbolo $\frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}}$, e abbiamo dunque trovato

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} .$$

²⁹Ad esempio, Arnol'd usa sempre il termine *estremale*.

Teorema 2 *I movimenti $\mathbf{q}(t)$ che sono punti stazionari (o estremali, o critici) del funzionale $S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ nel dominio (3.2.10) sono caratterizzati dalle proprietà indipendenti:*

i) soddisfano l'equazione differenziale (detta di Eulero–Lagrange)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 ; \quad (3.3.12)$$

ii) agli estremi t_0, t_1 dell'intervallo considerato soddisfano le condizioni

$$\mathbf{p}(t_1) \cdot \delta \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{p}(t_0) \cdot \delta \mathbf{q}(t_0) \quad (3.3.13)$$

per tutte le variazioni $\delta \mathbf{q}(t_0), \delta \mathbf{q}(t_1)$ compatibili con le condizioni al contorno assegnate ai tempi estremi.

Dimostrazione. Ricordiamo che, nel caso finito–dimensionale, la condizione di annullamento di un differenziale dF deve essere intesa nel senso che l'espressione $\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$ deve annullarsi per ogni scelta dell' "incremento" $d\mathbf{x}$. Allo stesso modo, nel presente caso in cui δS è dato dalla (3.3.11), l'annullarsi della variazione δS deve essere intesa nel senso che il secondo membro della (3.3.10) deve annullarsi per ogni scelta dell' "incremento", cioè della funzione $\delta \mathbf{q}(t)$.

Questo porta come immediata conseguenza che devono essere separatamente nulli i due addendi che figurano nell' espressione di δS , cioè deve essere contemporaneamente

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \delta \mathbf{q}(t) dt &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \cdot \delta \mathbf{q}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}(t) . \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Non può accadere infatti che i due termini abbiano un valore eguale ed opposto in modo che la loro somma si annulli. Ammettiamo infatti per assurdo che per un certo $\delta \mathbf{q}(t)$ sia $\mathbf{p}(t) \cdot \delta \mathbf{q}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} \neq 0$. Allora deve essere pure differente da zero l'integrale (per poterlo bilanciare), e di conseguenza non deve essere identicamente nullo l'integrando. Ma ora possiamo scegliere una nuova funzione $\delta \mathbf{q}'(t)$ che ha i medesimi valori al bordo (cioè in t_0 ed in t_1) di $\delta \mathbf{q}(t)$ ma differisca in un sottoinsieme interno all'intervallo. Dunque il valore dell'integrale cambia, mentre il termine di bordo no, e dunque la variazione di S non è nulla per quella scelta di $\delta \mathbf{q}'(t)$, che è l'assurdo cercato.

Ora, dal fatto che deve essere

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \delta \mathbf{q}(t) dt = 0 \quad \text{per ogni } \delta \mathbf{q}(t) \quad (3.3.15)$$

segue che deve essere

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n . \quad (3.3.16)$$

Questo si mostra in due passi. Il primo passo utilizza l'arbitrarietà di $\delta\mathbf{q}(t)$ per dimostrare che allora deve annullarsi la analoga espressione per ogni $i = 1, \dots, n$, ovvero deve essere

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) dt = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3.17)$$

Infatti, basta prendere inizialmente

$$\delta\mathbf{q}(t) = (\delta q_1(t), 0, \dots, 0),$$

sicché si resta con il solo primo termine della somma, e così via. Il secondo passo, fa uso poi di quello che talvolta viene chiamato il *Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni* (la dimostrazione è riportata qui sotto), che si applica al nostro caso, e quindi il teorema è dimostrato. **Q.E.D.**

Lemma 1 (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni) *Se una funzione $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ha la proprietà che*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)g(t) dt = 0 \quad \text{per ogni funzione } g, \quad (3.3.18)$$

dove la funzione g può soddisfare arbitrarie condizioni agli estremi dell'intervallo, allora si ha $f = 0$, ovvero

$$f(t) = 0 \quad \forall t.$$

Si noti che, come in tutte queste note, sottintendiamo che tutte le funzioni considerate sono lisce, e quindi continue.

Osservazione. Si osservi la seguente analogia con il caso di vettori in \mathbb{R}^n : Se un vettore \mathbf{x} ha la proprietà $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ (ovvero $\sum_i x_i y_i = 0$) per ogni vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (cioè \mathbf{x} è ortogonale a tutti i vettori dello spazio considerato), allora si ha $\mathbf{x} = 0$. La dimostrazione di questo fatto è banale e consiste nel prendere proprio $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, perché allora deve valere $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, ovvero \mathbf{x} ha lunghezza nulla, e d'altra parte in \mathbb{R}^n l'unico vettore di lunghezza nulla è il vettore nullo.

Nel nostro caso la situazione è diversa, non soltanto perché ora siamo in uno spazio di dimensione infinita anziché in \mathbb{R}^n , ma soprattutto perché, mentre di \mathbf{x} sappiamo che è ortogonale a *tutti* gli \mathbf{y} , ora invece della nostra assegnata funzione f (analoga del vettore \mathbf{x}) sappiamo soltanto che è ortogonale a un sottoinsieme di tutte le funzioni (cioè solo alle g con le assegnate condizioni al contorno e non anche a tutte le funzioni g). In altri termini, per concludere che f è nulla *basta* sapere che essa è ortogonale alle funzioni g che soddisfano le assegnate condizioni agli estremi.³⁰

³⁰Questo non è affatto ovvio. Ad esempio, nel caso di \mathbb{R}^3 con base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, se sappiamo un vettore \mathbf{x} ha la proprietà che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ per tutti i vettori \mathbf{y} nel piano individuato dai vettori base \mathbf{i}, \mathbf{j} , possiamo solo concludere che \mathbf{x} è proporzionale al vettore \mathbf{k} , e non che è nullo.

Dimostrazione del Lemma. La più compatta dimostrazione del lemma si compie *per assurdo*.³¹ Infatti, se per assurdo la funzione f non è identicamente nulla, allora esiste almeno un valore di t interno all'intervallo $[t_0, t_1]$, diciamolo t^* , in cui la funzione ha valore nonnullo, ad esempio positivo: $f(t^*) > 0$. Ma allora, per la continuità di f , esiste un intorno I di t^* in cui f è positiva (teorema di permanenza del segno).³² Usiamo ora l'arbitrarietà di g , e facciamo un *indentamento*, cioè prendiamo una funzione particolare g che sia nulla ovunque, salvo che in un intorno $\tilde{I} \subset I$ di t^* , dove sia ad esempio positiva. Dunque, per questa scelta di g l'integrale (3.3.18) si riduce a un integrale sul dominio \tilde{I} di una funzione positiva, e dunque è positivo, contro l'ipotesi. **Q.E.D.**

Siamo pertanto pervenuti alla dimostrazione del teorema 2, la cui prima parte costituisce il risultato principale di questo capitolo: gli estremali dell'azione devono soddisfare le equazioni di Lagrange. Ci si può chiedere ora quale sia il ruolo dell'ulteriore condizione.

$$\mathbf{p}(t) \cdot \delta \mathbf{q}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad \text{per ogni } \delta \mathbf{q}(t), \quad (3.3.19)$$

che è indipendente dalla proprietà che gli estremali soddisfino le equazioni di Lagrange. Generalmente questa ulteriore condizione viene usata per determinare, tra tutte le soluzioni dell'equazione di Eulero–Lagrange, quella che poi risulta effettivamente essere un estremante. Abbiamo già citato, nel caso delle traiettorie (in cui la parametrizzazione temporale è irrilevante), il problema di determinare la curva di minima distanza tra un punto ed una retta. In tal caso l'annullarsi del termine di bordo è proprio la condizione che dice che, tra tutti i segmenti rettilinei (che sappiamo essere soluzioni delle equazioni di Lagrange) uscenti dal punto assegnato, devo scegliere proprio quello ortogonale alla retta.

Nel caso del principio di Hamilton, la situazione più semplice che si presenta è quella in cui le condizioni al contorno siano quelle di configurazioni assegnate, $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}$ $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}^{(1)}$. Infatti in tal caso le condizioni al contorno sulla variazioni $\delta \mathbf{q}(t)$ diventano $\delta \mathbf{q}(t_0) = \delta \mathbf{q}(t_1) = 0$, sicché il termine al bordo risulta automaticamente nullo. Ma vedremo esempi che mostrano la rilevanza della ulteriore condizione al bordo. Ad esempio, nel caso delle collisioni elastiche esse conducono a dimostrare che la quantità di moto totale e l'energia totale si conservano nelle collisioni (cioè i loro valori immediatamente dopo una collisione sono i medesimi che si avevano immediatamente prima). Questa proprietà viene postulata nelle trattazioni elementari, mentre qui viene dimostrata, proprio in virtù della condizione ausiliaria.

³¹È possibile dare anche una dimostrazione di tipo diretto, anziché per assurdo. Ma tale dimostrazione fa intervenire in qualche modo la cosiddetta “funzione delta di Dirac”, che richiede una discussione accurata, per la quale si rimanda a una futura appendice.

³²Questo spiega perchè abbiamo considerato un punto *interno* all'intervallo. Se f è non annulla sul bordo, per continuità risulta non nulla anche in un punto interno all'intervallo.

In conclusione, i movimenti naturali di un sistema lagrangiano (in ambito globale, cioè nell'insieme \mathcal{U} definito da (3.2.10)), possono essere equivalentemente caratterizzati dall'essere punti di stazionarietà dell'azione o dal fatto di soddisfare (in una carta) le equazioni di Lagrange (e le assegnate condizioni al contorno). La prima caratterizzazione è comunque più significativa, perchè intrinseca, ovvero indipendente dalle coordinate. Infatti si deve pensare a un sistema lagrangiano come definito da uno spazio delle configurazioni \mathcal{C} e da una certa funzione lagrangiana. Pertanto l'azione ha ovviamente un carattere geometrico, indipendente dalle coordinate. Invece le equazioni di Lagrange, pur avendo una struttura universale, che è la medesima in tutte le carte (cioè in tutti i sistemi di coordinate), hanno poi concretamente forma diversa in ogni carta, quando esse vengano esplicitate calcolando le derivate della lagrangiana rispetto alle \mathbf{q} e alle $\dot{\mathbf{q}}$.

Si capisce pertanto come a livello di fondamenti si preferisca assumere come assioma che i movimenti naturali di un sistema lagrangiano siano caratterizzati dalla stazionarietà dell'azione. Si ha così il seguente

Principio di Hamilton (dell'azione stazionaria): I moti naturali di un sistema lagrangiano sono i punti stazionari (o estremali o critici) dell'azione hamiltoniana $S = \int L dt$, cioè quelli per cui vale $\delta S = 0$.

Si ha allora il teorema (2), secondo il quale gli estremali soddisfano le equazioni di Lagrange e le condizioni al contorno

$$\mathbf{p}(t_1) \cdot \delta \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{p}(t_0) \cdot \delta \mathbf{q}(t_0) .$$

Si noti che le condizioni al contorno sono in numero di $2n$, cioè proprio il numero di condizioni richieste per determinare una soluzione particolare delle equazioni di Lagrange. Nel teorema di esistenza e unicità si considerano di consueto condizioni iniziali che fissano le posizioni e le velocità. Qui invece si hanno condizioni più generali, che potranno essere soddisfatte se esse permettono di determinare corrispondentemente dei ben definiti dati iniziali.

In realtà, il principio di Hamilton permette poi un'estensione della teoria, rispetto alle equazioni di Lagrange, in quanto mentre per poter *definire* le equazioni di Lagrange ho bisogno che le traiettorie $\mathbf{q}(t)$ siano di classe C^2 , per poter calcolare il funzionale d'azione è sufficiente che le traiettorie siano C^1 a tratti. Questa differenza non è puramente formale, in quanto considerare traiettorie di classe C^1 a tratti permette di trattare nel formalismo variazionale anche gli urti, in tutta generalità ed in modo del tutto naturale. Invece, nel formalismo lagrangiano bisogna introdurre le cosiddette forze impulsive, che sono abbastanza problematiche dal punto di vista matematico, e non molto intuitive dal punto di vista fisico.

Un esempio è già stato dato nel caso dell'ottica geometrica, ricavando la legge della riflessione. In una successiva sezione tratteremo il caso meccanico, ricavando la legge di conservazione dell'impulso e dell'energia.

3.3.3 Aspetto generale delle equazioni di Eulero–Lagrange: esempio della lunghezza di una curva.

Nella trattazione svolta sopra, abbiamo fatto riferimento al problema fisico concreto dei movimenti di un sistema lagrangiano, mostrando come le equazioni differenziali di Lagrange (cioè essenzialmente le equazioni di Newton) siano nella sostanza (c'è solo in più il problema di soddisfare le condizioni al contorno) equivalenti alla stazionarietà di un funzionale (l'azione hamiltoniana $S = \int L dt$). Ma è evidente che nella dimostrazione del teorema rilevante non abbiamo mai fatto riferimento alla circostanza che L sia proprio la funzione lagrangiana di un sistema meccanico, differenza di energia cinetica ed energia potenziale. Ci troviamo infatti di fronte ad una certa proprietà puramente matematica. Abbiamo a che fare con uno spazio \mathcal{U} di funzioni $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ da \mathbb{R} in \mathbb{R}^n . È poi data una funzione $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, e si costruisce il corrispondente funzionale $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ avente la forma particolare $S = \int L dt$. Si dimostra allora che i punti stazionari di S sono funzioni che soddisfano una certa equazione differenziale coinvolgente la funzione L . Questa equazione differenziale è detta **equazione di Eulero–Lagrange** corrispondente al funzionale $S = \int L dt$.

Vediamo un esempio concreto, quello della caratterizzazione delle rette nel piano come curve di lunghezza minima.

Come si definisce la lunghezza di una curva. Ricordiamo anzitutto come si definisce la lunghezza di una curva. La prima cosa che bisogna avere presente è che una curva è una classe di equivalenza di *curve parametrizzate*. Si pensi ad un movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$; questa è una curva parametrizzata, perchè è una funzione, una legge, che ad ogni valore del parametro “indipendente” t associa un unico punto \mathbf{x} nel piano. Ora, per curva (o traiettoria) intendiamo il sottoinsieme del piano, unione di tutti i punti \mathbf{x} che si ottengono in tal modo, ovvero, come si dice in matematica, intendiamo l'*immagine* della funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Ma ovviamente tale sottoinsieme del piano non dipende dalla particolare parametrizzazione scelta, ovvero, come si dice nella meccanica tradizionale, “la traiettoria non dipende dalla legge oraria”. La traiettoria è definita indipendentemente dalla velocità con cui la percorro; essa non cambia se passo dal movimento $\mathbf{x}(t)$ al movimento $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(\tau(t))$ dove $\tau = \tau(t)$ è una qualunque funzione monotona (che conviene restringere ad essere crescente, e anche derivabile).³³

Denotiamo con γ (lettera greca gamma minuscola) una curva, e prendiamone una particolare parametrizzazione (cioè consideriamo un movimento) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ con t in un intervallo chiuso $t_0 \leq t \leq t_1$. È molto spontaneo prendere come definizione di lunghezza (euclidea) l di una curva γ (rappresentata parametricamente da una

³³L'autostrada Milano–Torino è una ben definita curva sulla superficie terrestre, indipendentemente dalla velocità con cui la si percorre.

funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ la quantità

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt . \quad (3.3.20)$$

Qui denotiamo con $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ la velocità del movimento considerato $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ e con $v := \|\mathbf{v}\|$ è il modulo (euclideo) del vettore \mathbf{v} . Se $\mathbf{x} = (x, y)$, dove x e y sono coordinate cartesiane ortogonali, allora si ha $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. La definizione (3.3.20) è del tutto spontanea, perchè è per tutti ovvio che nel caso di moto rettilineo uniforme la lunghezza percorsa sia il prodotto della velocità (costante) per il tempo impiegato a percorrere la traiettoria. Quindi, assegnato un certo movimento generico, è spontaneo approssimarlo con una successione di moti rettilinei uniformi a tratti, definendo la lunghezza dell'approssimante come somma delle lunghezze dei vari tratti rettilinei uniformi, e passare poi al limite come nel caso delle somme di Riemann approssimanti un integrale. In conclusione, per una curva γ descritta parametricamente nella forma $x = x(t)$, $y = y(t)$, dove x e y sono coordinate cartesiane ortogonali nel piano, e t sta nell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$, la lunghezza della curva è definita da

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt . \quad (3.3.21)$$

È poi un interessante (molto semplice) esercizio dimostrare che la lunghezza così definita non dipende dalla particolare parametrizzazione scelta, cioè è una proprietà della classe di equivalenza (ovvero della traiettoria).

Per il seguito è interessante tenere presente la seguente

Osservazione : parametro naturale di una curva. Avendo fissato una curva γ ed il suo punto iniziale $\mathbf{x}(t_0)$, la lunghezza l è una funzione (crescente) del punto finale, ovvero di t_1 . Denotando ora t_1 con t , resta pertanto definita una funzione $l = l(t)$ (la lunghezza calcolata lungo la curva),³⁴ e la formula (3.3.20) mostra immediatamente (teorema fondamentale del calcolo integrale) che si ha la relazione

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} , \quad (3.3.22)$$

ovvero

$$\frac{dl}{dt} = v(t) \quad (3.3.23)$$

(che doveva essere ovvia a priori). Ma allora, poiché l è una funzione crescente di t , è chiaro che per la rappresentazione parametrica dell'assegnata curva γ si può scegliere proprio la lunghezza l stessa: si dice che in tal caso si compie la scelta del **parametro naturale**. In vista della relazione (3.3.23) si ha dunque che, quando viene parametrizzata con il parametro naturale (cioè la lunghezza calcolata lungo la curva), la curva viene percorsa con velocità

³⁴Si noti che l è funzione di t , $l = l(t)$, solo se è assegnata una curva γ . Dunque l non è una funzione del posto. Non stiamo parlando del differenziale di una funzione $F(\mathbf{x})$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

$v = 1$. In relatività, dovremo considerare delle curve nello spaziotempo che rappresentano un movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, e allora il parametro naturale sarà definito in maniera del tutto analoga (con riferimento alla metrica pseudo-euclidea dello spaziotempo e alla corrispondente nozione di lunghezza), e la curva sarà ancora percorsa con (quadri)–velocità unitaria. Il parametro naturale avrà il significato di **tempo proprio**.

Osservazione notazione “classica” per l’elemento di linea dl . La relazione (3.3.22), ovvero

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \equiv \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

veniva scritta dai classici nella forma (si quadri, e si usi $\frac{dx}{dt} dt = dx$)

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 ,$$

o equivalentemente

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} .$$

Questa scrittura (e la sua analoga in relatività e in relatività generale) viene usata ancor oggi da tutti, addirittura nella forma più sintetica

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 . \quad (3.3.24)$$

Questa è la forma cui faremo riferimento nel capitolo sulla relatività. Naturalmente, si deve stare attenti a non fare confusione, credendo ad esempio di stare parlando del differenziale di l^2 , o di x^2 o di y^2 !

Per quanto riguarda l’uso di scrivere ad esempio dx^2 invece di $(dx)^2$, osserviamo che non si tratta affatto di una novità, ma di un fatto del tutto tradizionale, cui siamo abituati fin da quando abbiamo appreso le prime nozioni di calcolo differenziale. Infatti, per la derivata seconda di $f(x)$ rispetto ad x , oltre alla notazione $f''(x)$, usiamo anche la notazione $\frac{d}{dx} \frac{df}{dx}$, che abbreviamo con $\frac{d^2 f}{dx^2}$ invece che con la notazione $\frac{d^2 f}{(dx)^2}$, che sarebbe quella immediatamente suggerita dalla scrittura del corrispondente rapporto incrementale, di cui si deve poi prendere il limite.

Consideriamo ora il caso significativo il cui la curva si presenta come il grafico di una funzione $y = y(x)$ (cioè la curva ha una sola intersezione con ogni retta verticale). Ciò vuol dire che come parametro per parametrizzare la curva si può scegliere la coordinata x stessa, ovvero si pensa a un movimento in cui $x(t) = t$, cioè l’ascissa viene percorsa con velocità unitaria. Analiticamente, ciò vuol dire che si ha allora $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = y'$ (denotiamo con y' la derivata della funzione $y = y(x)$, e la formula (3.3.21) assume la forma

$$l(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx . \quad (3.3.25)$$

Consideriamo ora l’insieme \mathcal{U} delle curve parametrizzate nella forma $y = y(x)$, con $x_0 \leq x \leq x_1$, soddisfacenti le condizioni al contorno $y(x_0) = y_0$,

$y(x_1) = y_1$. Allora la lunghezza (3.3.25) è un funzionale avente per dominio lo spazio di funzioni \mathcal{U} , e i punti–funzione che sono estremi (massimi o minimi) della lunghezza sono necessariamente dei punti stazionari (o critici), cioè devono soddisfare la condizione $\delta l = 0$. Ma il funzionale $l = l(\gamma)$ ha la forma

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L dx, \quad \text{con } L(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Siamo dunque esattamente come nel caso meccanico, con la sola differenza dei nomi e del significato delle variabili: la variabile indipendente x ha preso il posto della variabile indipendente t , e la variabile dipendente è ora y invece di \mathbf{q} . Dunque i punti–funzione di stazionarietà della lunghezza sono ora le funzioni $y = y(x)$ che soddisfano la corrispondente equazione differenziale di Eulero–Lagrange. Poiché la “lagrangiana” ora non dipende da y , l’equazione di Lagrange è ora l’analogo della legge di conservazione del momento, e assume la forma $\frac{\partial L}{\partial y'} = c$ dove c è una costante. Esplicitamente,

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \tag{3.3.26}$$

ovvero (si quadri, e si raccolga y'^2) $y' = \text{costante}$ (o equivalentemente $y'' = 0$). La curva che è un punto di stazionarietà della lunghezza ha dunque pendenza costante (o curvatura nulla), cioè è una retta. Per stabilire la proprietà di minimo, occorrerebbe passare a valutare, per i funzionali con domini infinito–dimensionali, l’analogo della derivata seconda. Per una discussione rimandiamo ai manuali sul calcolo delle variazioni.³⁵

Nell’esempio appena discusso delle curve di lunghezza minima, si osserva che la “lagrangiana non dipende dalla variabile indipendente” x (analogo del tempo). e si ha pertanto l’analogo della legge di conservazione dell’energia.

Esercizio 1. Si mostri che anche usando l’analogo del teorema dell’energia si perviene alla equazione $y' = \text{costante}$.

Osservazione Confronto fra il funzionale “azione hamiltoniana” e il funzionale “lunghezza della traiettoria” nel caso della particella libera. Nel caso della particella libera, le traiettorie sono rette e i movimenti sono rettilinei uniformi (cioè, rette percorse con velocità costante). Le funzioni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ descrittive i movimenti sono estremali dell’azione:

$$\delta S = 0 \quad \text{con} \quad S[\mathbf{x}(t)] = \int T dt,$$

dove T è l’energia cinetica (ci mettiamo nel piano, e prendiamo $m = 1$),

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

³⁵Oppure, si veda il citato libro: A. Kolmogorov, S. Fomin, *Elementi della teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Cap. 10: Elementi di calcolo differenziale in uno spazio vettoriale.

Invece, le traiettorie (che possono ancora essere descritte in forma parametrica da funzioni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$) sono estremali della lunghezza

$$\delta l = 0 \quad \text{con} \quad l[\mathbf{x}(t)] = \sqrt{2} \int \sqrt{T} \, dt .$$

Quindi i due funzionali rilevanti sono rispettivamente l'integrale dell'energia cinetica e (a meno di una costante) l'integrale della radice dell'energia cinetica. Il principio di Maupertuis fornisce una generalizzazione di questa relazione.

3.3.4 Le leggi degli urti elastici

Questo paragrafo è in forma alquanto provvisoria.

Come accennato in precedenza, l'uso del principio di Hamilton permette una trattazione semplice, dal punto di vista matematico, degli urti. Per urto si intende un'interazione tra due (o più particelle) che, dal punto di vista fisico, accade praticamente "istantaneamente" e che ha raggio d'azione praticamente nullo. In particolare, le velocità delle particelle cambiano in maniera talmente veloce che le traiettorie appaiono non differenziabili nel punto in cui avviene l'urto.

Dal punto di vista lagrangiano si deve ammettere che esiste un potenziale a brevissimo raggio d'azione, ma capace comunque di imprimere forze enormi, forze che vengono di solito chiamate *forze impulsive*. L'introduzione di tali forze complica di molto il problema, perché di solito non sono quelle forze l'elemento su cui si vuole focalizzare l'attenzione, ma piuttosto il cambiamento delle traiettorie prodotto dall'urto, anziché l'andamento della traiettoria durante l'urto.³⁶ Introdurre le forze impulsive in modo corretto dal punto di vista matematico risulta niente affatto banale; d'altra parte questo sforzo risulta sterile, in quanto si vogliono ottenere delle leggi che prescindano dalla concreta forma delle forze impulsive, che dunque non dovrebbero giocare alcun ruolo rilevante.

Questi problemi vengono completamente superati nella formulazione variazionale, la quale, ignorandoli, permette di ottenere le leggi dell'urto in modo rigoroso dal punto di vista matematico, senza la necessità di introdurre alcuna forza impulsiva. Infatti il funzionale d'azione risulta definito anche su un dominio più ampio di quello introdotto nelle pagine precedenti, e cioè sul dominio \mathcal{U}' delle funzioni continue e con derivata continua a tratti, aventi come al solito valori al bordo fissati.³⁷ Evidentemente questo è il dominio naturale in cui ambientare il problema dell'urto (vedi la Figura 3.9)

Resta da stabilire se l'azione sia differenziabile anche su questo dominio più esteso. Mostriamo non solo che ciò è vero, non solo, ma anche che la condizione di stazionarietà implica il seguente

Teorema 3 (Leggi degli urti elastici) *In un urto si conservano il momento totale e l'energia.*

³⁶Una notevole eccezione si ha invece nella Fisica delle alte energie, in cui si vogliono indagare proprio le forze responsabili dell'urto. Un esempio di tale problematica è data nel Capitolo 7, in cui viene trattato il cosiddetto "scattering di Rutherford".

³⁷Infatti se la lagrangiana è una funzione C^1 allora l'integrando risulta continuo a tratti e dunque integrabile secondo Riemann.

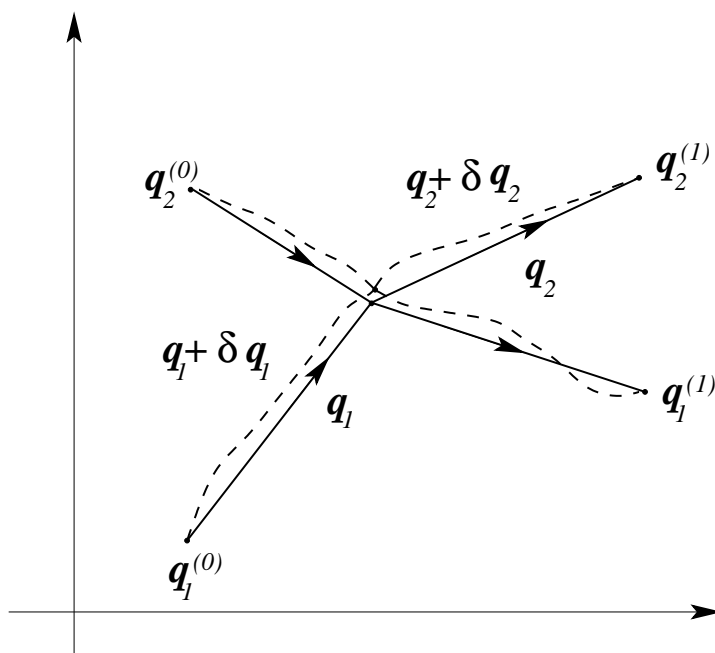


Figura 3.9: Urto tra due particelle.

Per dimostrare che l'azione è differenziabile, consideriamo il caso più semplice, ovvero quello dell'urto fra due particelle. Denotiamo i movimenti delle due particelle con $\mathbf{q}_1(t)$, $\mathbf{q}_2(t)$, e sia t^* l'istante in cui avviene l'urto, di modo che le funzioni $\mathbf{q}_i(t)$ abbiano una discontinuità nella derivata nell'unico punto t^* interno all'intervallo $[t_0, t_1]$. Il caso generale, in cui si usano arbitrarie coordinate lagrangiane, si ottiene seguendo la falsariga di quanto diremo, a prezzo di alcune complicazioni analitiche.

Per cominciare bisogna notare che vi è la complicazione che i movimenti variati $\mathbf{q}_i(t) + \delta\mathbf{q}_i(t)$ avranno una singolarità in generale ad un diverso istante, diciamo $t^* + \delta t$, perché l'urto avverrà, in linea di principio, in un punto leggermente diverso dal precedente. Comunque, δt non può essere completamente arbitrario, in quanto devono valere le relazioni seguenti

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(t^*) &= \mathbf{q}_2(t^*) \\ (\mathbf{q}_1 + \delta\mathbf{q}_1)(t^* + \delta t) &= (\mathbf{q}_2 + \delta\mathbf{q}_2)(t^* + \delta t) ; \end{aligned}$$

che esprimono le condizioni di urto, e che permettono di trovare una relazione tra δt e $\delta\mathbf{q}_i$. Infatti, almeno formalmente, se si sviluppa in serie di Taylor \mathbf{q}_i nella seconda riga, ed si usa la prima si trova, a meno di termini del secondo ordine, le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 \delta t + \delta\mathbf{q}_1 \Big|_{t^*} &= \dot{\mathbf{q}}_2 \delta t + \delta\mathbf{q}_2 \Big|_{t^*} \\ \dot{\mathbf{q}}_1 \delta t + \delta\mathbf{q}_1 \Big|_{t^* + \delta t} &= \dot{\mathbf{q}}_2 \delta t + \delta\mathbf{q}_2 \Big|_{t^* + \delta t} , \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

che mostrano come δt sia una quantità "piccola" con $\delta\mathbf{q}_i$.

Naturalmente bisogna fare attenzione, perché \mathbf{q}_i non è differenziabile per $t = t^*$, per cui la prima relazione appare dubbia. Per ottenere la prima, bisogna dunque sviluppare in serie di Taylor la funzione $\mathbf{q}_i + \delta\mathbf{q}_i$ che è invece differenziabile, ed usare il fatto che la sua derivata coincide con la derivata (destra o sinistro a seconda che sia δt positivo o negativo) di \mathbf{q}_i , a meno naturalmente di termini di ordine superiore.

A questo punto l'incremento dell'azione si può calcolare spezzando l'integrale in tre parti al modo seguente

$$S[\mathbf{q}_i + \delta\mathbf{q}_i] - S[\mathbf{q}_i] = \int_{t_0}^{t^*} \delta L dt + \int_{t^*}^{t^* + \delta t} \delta L dt + \int_{t^* + \delta t}^{t_1} \delta L dt ,$$

in cui δL indica la differenza tra la lagrangiana calcolata sul movimento variato e sul movimento scelto \mathbf{q}_i . Per semplicità abbiamo qui supposto che δt sia positivo. Nel primo e nel terzo integrale le funzioni sono regolari, per cui si può procedere come fatto nei paragrafi precedenti ottenendo, a meno di un resto di ordine superiore,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t^*} \delta L dt &= \int_{t_0}^{t^*} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i dt + \sum_i \mathbf{p}_i \delta \mathbf{q}_i \Big|_{t^*} \\ \int_{t^* + \delta t}^{t_1} \delta L dt &= \int_{t^* + \delta t}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i dt - \sum_i \mathbf{p}_i \delta \mathbf{q}_i \Big|_{t^* + \delta t} . \end{aligned}$$

Il secondo integrale invece lo si può calcolare usando il teorema della media, e si ottiene, sempre a meno di resti di ordine superiore,

$$\int_{t^*}^{t^* + \delta t} \delta L dt = L \Big|_{t^*} - L \Big|_{t^* + \delta t} \delta t .$$

Per ottenere questo risultato bisogna operare giudiziosamente, ricordando che la lagrangiana calcolata sul movimento variato è continua in t^* , la lagrangiana calcolata sul movimento non variato è continua in $t^* + \delta t$. Otteniamo in definitiva che, a meno di termini di ordine superiore, vale

$$S[\mathbf{q}_i + \delta\mathbf{q}_i] - S[\mathbf{q}_i] = \left(\int_{t_0}^{t^*} + \int_{t^* + \delta t}^{t_1} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i dt - \left(\sum_i \mathbf{p}_i \delta \mathbf{q}_i - L \delta t \right) \Big|_{t^*}^{t^* + \delta t} ,$$

che mostra come l'azione sia differenziabile anche nel dominio esteso. Ora, quando vado a cercare i punti stazionari dell'azione, dovrò imporre che siano nulli separatamente l'integrale ed il contributo di bordo: l'annullarsi dell'integrale mi impone come prima che i movimenti devono essere soluzioni delle equazioni di Lagrange a tutti i tempi tranne che per $t = t^*$ (ricordiamo che δt può essere reso arbitrariamente piccolo); l'annullarsi della parte di bordo dà le leggi dell'urto come ora vedremo subito.

Infatti riscriviamo il termine di bordo al modo seguente

$$\left(\sum_i \mathbf{p}_i \delta \mathbf{q}_i + L \delta t \right) \Big|_{t^*}^{t^* + \delta t} = \sum_i \mathbf{p}_i (\dot{\mathbf{q}}_i \delta t + \delta \mathbf{q}_i) - \left(\sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L \right) \delta t \Big|_{t^*}^{t^* + \delta t}$$

dove a secondo membro si è aggiunto e tolto il termine $\sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i \delta t$. Ricordando ora le relazioni (3.3.27) abbiamo infine

$$\left(\sum_i \mathbf{p}_i \delta \mathbf{q}_i + L \delta t \right) \Big|_{t^*}^{t^* + \delta t} = \left(\sum_i \mathbf{p}_i \right) \Big|_{t^*}^{t^* + \delta t} (\dot{\mathbf{q}}_1 \delta t + \delta \mathbf{q}_1) - \left(\sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L \right) \Big|_{t^*}^{t^* + \delta t} \delta t .$$

Il movimento sarà stazionario se il termine di bordo si annulla qualunque siano $\delta \mathbf{q}_1$ e δt : ne segue che deve essere

$$\begin{aligned} \left(\sum \mathbf{p}_i\right)\Big|_{t^*}^{t^*+\delta t} &= 0 \\ \left(\sum_i \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L\right)\Big|_{t^*}^{t^*+\delta t} &= 0, \end{aligned}$$

cioè la legge di conservazione del momento e dell'energia.

3.3.5 L'azione ridotta e il principio di Maupertuis–Jacobi

Veniamo ora al principio di Maupertuis (o di Maupertuis–Jacobi), che, come ricordato nell'introduzione, ha svolto un ruolo fondamentale nel promuovere i principi variazionali. Esso verrà qui dedotto, in maniera abbastanza semplice, come corollario del principio di Hamilton, ma presenta tuttavia alcuni aspetti alquanto sottili. Non meravigli dunque la seguente citazione da Jacobi, che riportiamo dal manuale di Arnol'd³⁸: *“In tutti i manuali, anche nei migliori, il principio di Maupertuis è presentato in una forma tale che è impossibile comprenderlo.”* (C. Jacobi, Corso di dinamica, 1842–1843). E Arnol'd aggiunge: *“Non mi azzardo a violare la tradizione.”*

Il punto di partenza consiste nell'osservazione fatta alla fine del paragrafo (3.3.3) dove, nel caso della particella libera, si confrontavano i funzionali i cui minimi danno rispettivamente i movimenti oppure le traiettorie. Nel primo caso (azione hamiltoniana) si ha l'integrale temporale dell'energia cinetica, $\int T dt$, nel secondo caso (lunghezza) si ha l'integrale dell'elemento di linea (euclideo) $\int dl$. Si ricordi però che si può parametrizzare una traiettoria con il tempo, essendo $dl = v dt = C\sqrt{T} dt$ dove la costante è data da $C = \sqrt{2/m}$. La relazione tra i due principi si ottiene scrivendo

$$\int T dt = \int \sqrt{T} \sqrt{T} dt,$$

e osservando che, da una parte si ha $\sqrt{T} dt = \sqrt{\frac{m}{2}} dl$, sicché si resta con $T dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{T} dl$, e d'altra parte che il fattore \sqrt{T} è una costante del moto (stiamo considerando la particella libera) e dunque è ininfluente nel calcolo della variazione. In tal modo il principio variazionale per la traiettoria ($\delta \int dl = 0$) segue dal principio variazionale per il movimento ($\delta S = 0$).

È chiaro pertanto che si troverà una relazione tra il principio variazionale relativo al movimento e quello relativo alla traiettoria se si potrà esprimere l'azione S attraverso un integrale dell'energia cinetica T , facendo anche uso del teorema di conservazione dell'energia. Il procedimento da seguirsi viene suggerito dalla nota relazione tra lagrangiana ed hamiltoniana, ovvero

$$L = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H, \quad \mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

³⁸Metodi matematici della meccanica classica, paragrafo 451 D.

se ci si restringe al caso in cui si ha conservazione dell'energia $H = E$, e inoltre l'energia cinetica è quadratica nelle $\dot{\mathbf{q}}$. sicché si ha

$$\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 2T .$$

È allora spontaneo restringere l'attenzione allo spazio \mathcal{U}_E dei movimenti $\mathbf{q}(t)$ che corrispondono ad un valore E fissato dell'energia. Inoltre ci limiteremo al caso delle condizioni al contorno con fissati valori delle posizioni agli estremi. Procedendo temporaneamente in maniera euristica (metteremo poi subito a posto le cose), si ha allora che nello spazio \mathcal{U}_E l'azione hamiltoniana prende la forma

$$S[\mathbf{q}(t), E] = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} dt - E \cdot (t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt - E \cdot (t_1 - t_0) .$$

È dunque spontaneo introdurre l' **azione ridotta** A definita da

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} dt = \int_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} ,$$

perché allora si ha

$$S = A - E \cdot (t_1 - t_0) ,$$

e sembrerebbe che gli estremali di S coincidano con quelli di A . Questo è vero, se si aggiunge qualche precisazione, come ora mostriamo. Si noti che l'azione ridotta A , come integrale di una forma differenziale nello spazio delle configurazioni, non dipende dalla parametrizzazione $\mathbf{q}(t)$ del nostro moto, ma solo dalla corrispondente della traiettoria γ . Mostriamo tuttavia che esiste un procedimento generale (che fa uso della conservazione dell'energia) per assegnare a ogni traiettoria un unico ben definito movimento, sicché potremo fare sempre riferimento a movimenti.

Per semplicità di notazione consideriamo il caso di una sola particella nello spazio. La trattazione del caso generale si otterrà poi banalmente per analogia. Nel caso di un punto nello spazio, il fatto significativo da mettere in luce è che il movimento $\mathbf{q}(t)$ nel dominio \mathcal{U}_E è individuato completamente dalla corrispondente traiettoria (orientata) γ (leggi gamma) nello spazio delle configurazioni $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3$. Infatti, in ogni punto \mathbf{q} della traiettoria γ , il corrispondente vettore velocità $\dot{\mathbf{q}}$, dovendo essere tangente a γ , è individuato in direzione e verso, e resta indeterminata soltanto la sua lunghezza (o modulo) $v \equiv \|\dot{\mathbf{q}}\|$. Ma questa è determinata dall'assegnato valore E dell'energia, perché si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(\mathbf{q}) = E ,$$

e dunque

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{T} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(\mathbf{q})} .$$

Anzi, in tal modo, essendo determinata la velocità in ogni punto di γ , risulta determinata una ben definita parametrizzazione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ della curva γ . In conclusione, nello spazio dei movimenti \mathcal{U}_E , ad ogni movimento corrisponde una unica traiettoria γ e, viceversa, ad ogni traiettoria γ l'assegnazione dell'energia E associa un unico movimento $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. Il punto sottile è ora che ad ogni traiettoria γ viene a corrispondere in tal modo anche un ben definito tempo totale di percorrenza, in generale diverso per ogni traiettoria. Se anche fissiamo il medesimo tempo di partenza t_0 uguale per tutte le traiettorie, ogni traiettoria γ avrà un diverso tempo finale t_1 :

$$t_1 = t_1(\gamma) .$$

Consideriamo dunque lo spazio \mathcal{U}_E dei movimenti che si svolgono (tra due posizioni fissate) ad una fissata energia E , e individuiamo nel modo detto ognuno di tali movimenti mediante la corrispondente traiettoria γ . Allora la relazione tra azione hamiltoniana S ed azione ridotta $A = \int 2T dt$ è

$$S(\gamma, E) = A(\gamma, E) - E(t_1 - t_0) ,$$

dove

$$A(\gamma, E) = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} dt = \int_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} , \quad \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} . \quad (3.3.28)$$

Queste sono le precisazioni che dovevano essere fatte. Si ha ora la proprietà che nel dominio \mathcal{U}_E gli estremali dei due funzionali, azione hamiltoniana S ed azione ridotta A , coincidono (ovviamente questo ha senso solo se si pensano le traiettorie parametrizzate nel modo detto, sicché ogni traiettoria corrisponde a un unico ben definito movimento, e dunque ci riferiamo in ogni caso a movimenti). Il fatto che gli estremali di S e di A coincidano (quando per A si parametrizzano le traiettorie nel modo detto usando la conservazione dell'energia) può essere visto nel seguente modo. Da una parte si usa la relazione

$$A = S + E(t_1 - t_0) ,$$

da cui segue

$$\delta A = \delta S + E\delta t_1 .$$

D'altra parte si può mostrare che il termine $E\delta t_1$ è un termine di "bordo" (infatti vale $\delta t_1 = -|\delta \mathbf{q}_1|/|\dot{\mathbf{q}}(t_1)|$) per cui il termine integrale in δA è il medesimo del termine integrale in δS . Dunque le equazioni di Eulero-Lagrange per i funzionali A ed S coincidono. In realtà un calcolo più sottile mostra che i termini di bordo sono nulli.

Abbiamo dunque dimostrato il

Lemma 2 (dell'azione ridotta.) *Per una particella nello spazio, si consideri il sottoinsieme dei movimenti $\mathbf{q}(t)$ di \mathcal{U}_E (ovvero dei movimenti che rispettano l'energia, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$ e hanno traiettorie con estremi fissati). Allora le traiettorie γ corrispondenti agli estremali dell'azione hamiltoniana $S = \int L dt$ sono estremali dell'azione ridotta $A(\gamma, E)$ (3.3.28). Viceversa, i movimenti che si ottengono dalle traiettorie γ estremali dell'azione ridotta, parametrizzandoli mediante la conservazione dell'energia, sono estremali dell'azione hamiltoniana.*

Possiamo ora venire al principio di Maupertuis–Jacobi. Si tratta semplicemente di esprimere l'azione ridotta $A(\gamma, E)$ in termini di quantità che coinvolgano soltanto lo spazio delle configurazioni. Sappiamo già che le traiettorie sono estremali dell'azione ridotta $A = 2 \int T dt$, e basta allora utilizzare il teorema di conservazione dell'energia, nella forma $T = E - V(\mathbf{q})$, ed eliminare il tempo mediante la relazione

$$v dt = dl, \quad \text{ovvero} \quad \sqrt{T} dt = \sqrt{m/2} dl$$

dove dl è l'ordinario elemento euclideo di linea, sicché, usando $T dt = \sqrt{T} \sqrt{T} dt$ si ha

$$A(\gamma, E) = \sqrt{2m} \int_{\gamma} \sqrt{E - V(\mathbf{q})} dl,$$

Abbiamo pertanto dimostrato il

Teorema 4 (Principio di Maupertuis–Jacobi) . *Consideriamo una particella nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 soggetta a un campo di forze con energia potenziale $V = V(\mathbf{q})$. Allora le traiettorie γ corrispondenti a movimenti a una fissata energia E sono i punti stazionari (o estremali, o critici) del funzionale*

$$A(\gamma, E) = \sqrt{2m} \int_{\gamma} \sqrt{E - V(\mathbf{q})} dl,$$

dove dl è l'ordinario elemento euclideo di linea.

In altri termini, le traiettorie di una particella in un campo di forze con energia potenziale $V(\mathbf{q})$ ad una fissata energia E coincidono con le traiettorie dei raggi luminosi in un mezzo con indice di rifrazione

$$n(\mathbf{q}) = \sqrt{E - V(\mathbf{q})}.$$

A questo punto può essere interessante confrontare la dimostrazione appena data, con quella riportata da Fermi nella prima pagina delle sue *Notes on quantum mechanics*, dimostrazione che è eseguita in una nota a piè di pagina.

Intermezzo: la geometrizzazione della dinamica. Abbiamo visto come le traiettorie di una particella in un campo di forze con energia potenziale $V(\mathbf{q})$ si

ottengono attraverso il principio di Maupertuis con lo stesso procedimento con cui si ottengono quelle per la particella libera, pur di rimpiazzare l'elemento di linea

$$dl \quad \text{con} \quad \sqrt{E - V(\mathbf{q})} \, dl .$$

Quindi l'effetto della forza si manifesta solamente attraverso un elemento geometrico. Si rimpiazza l'elemento di linea dl (caratteristico della particella libera) con un altro ad esso proporzionale, tramite un fattore dipendente dal posto attraverso l'energia potenziale. Dunque le forze sono riassunte in un elemento geometrico. Così avverrà anche in relatività generale, in cui la gravità viene ad essere descritta come avente l'effetto geometrico di "incurvare lo spazio".

3.4 Il principio variazionale per le equazioni di Hamilton

Nella discussione del principio di Hamilton si è fatto riferimento all'azione hamiltoniana $S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ come funzionale definito sullo spazio \mathcal{U} dei movimenti $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ di un sistema lagrangiano ad n gradi di libertà (con certe condizioni al contorno), e si è mostrato come la condizione di stazionarietà $\delta S = 0$ sia equivalente alle equazioni differenziali di Lagrange. Ma si è anche osservato che il procedimento è di carattere alquanto generale, ed ha la caratteristica di associare, ad un funzionale esprimibile come un integrale di una certa "densità", un sistema di equazioni differenziali, dette appunto "equazioni di Eulero-Lagrange", caratterizzanti i punti stazionari del funzionale considerato. In tale ordine di idee è stato considerato l'esempio del funzionale che fornisce la lunghezza euclidea di una curva nel piano.

Vogliamo qui illustrare tale proprietà su un esempio molto significativo per la meccanica: vogliamo mostrare che non solo le equazioni di Lagrange, ma anche le equazioni di Hamilton possono essere riguardate come equazioni di Eulero-Lagrange per un opportuno funzionale.³⁹ Risulta poi che il funzionale formalmente è ancora l'azione hamiltoniana, riguardata però ora come avente dominio in un diverso spazio di funzioni. Si tratta dello spazio delle funzioni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ anziché lo spazio delle funzioni $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ (con $t \in [t_0, t_1]$).

Il punto da tenere presente è che è ovviamente vero che, quando è assegnata la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, resta corrispondentemente assegnata anche la funzione $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t)$ e quindi in particolare è anche assegnata la funzione $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t)$. Ma mentre in ambito lagrangiano il valore di $\dot{\mathbf{q}}$ determina il valore di \mathbf{p} e viceversa, si deve ricordare che invece in ambito hamiltoniano le funzioni $\dot{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ sono a priori assolutamente indipendenti. Infatti, in ambito lagrangiano la relazione

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} , \tag{3.4.1}$$

³⁹Nota per gli autori. Cercare di capire la stranissima affermazione che fa Dirac a questo proposito nell'articolo sul principio di Hamilton riprodotto nel libro *Quantum electrodynamics* di J. Schwinger: sembra dire che ciò non è possibile.

appare come una definizione di \mathbf{p} in termini di $\dot{\mathbf{q}}$ e quindi pone un legame tra \mathbf{p} e $\dot{\mathbf{q}}$ (in tal senso, essa viene impiegata per definire la hamiltoniana a partire dalla lagrangiana). Invece in ambito hamiltoniano i vettori \mathbf{p} e $\dot{\mathbf{q}}$ sono del tutto indipendenti, e la hamiltoniana è una certa funzione di \mathbf{q}, \mathbf{p} assegnata a priori (ad esempio, $H = (p^2/2m) + V(q)$ per una particella sulla retta). In ambito hamiltoniano risulta poi che la relazione (3.4.1) costituisce essa stessa una delle due equazioni di moto, precisamente

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} ,$$

perché ben sappiamo dalle proprietà della trasformata di Legendre che essa è equivalente alla (3.4.1). In altri termini, la relazione lagrangiana tra \mathbf{p} e $\dot{\mathbf{q}}$ vale nello spazio delle fasi soltanto “lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton”. È quindi evidente che se ora intendiamo dedurre le equazioni di Hamilton come caratterizzanti i punti stazionari di un certo funzionale, dovremo pensare che questo funzionale sia funzione del movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{p}(t)$ completamente indipendente da $\dot{\mathbf{q}}(t)$.

Mostriamo che le equazioni di Hamilton sono le equazioni di Eulero–Lagrange per il funzionale

$$\tilde{S}[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt ,$$

dove

$$\tilde{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) .$$

Si ha il

Teorema 5 *Si denoti $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Sia assegnata una funzione $H = H(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ (hamiltoniana), e si consideri il funzionale (azione hamiltoniana generalizzata) \tilde{S} , definito da*

$$\tilde{S}[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt , \quad (3.4.2)$$

dove

$$\tilde{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) . \quad (3.4.3)$$

Allora le corrispondenti equazioni di Eulero–Lagrange sono proprio le equazioni di Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} , \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} . \quad (3.4.4)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è un banale esercizio, che è utile svolgere secondo lo schema illustrato nel paragrafo precedente. Infatti abbiamo ancora un funzionale della forma $\tilde{S} = \int \tilde{L} dt$, del tipo considerato precedentemente ($S = \int L dt$), solo che ora si ha $\tilde{S} = \tilde{S}[\mathbf{x}(t)]$, con $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$ ed \tilde{L} data dalla (3.4.3). Le equazioni di Eulero–Lagrange prendono la consueta forma

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0 , \quad \text{con } \mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) .$$

Si scrivono dunque le corrispondenti equazioni per le componenti \mathbf{q} e \mathbf{p} di \mathbf{x} , ovvero

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = 0.$$

Infine, tenendo presente la forma (3.4.3) di \tilde{L} , tali equazioni risultano essere

$$-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \mathbf{P} = 0, \quad \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

ovvero le equazioni di Hamilton. **Q.E.D.**

Osservazione sulle condizioni al bordo. Se si ripercorre il procedimento con cui si ottengono le equazioni di Eulero–Lagrange a partire da una assegnata lagrangiana, e ci si sofferma sul passaggio in cui si compie una integrazione per parti, si troverà che nel nostro caso, in cui la lagrangiana è la funzione \tilde{L} , essendo $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = 0$, i termini finiti dovuti all’integrazione per parti sono solo quelli relativi a $\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{q}$. Segue pertanto che per il minimo dell’azione basta richiedere le condizioni di annullamento al bordo per $\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{q}$ e non è necessario richiedere alcuna condizione che coinvolga $\delta \mathbf{p}$. Si noti ora che, se in certe variabili canoniche si è assunta la condizione al bordo ad esempio $\delta \mathbf{q}(t_1) = 0$, eseguendo una generica trasformazione canonica (che non sia della sottoclasse puntuale estesa) la condizione non si esprimerà in generale nella forma $\delta \mathbf{Q}(t_1) = 0$ (perché le \mathbf{q} dipendono anche da \mathbf{P}). Tuttavia, come ripetutamente osservato, questo fatto è irrilevante al fine di dedurre dal principio di minima azione le equazioni di Hamilton.

3.5 La caratterizzazione delle trasformazioni canoniche, e la forma di Poincaré–Cartan nello spazio delle fasi esteso.

Ricordiamo che nel capitolo sulle equazioni di Hamilton abbiamo preso in considerazione delle trasformazioni di variabili che coinvolgono non solo le variabili “di posizione” \mathbf{q} , ma anche i momenti \mathbf{p} , oltre che eventualmente il tempo. Tra tutte queste trasformazioni, sono state chiamate **trasformazioni canoniche** quelle aventi la proprietà di conservare la struttura delle equazioni di Hamilton. In altri termini, se in una carta con coordinate \mathbf{q}, \mathbf{p} è assegnata una hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ sicché gli stati (punti $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$) evolvono come soluzioni delle equazioni di Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.5.1)$$

allora si considera una famiglia di trasformazioni dipendente parametricamente dal tempo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (3.5.2)$$

e si dice che tale famiglia di trasformazioni è canonica se, comunque sia assegnata la hamiltoniana originale H , nelle nuove variabili gli stati (punti $\mathbf{X} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$) evolvono come soluzioni delle equazioni di Hamilton con una opportuna hamiltoniana $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$, ovvero si abbia

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}. \quad (3.5.3)$$

Il principio di azione stazionaria, nella forma adatta alle equazioni di Hamilton, ci fornisce allora una caratterizzazione delle trasformazioni canoniche, che risulta particolarmente utile essendo di tipo costruttivo, nel senso che permette di produrre delle trasformazioni canoniche attraverso un procedimento concreto (**metodo della funzione generatrice**). Vogliamo qui illustrare questa caratterizzazione nella maniera più semplice possibile.

L'osservazione di base è che l'azione \tilde{S} nella forma adatta per le equazioni di Hamilton, che è stata scritta sopra come $\tilde{S} = \int (\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H) dt$, può essere evidentemente scritta anche come

$$\tilde{S} = \int (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt), \quad (3.5.4)$$

in cui figura, come integrando, la quantità

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt. \quad (3.5.5)$$

Questa è una forma differenziale di primo ordine (o. come si usa dire, una *1-forma differenziale*), allo stesso modo in cui, in \mathbb{R}^3 , è una 1-forma differenziale il lavoro (anzi il lavoro "infinitesimo o elementare") $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \equiv F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ dove $F_i = F_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$, sono le componenti cartesiane di un assegnato campo di forze. Nel nostro caso, abbiamo a che fare con una 1-forma in uno spazio che viene chiamato spazio nello **spazio delle fasi "esteso"**, di dimensione $2n + 1$, nel quale anche il tempo figura come coordinata, e dunque le coordinate sono $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$.

Intermezzo: Lo spazio delle fasi esteso: analogia con lo spaziotempo. L'energia come momento associato al tempo. Nella teoria della relatività (sia in quella speciale, sia in quella generale) svolge un ruolo essenziale la nozione di spaziotempo. In relatività speciale si tratta semplicemente dello spazio quadridimensionale con coordinate (t, \mathbf{x}) dove $\mathbf{x} = (x, y, z)$ sono le consuete coordinate cartesiane ortogonali nello spazio ordinario. Un movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ (legge che ad ogni tempo t associa una posizione $\mathbf{x}(t)$) appare allora nello spaziotempo come un ente geometrico, un particolare sottoinsieme dello spaziotempo che è monodimensionale, cioè, come si dice, una curva.⁴⁰ Come fa osservare ripetutamente Einstein stesso, per quanto riguarda questo fatto la relatività non aggiunge nulla di nuovo (la novità consisterà invece nel fatto che nello spaziotempo essa introduce un prodotto

⁴⁰Si veda il bellissimo *slogan* di Einstein riportato nel capitolo di relatività, secondo cui *il divenire nello spazio si manifesta come un essere nello spaziotempo*: vengono riconciliati Talete ed Eraclito.

scalare – o, come si dice, una metrica – come traduzione geometrica del principio di costanza della velocità della luce).

Qui, passando dallo spazio delle fasi \mathcal{F} allo spazio delle fasi esteso $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \times \mathbb{R}$, stiamo facendo una cosa del tutto analoga. Un movimento nello spazio delle fasi è una funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ che ad ogni tempo (numero reale) t associa un punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dello spazio delle fasi (naturalmente, le coordinate sono ora $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$). e un movimento appare come un ente geometrico in $\tilde{\mathcal{F}}$, che è un sottoinsieme monodimensionale, cioè una curva.

La considerazione dello spazio delle fasi esteso $\tilde{\mathcal{F}}$ con coordinate $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e della corrispondente 1–forma di Poincaré–Cartan $\omega = \mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt$ induce spontaneamente ad una ulteriore interessantissima osservazione. Come nello spazio delle fasi \mathcal{F} il momento \mathbf{p} è associato a \mathbf{q} , allo stesso modo nello spazio delle fasi esteso $\tilde{\mathcal{F}}$ l’hamiltoniana H (o piuttosto $-H$) appare con il momento associato al tempo. Questo fatto può essere messo in luce in una maniera ancora più stringente, che non abbiamo qui il tempo di illustrare.

Si noti bene che una generica 1–forma nello spazio delle fasi esteso si esprime come

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \cdot d\mathbf{p} + c(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dt \quad (3.5.6)$$

con dei coefficienti \mathbf{a} , \mathbf{b} , c del tutto generici. La nostra 1–forma (3.5.5) è dunque specialissima, perché è caratterizzata da coefficienti specialissimi, precisamente

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \ , \ \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0 \ , \ c(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \ . \quad (3.5.7)$$

Questa 1–forma specialissima viene chiamata *forma di Poincaré–Cartan* e denotata tradizionalmente con il simbolo ω :

$$\omega := \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - Hdt \ .$$

Il calcolo eseguito nel paragrafo precedente per il differenziale (variazione) di \tilde{S} ci ha mostrato il seguente fatto, con riferimento alle variabili originarie $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$: la proprietà che il movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sia soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana H è equivalente alla proprietà che l’azione $\tilde{S}[\mathbf{x}(t)]$ sia espressa in una maniera specialissima, cioè proprio come integrale della 1–forma di Poincaré–Cartan, ovvero come $\tilde{S} = \int (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt)$.

Eseguiamo ora il cambiamento di variabili (3.5.2), o equivalentemente il cambiamento inverso

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \ . \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \ . \quad (3.5.8)$$

È evidente che la nostra 1–forma prenderà nelle nuove variabili un altro aspetto, che si otterrà semplicemente per sostituzione di variabili, esprimendo

inoltre il differenziale $d\mathbf{q}$ in termini di $d\mathbf{Q}$, $d\mathbf{P}$ e dt .⁴¹ Si avrà dunque, per una trasformazione generica,

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dt = \mathbf{A}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \cdot d\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \cdot d\mathbf{P} + C(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) dt . \quad (3.5.9)$$

con certi coefficienti $\mathbf{A}, \mathbf{B}, C$. Corrispondentemente, le equazioni di moto, che nelle vecchie variabili avevano la forma speciale (o canonica) di Hamilton, avranno nelle nuove variabili un aspetto generico, che si potrebbe determinare esplicitamente scrivendo le equazioni di Eulero–Lagrange nelle nuove variabili (cioè calcolando la variazione $\delta\tilde{S}$ nelle nuove variabili).

Intermezzo: Aspetto delle equazioni di Hamilton in coordinate generiche. Ci si potrebbe attendere che in coordinate generiche le equazioni che si ottengono dalle originarie equazioni di Hamilton abbiano un aspetto del tutto generico. Si mostra invece che anche in coordinate generiche rimane una traccia del fatto che le equazioni avevano l'aspetto di equazioni di Hamilton nelle variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) originarie. Questo fatto è illustrato nella prima appendice di questo capitolo, dove vengono introdotti, nella maniera più elementare possibile, anche altre interessanti nozioni di calcolo tensoriale.

Se però le trasformazioni di variabili (3.5.2) avranno la proprietà specialissima che valga

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} , \quad \mathbf{B} = \mathbf{0} ,$$

allora è ovvio che anche nelle nuove variabili le equazioni avranno la speciale forma di Hamilton (3.5.3). In effetti, la condizione perché le equazioni nelle nuove variabili abbiano ancora forma di Hamilton con hamiltoniana K è molto più debole, perché basta che si abbia

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dF \quad (3.5.10)$$

dove $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è una arbitraria funzione (a valori reali) nello spazio delle fasi esteso. Ciò è dovuto al fatto che il termine dF non modifica le equazioni di Eulero–Lagrange. Infatti, esso contribuisce all'azione \tilde{S} soltanto

⁴¹Si ha qui una profonda analogia con il problema delle “trasformazioni naturali” in uno spazio, ad esempio \mathbb{R}^3 , munito di prodotto scalare (e dunque delle nozione di lunghezza l di un vettore). In presenza di un prodotto scalare, definito per ogni coppia di vettori in maniera intrinseca (cioè indipendente dalla base – ovvero dalle coordinate scelte per rappresentare i vettori), esistono delle basi “naturalì” (quelle ortonormali), e corrispondentemente delle coordinate naturali, in cui il prodotto scalare ha forma pitagorica, cioè il quadrato l^2 della lunghezza di un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ si esprime come $l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Sono allora definite le trasformazioni ortogonali (o i corrispondenti cambiamenti di variabile), come quelle che conservano tale struttura pitagorica per l^2 , ed esse sono l'analogo delle trasformazioni canoniche. Nel caso di uno spazio con prodotto scalare, l^2 mantiene la forma pitagorica sotto trasformazioni ortogonali, mentre assume forma generica (entro certi limiti) per trasformazioni generiche. Nello spazio delle fasi, le trasformazioni canoniche conservano la struttura “canonica” $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$ della 1-forma ω di Poincaré–Cartan, mentre questa assume forma generica sotto una trasformazione generica.

attraverso

$$\int_{t_0}^{t_1} dF = F(\mathbf{x}^{(1)}) - F(\mathbf{x}^{(0)}) ,$$

e dunque contribuisce a $\delta\tilde{S}$ soltanto attraverso termini al contorno che, come avevamo osservato, sono irrilevanti per le equazioni di Eulero–Lagrange.

La (3.5.10) è la caratterizzazione cercata per le trasformazioni canoniche, cioè per le trasformazioni che conservano la struttura delle equazioni di Hamilton o equivalentemente della 1–forma di Poincaré–Cartan. Essa richiede che, per ogni H , esista una funzione K tale che la forma differenziale $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - (H - K) dt$ sia un differenziale esatto. Deve cioè esistere una funzione dello spazio delle fasi (dipendente parametricamente da t), detta **funzione generatrice della trasformazione canonica**,

$$F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) ,$$

tale che, per ogni H , si abbia

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - (H - K) dt = dF , \quad (3.5.11)$$

con una opportuna K .

In effetti, questa caratterizzazione risulta essere di tipo costruttivo, e fornisce ad un tempo, quando si assegna la funzione generatrice F , sia la trasformazione canonica sia la nuova hamiltoniana K . Per mostrare come questo avvenga, cominciamo con il restringerci al caso particolare delle trasformazioni del tipo (3.5.2), per cui le variabili \mathbf{q}, \mathbf{Q} possano essere assunte come coordinate nello spazio delle fasi.⁴² Allora, pensando a \mathbf{q}, \mathbf{Q} come coordinate indipendenti ed esprimendo in maniera corrispondente il differenziale dF come

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \cdot d\mathbf{Q} + \frac{\partial F}{\partial t} dt ,$$

per confronto con la (3.5.11) si trova

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} , \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} , \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (3.5.12)$$

Naturalmente, occorrerà poi operare una inversione. Si rimanda alla discussione fatta nel capitolo sulle equazioni di Hamilton.

Abbiamo già osservato che il passaggio dallo spazio delle fasi \mathcal{F} allo spazio delle fasi esteso è del tutto simile al passaggio dallo spazio allo spaziotempo che si compie in

⁴²Il significato di questa restrizione è stato illustrato nel capitolo sulle equazioni di Hamilton. Sappiamo che per tali trasformazioni si deve avere

$$\det \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \neq 0 .$$

relatività. Si capisce così come la classe di trasformazioni canoniche si possa spontaneamente estendere a comprendere anche trasformazioni che coinvolgano davvero il tempo, cioè del tipo $(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P}, T)$. La condizione di canonicità diviene allora

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} + K dT = dF . \quad (3.5.13)$$

In altri termini, la condizione (3.5.13) garantisce che le equazioni di Hamilton (3.5.1) assumono nelle nuove variabili $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, T$ la forma

$$\frac{d}{dT}\mathbf{Q} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} , \quad \frac{d}{dT}\mathbf{P} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} .$$

Trasformazioni generali di questo tipo sono spesso impiegate ad esempio in meccanica celeste.

3.6 Il flusso hamiltoniano come famiglia di trasformazioni canoniche. L'azione come corrispondente funzione generatrice. Equazione di Hamilton–Jacobi

Vogliamo qui dimostrare una proprietà che era stata anticipata (ma non dimostrata) sia discutendo le trasformazioni canoniche prossime all'identità, sia discutendo le simmetrie dei sistemi hamiltoniani. Si tratta del fatto che il flusso⁴³ Φ_H^t indotto nello spazio delle fasi \mathcal{F} da una generica hamiltoniana H è una famiglia (dipendente parametricamente dal tempo) di trasformazioni canoniche. In effetti, si mostra anche che la corrispondente funzione generatrice (dipendente dal tempo) risulta essere determinata attraverso l'azione hamiltoniana, nel modo che ora illustriamo.

Consideriamo un sistema lagrangiano in uno spazio delle configurazioni \mathcal{C} , e una fissata lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Consideriamo poi il funzionale di azione hamiltoniana $S = \int L dt$ nel consueto spazio funzionale \mathcal{U} individuato da parametri $\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1$. Si assuma infine che in opportuno dominio di tali parametri il funzionale azione hamiltoniana ammetta un unico minimo. Ciò comporta in particolare (è questa una osservazione che ci servirà ripetutamente) che l'assegnazione dei dati (\mathbf{q}_0, t_0) e (\mathbf{q}_1, t_1) determina univocamente i vettori \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 . Infatti per ipotesi tali due coppie di dati individuano un unico estremo $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ e quindi anche la velocità $\dot{\mathbf{q}}(t)$ e il corrispondente momento $\mathbf{p}(t)$ secondo la consueta definizione. Avremo dunque

$$\mathbf{p}_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, t_0) , \quad \mathbf{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, t_1) , \quad (3.6.1)$$

⁴³Ricordiamo che Φ_H^t denota la trasformazione che invia ogni punto $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ dello spazio delle fasi nel suo evoluto $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ lungo la corrispondente soluzione, al tempo t , delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana H e dati iniziali $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$.

ed useremo anche la notazione

$$H_0 = H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t_0), \quad H_1 = H(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t_1). \quad (3.6.2)$$

Denotiamo con

$$S^*(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1)$$

il valore che il funzionale di azione hamiltoniana assume in corrispondenza del minimo individuato dalle coppie (\mathbf{q}_0, t_0) , (\mathbf{q}_1, t_1) . Si tenga ben presente che, come esplicitamente indicato dalla notazione usata, S^* è ora una funzione dei “valori al contorno” $\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1$, a differenza dell’originario funzionale S che ha come dominio lo spazio di funzioni \mathcal{U} .

Notazione: $S^* \equiv S$. Abbiamo qui introdotto due simboli distinti, da una parte per l’azione S definita nello spazio funzionale \mathcal{U} , e dall’altra per il suo minimo S^* , funzione dei parametri $\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1$. È uso comune (ad esempio nel manuale di Landau, ma anche negli articoli di Dirac e di Feynman in cui l’azione hamiltoniana venne utilizzata per una “diversa” formulazione della meccanica quantistica) denotare S^* semplicemente con S , quando dal contesto sia evidente che essa è pensata come funzione dei “parametri al bordo” $\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1$. Così faremo anche noi nel seguito.

Esercizio 2. Scrivere la funzione $S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1)$ per la particella libera e per l’oscillatore armonico. Si veda R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, Mc Graw–Hill (New York, 1965).

Intermezzo: La funzione principale di Hamilton. La funzione $S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1)$ viene spesso chiamata funzione principale (o caratteristica) di Hamilton. Nel caso dell’ottica geometrica, Hamilton si rese conto che l’analogo della funzione $S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1)$ contiene tutta la conoscenza che è sufficiente per descrivere gli strumenti ottici. Di qui passò poi alla meccanica.

Denotiamo con $\Phi_H^{t_0, t_1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ la trasformazione che manda $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ in $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$. Si mostra che la trasformazione $\Phi_H^{t_0, t_1}$ è canonica, e che la corrispondente funzione generatrice è proprio la funzione

$$-S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1)$$

(evidentemente, stiamo qui usando la notazione $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{q}_1$), $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1$). A tal fine, basta dimostrare che si ha

$$\mathbf{p}_0 = \frac{\partial(-S)}{\partial \mathbf{q}_0}, \quad \mathbf{p}_1 = -\frac{\partial(-S)}{\partial \mathbf{q}_1}. \quad (3.6.3)$$

Questo risultato è una immediata conseguenza di una formula generale che va sotto il nome di formula di Hamilton per la variazione dell’azione.

Lemma 3 (Formula di Hamilton per la variazione dell'azione) Per la funzione $S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1)$ (funzione principale di Hamilton) si ha

$$dS = \mathbf{p}_1 \cdot d\mathbf{q}_1 - H_1 dt_1 - \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0 + H_0 dt_0 . \quad (3.6.4)$$

Dimostrazione. Il contributo $\mathbf{p}_1 \cdot d\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0$ al differenziale dS è un ovvio corollario del calcolo che avevamo eseguito (confronta la sezione 3.3.1 ed in particolare l'equazione (3.3.10)) per valutare δS quando si passa da un moto $\mathbf{q}(t)$ ad un moto variato $\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$ (in cui ricordo abbiamo $\delta\mathbf{q}_1 = d\mathbf{q}_1$ e $\delta\mathbf{q}_0 = d\mathbf{q}_0$).

Infatti il calcolo produceva per δS anzitutto il termine integrale, che si annulla per moti soddisfacenti le equazioni di Lagrange, che quindi si annulla nel nostro caso. Si aveva poi il termine $\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}$ calcolato al tempo finale meno il corrispondente termine al tempo iniziale.

In particolare la (3.6.4) mostra che

$$\mathbf{p}_0 = \frac{\partial(-S)}{\partial\mathbf{q}_0} , \quad \mathbf{p}_1 = - \frac{\partial(-S)}{\partial\mathbf{q}_1} .$$

Dobbiamo ora valutare l'incremento di S quando tengo fissi i punti $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0$ iniziali e finali, mentre faccio variare i tempi, cioè dobbiamo valutare $\frac{\partial S}{\partial t_1}, \frac{\partial S}{\partial t_0}$. A tal fine consideriamo cosa avviene quando ci muoviamo tra il tempo t_1 e il tempo $t_1 + dt_1$ lungo la soluzione che passa per il punto \mathbf{q}_1 al tempo t_1 (nel caso in cui muovessimo t_0 si opera analogamente). Per la definizione stessa di S si ha evidentemente

$$dS = L dt_1 .$$

Questo però non determina il valore di $\frac{\partial S}{\partial t}$, ma piuttosto il valore di $\frac{dS}{dt}$, in quanto, lungo il movimento considerato, in quell'intervallo di tempo il punto si è spostato da \mathbf{q}_1 a $\mathbf{q}_1 + \delta\mathbf{q}_1$ con $\delta\mathbf{q}_1 = \dot{\mathbf{q}} dt_1$. D'altra parte, per il teorema di derivazione della funzione composta applicato alla funzione $S(t) = S(\mathbf{q}(t), t)$, si ha

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} ,$$

dove nell'ultima eguaglianza si è usato il fatto che i momenti coincidono con le derivate parziali di S . Ora, ricordando che $\frac{dS}{dt} = L$ si ottiene

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = -H .$$

Q.E.D.

Disponendo della formula di Hamilton per la variazione dell'azione, Lemma 3, possiamo ora ritornare al problema che ci eravamo proposti, ovvero mostrare che la trasformazione dello spazio delle fasi $\Phi_H^{t_0, t_1}$ indotta dalle soluzioni delle equazioni di Hamilton tra i tempi t_0 e t_1 è canonica, e che la corrispondente funzione generatrice è proprio $-S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1)$. A tal fine ricordiamo che, poiché abbiamo assunto che i valori al contorno (\mathbf{q}_0, t_0) e (\mathbf{q}_1, t_1) determinino un unico minimo S dell'azione, e dunque una unica

soluzione delle equazioni di Lagrange, si ha anche che tali parametri determinano univocamente le corrispondenti velocità $\dot{\mathbf{q}}_0$, $\dot{\mathbf{q}}_1$, e dunque anche i relativi momenti \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 . In altri termini, la coppia $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$ risulta essere l'evoluta al tempo t_1 della coppia $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$, pensata come dato iniziale al tempo t_0 . Inoltre, possiamo confrontare le (3.6.3) con le note formule per la trasformazione canonica generata da una funzione $F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$, ovvero

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}}$$

(evidentemente, stiamo qui usando la notazione $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{q}_1$, $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1$). Per confronto abbiamo pertanto il

Teorema 6 *La famiglia di trasformazioni*

$$\Phi_H^{t_0, t_1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

definita dalle soluzioni delle equazioni di Hamilton tra i tempi t_0 e t_1 per una fissata Hamiltoniana H , è una famiglia di trasformazioni canoniche con funzione generatrice $F = -S$, ovvero si ha

$$F(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1) = -S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1) = -\int_{t_1}^{t_0} L dt.$$

La funzione generatrice S è stata sopra definita come il valore dell'azione hamiltoniana in corrispondenza del suo punto di minimo. Risulta tuttavia che essa può anche essere determinata come soluzione di una certa equazione alle derivate parziali, che viene detta **equazione di Hamilton–Jacobi**, la quale svolge un ruolo molto importante in diversi contesti che non abbiamo qui il tempo di illustrare. Si ha la

Proposizione 1 (Equazione di Hamilton–Jacobi.) *Per fissati t_0, \mathbf{q}_0 , l'azione $S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}, t)$ soddisfa l'equazione*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0, \tag{3.6.5}$$

(che viene detta equazione di Hamilton–Jacobi).

Dimostrazione. Basta confrontare la (3.6.4), quando si ponga $t_1 \equiv t$, $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{q}$ (e si pensino fissati t_0 e \mathbf{q}_0), con l'espressione

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial S}{\partial t} dt,$$

sicché segue

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H.$$

La seconda di queste si scrive dunque $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$, e dentro H si sostituisce poi \mathbf{p} con $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}}$, come dato dalla prima relazione. **Q.E.D.**

Ad esempio, nel caso della particella nello spazio, in cui si ha

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) ,$$

e l'equazione di Hamilton–Jacobi assume la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(\mathbf{q}) = 0 .$$

Ricordiamo che la equazione di Hamilton–Jacobi fu per Schroedinger il punto di partenza euristico dal punto di vista matematico per ottenere la sua celebre equazione nel gennaio del 1926. Si veda la bellissima esposizione datane dallo stesso autore in E. Schroedinger, *An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules*, *Phys. Rev.* **28**, 1049–1070 (1926). Per le applicazioni alla meccanica si veda per esempio H. Poincaré, *Méthodes nouvelles ..*, Tomo I, Capitolo I: *Généralités et méthode de Jacobi*, mentre per l'ottica si può consultare il libro di M. Born e E. Wolf, *Principles of optics*.

3.7 Il principio di Hamilton per l' equazione di d'Alembert, come tipico esempio di una teoria di campo.

Veniamo ora al caso in cui l'equazione di Eulero–Lagrange è un'equazione alle derivate parziali, anziché alle derivate ordinarie. Ciò richiede anzitutto che la funzione incognita sia una funzione di più variabili, e consideriamo come caso prototipo quello della *corda vibrante* (si pensi alle oscillazioni trasversali), in cui l'incognita è la forma della corda per ogni valore del tempo (pensato come parametro), ovvero una funzione $u = u(x, t)$. Questo problema verrà trattato nel prossimo capitolo, e quindi il presente paragrafo dovrebbe essere letto in una seconda fase dello studio. Vedremo che nell'approssimazione di linearizzazione (piccole oscillazioni, o meglio piccole inclinazioni della corda, ovvero $u_x^2 \ll 1$), la funzione u soddisfa l'equazione di d'Alembert $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, con $c^2 = \frac{\tau}{\rho} = \text{costante}$, dove le due costanti τ e ρ sono rispettivamente la densità lineare di massa e la tensione. Ricordiamo che denotiamo

$$u_x \equiv \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} ,$$

e così via. Vedremo anche che l'energia E e la lagrangiana L saranno definite come integrali⁴⁴ in termini di una *densità di energie* e di una *densità di*

⁴⁴Si osservi come le quantità E ed L sono funzionali di $u(\cdot, t)$ e funzioni del tempo t . Infatti, per definire ciascuna di tali quantità occorre pensare assegnata la funzione

lagrangiana \mathcal{L} come

$$E = \int_0^l \epsilon \, dx, \quad L = \int_0^l \mathcal{L} \, dx \quad (3.7.1)$$

dove

$$\epsilon = \frac{1}{2}\rho(u_t^2 + c^2u_x^2), \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho(u_t^2 - c^2u_x^2). \quad (3.7.2)$$

Per analogia con la meccanica dei punti è spontaneo definire l'azione hamiltoniana S mediante un'ulteriore integrazione temporale su L , ovvero

$$S = \int L dt = \int \int \mathcal{L} \, dx dt. \quad (3.7.3)$$

Per la corda vibrante, la densità di \mathcal{L} è data dalla (3.7.2), ma più in generale si può pensare a una densità di lagrangiana \mathcal{L} dipendente anche da u , da x e da t , e dunque \mathcal{L} funzione di cinque variabili reali.

Per fissare le idee, consideriamo il caso significativo in cui siano fissati gli estremi della corda, ad esempio $u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \forall t$; inoltre, come consueto nei principi variazionali, dovranno pensarsi assegnate le "configurazioni" ai tempi estremi t_0, t_1 , ovvero $u(x, t_0) = u_0(x), u(x, t_1) = u_1(x)$. Siamo dunque condotti a considerare il dominio $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$D = \{(x, t); 0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq t_1\},$$

e a fare riferimento allo spazio funzionale

$$\mathcal{U} = \{u : D \rightarrow \mathbb{R}; u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, t_0) = u_0(x), u(x, t_1) = u_1(x)\}. \quad (3.7.4)$$

Vale il seguente

Teorema 7 *Si consideri il funzionale $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ definito da*

$$S = \int_D \mathcal{L}(x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t)) \, dx dt,$$

dove $\mathcal{L} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$. Allora i punti critici di S , ovvero le funzioni $u = u(x, t) \in \mathcal{U}$ soddisfacenti $\delta S = 0$, sono tutte e sole le soluzioni ($\in \mathcal{U}$) dell'equazione alle derivate parziali (detta di Eulero-Lagrange)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = 0. \quad (3.7.5)$$

$u = u(x, t)$, perché solo allora si può eseguire la richiesta integrazione spaziale, e si resta con una funzione del solo tempo t .

Corollario Per la corda vibrante, in cui la densità di lagrangiana \mathcal{L} è data dalla (3.7.2), l'equazione di Eulero–Lagrange è proprio l'equazione di d'Alembert

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 . \quad (3.7.6)$$

Dimostrazione. Si tratta ancora di un banale esercizio. Si tenga presente che $\delta u(x, t)$ è una funzione arbitraria annullantesi sul bordo del rettangolo $D = (0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq t_1)$, per cui cioè si ha $\delta u|_{\partial D} = 0$, e si osservi anche che $\partial_x(u + \delta u) = u_x + \partial_x \delta u$, $\partial_t(u + \delta u) = u_t + \partial_t \delta u$. Dunque, da $S = \int \int \mathcal{L} dx dt$ si ha subito

$$\delta S = \int \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \partial_x \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \partial_t \delta u \right) dx dt .$$

Eseguendo due integrazioni per parti e utilizzando le condizioni al contorno $\delta u = 0$ su ∂D per eliminare i termini finiti, si ha poi

$$\delta S = \int_D \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) \delta u \, dx dt .$$

Si applica infine il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni. **Q.E.D.**

Dovrebbe essere chiaro come si possa generalizzare questo risultato al caso di $n + 1$ dimensioni. Tipicamente interessa il caso $n = 3$, che si presenta per funzioni definite nello spaziotempo; per questo motivo usiamo qui le notazioni tipiche dei testi di relatività, in cui le componenti dei vettori hanno indici in alto anziché in basso, e gli indici sono greci anziché latini. Un punto x dello spaziotempo ha allora coordinate $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, con $x^0 = ct$, $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Si considera dunque lo spazio funzionale \mathcal{U} delle funzioni $u = u(x)$ definite in un dominio⁴⁵ $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{U} = \{u : D \rightarrow \mathbb{R}\} , \quad (3.7.7)$$

aventi valori fissati sul bordo ∂D di D . Si assume poi che sia dato un funzionale $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ che ammette densità \mathcal{L} dipendente da x , da u e dalle sue derivate prime,

$$S[u(\cdot)] = \int_D \mathcal{L}(x, u(x), u_{x^0}(x), \dots, u_{x^n}(x)) \, dx^0 \dots dx^n . \quad (3.7.8)$$

Si ha allora il

Teorema 8 L'equazione di Eulero–Lagrange per il funzionale S definito da (3.7.8) nello spazio funzionale (3.7.7) è

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \sum_{\mu=0}^n \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{x^\mu}} = 0 . \quad (3.7.9)$$

⁴⁵Ad esempio, un dominio D di tipo rettangolare: $x = \{x^\mu\} \equiv (x^0, \dots, x^n)$, $a^\mu \leq x^\mu \leq b^\mu$.

Più in generale si può avere a che fare con funzioni u definite in D ma a valori vettoriali o tensoriali, anziché scalari. In tal caso si ha un sistema di equazioni di Eulero–Lagrange, della forma (3.7.9) per ciascuna delle componenti del vettore o del tensore.

Appendici

A.1 Complementi geometrici: il sistema di equazioni differenziali associato ad una generica 1–forma; la derivata esterna (o rotore) di una 1–forma; covarianza e contravarianza

Nel paragrafo (3.5) abbiamo considerato le curve nello spazio delle fasi esteso $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \times \mathbb{R}$ che sono estremali della 1–forma di Poincaré–Cartan $\omega = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$, mostrando che esse sono soluzioni delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana H . Abbiamo anche osservato che, se si compie una trasformazione generica di coordinate, la 1–forma prenderà un aspetto diverso e dunque avranno un aspetto diverso anche le corrispondenti equazioni di Eulero–Lagrange. In questa appendice vogliamo mostrare quale aspetto assumono tali equazioni. Nel far ciò avremo occasione di illustrare diverse nozioni di calcolo tensoriale, che sono interessanti di per sé.

A.1.1 Le equazioni di Hamilton in coordinate generiche

Più in generale, consideriamo, come analogo dello spazio delle fasi \mathcal{F} , un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$ con coordinate $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ (per noi è $m = 2n$ dove n è il numero dei gradi di libertà – dimensione dello spazio delle configurazioni); seguiamo qui la consuetudine moderna del calcolo tensoriale di **denotare con un indice in alto le coordinate**. Ci interessano i movimenti $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ con t in un aperto di \mathbb{R} (possiamo pensare addirittura $t \in \mathbb{R}$). Abbiamo già osservato come in questo contesto sia molto comodo procedere come si fa in relatività quando si introduce lo spaziotempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Dunque consideriamo come spazio ambiente lo spazio delle fasi esteso $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \times \mathbb{R}$, sicché i movimenti $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ appaiono come curve nello spazio delle fasi esteso. Naturalmente, si tratta di curve particolari, ovvero di curve parametrizzabili mediante la coordinata temporale. Seguendo l’uso relativistico, denotiamo con un indice greco le coordinate nello spazio delle fasi esteso; più precisamente, denoteremo $x^\sigma \equiv t$, e allora un punto dello spazio delle fasi esteso avrà coordinate x^μ , $\mu = 0, 1, \dots, m$, mentre riserveremo una lettera latina per le coordinate relative allo spazio delle fasi: x^i , $i = 1, \dots, m$.

Una generica 1-forma è allora una espressione del tipo

$$\omega = \sum_{\mu=0}^m a_{\mu} dx^{\mu} \equiv \sum_{i=1}^m a_i dx^i + a_0 dt . \quad (\text{A.1.1})$$

Abbiamo qui seguito l'uso comune di **denotare con un indice in basso le componenti di una forma differenziale**. La ragione, legata al modo covariante di trasformarsi delle componenti, verrà spiegata più sotto.

Il problema che ci poniamo ora è di mostrare quale aspetto assumono le equazioni per gli estremali del funzionale S associato alla 1-forma ω , ovvero per il funzionale

$$S = \int \left(\sum_{\mu=0}^m a_{\mu} dx^{\mu} \right) \equiv \int \left(\sum_{i=1}^m a_i dx^i + a_0 dt \right) . \quad (\text{A.1.2})$$

Si ha il seguente

Teorema 9 *Data la 1-forma ω (A.1.1), si considerino le quantità*

$$a_{\mu\nu} = \partial_{\mu} a_{\nu} - \partial_{\nu} a_{\mu} , \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, m \quad \left(\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) . \quad (\text{A.1.3})$$

Allora gli estremali per l'azione S definita da (A.1.2) sono le soluzioni del sistema di equazioni differenziali (analoghe delle equazioni di Hamilton)⁴⁶

$$\sum_k a_{ik} \dot{x}^k + a_{i0} = 0 , \quad i = 1, \dots, m . \quad (\text{A.1.4})$$

Da tali equazioni segue anche l'equazione (analoga del teorema dell'energia)

$$\sum_i a_{i0} \dot{x}^i = 0 . \quad (\text{A.1.5})$$

Il sistema di equazioni (A.1.4) ed (A.1.5) (di cui l'ultima conseguenza delle prime) può essere compendiato nell'unico sistema

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} dx^{\nu} = 0 , \quad \mu = 0, 1, \dots, m . \quad (\text{A.1.6})$$

Dimostrazione. La dimostrazione delle (A.1.4) è un esercizio che costituisce una banale generalizzazione del procedimento seguito per dimostrare che il funzionale

⁴⁶In forma esplicita,

$$\sum_k (\partial_i a_k - \partial_k a_i) \dot{x}^k + \partial_1 a_0 - \partial_0 a_i = 0 .$$

$S = \int (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt)$ ha per estremali le soluzioni delle equazioni di Hamilton. Basta osservare che si ha ora $S = \int \tilde{L} dt$, dove⁴⁷

$$\tilde{L} = \sum_k a_k \dot{x}^k + a_0 ,$$

e si procede esattamente come per la forma di Poincaré–Cartan.⁴⁸ L’analogo del teorema dell’energia si ottiene ancora per analogia, cioè moltiplicando ciascuna delle equazioni (A.1.4) per \dot{x}^i e sommando su i (usando anche la antisimmetria della matrice a_{ik}), sicché

$$\sum_{ik} a_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 .$$

Infine, la (A.1.6) è una espressione del fatto che una relazione del tipo $\alpha dx + \beta dt = 0$ è equivalente alla relazione $\alpha \dot{x} + \beta = 0$. **Q.E.D.**

Esercizio. Dedurre direttamente le equazioni (A.1.6).

Si pensi a una curva nello spazio delle fasi esteso come rappresentata in forma parametrica, ovvero come una funzione $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ dove λ è un parametro reale. Si osserva allora che l’azione ha ancora la forma $S = \int \tilde{L} d\lambda$. dove però ora

$$\tilde{L} = \sum_\mu a_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} ,$$

e si procede poi come di consueto.

In questo contesto, il caso della forma di Poincaré–Cartan risulta essere il caso particolare in cui $m = 2n$ e le coordinate sono

$$(x^1, \dots, x^{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) ,$$

mentre i coefficienti della 1–forma sono

$$(a_1, \dots, a_{2n}) = (p_1, \dots, p_n, 0, \dots, 0) , \quad a_0 = -H .$$

⁴⁷Poiché nella (A.1.4) l’indice libero è i mentre l’indice muto (cioè sul quale si somma, ingl. *dummy*) è k , conviene prendere anche qui k come indice muto.

⁴⁸Le equazioni di Eulero–Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} - \partial_i \tilde{L} = 0 \quad \left(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} , \quad \partial_t \equiv \partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} \right) .$$

D’altra parte si ha

$$\partial_i \tilde{L} = \sum_k (\partial_i a_k) \dot{x}^k + \partial_i a_0 , \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} = a_i ,$$

e anche, essendo $a_i = a_i(t, x)$,

$$\frac{d}{dt} a_i = \sum_k (\partial_k a_i) \dot{x}^k + \partial_0 a_i .$$

Risulta allora che in tali coordinate la matrice dei coefficienti $a_{\mu\nu}$ è data, per la parte non temporale, da

$$a_{ik} = \mathbb{E}_{ik} , \quad (\text{A.1.7})$$

dove \mathbb{E} è la matrice simplettica introdotta nel capitolo sulle equazioni di Hamilton. Invece, gli altri coefficienti non nulli sono dati da

$$a_{k0} = \frac{\partial H}{\partial x^k} ,$$

e, corrispondentemente, le equazioni associate sono le equazioni di Hamilton.

A.1.2 La matrice $a_{\mu\nu}$ come “covariante bilineare”. Covarianza e contravarianza.

Abbiamo dunque mostrato come i coefficienti a_μ definenti la 1-forma ω attraverso la (A.1.1) determinino in maniera naturale la matrice $a_{\mu\nu}$. Questa, a sua volta, definisce il sistema di equazioni differenziali che determina gli estremali della azione $S = \int \omega$ definita attraverso ω . Vedremo più sotto come la matrice $a_{\mu\nu}$ descriva un ente geometrico di notevole interesse, che Levi Civita chiama il **rotore della 1-forma** ω , e che modernamente viene piuttosto chiamato la **derivata esterna** di ω e denotato con $d\omega$. Nella prima metà del secolo scorso, la matrice $a_{\mu\nu}$ veniva invece chiamata (ad esempio da Levi Civita e da Whittaker) il **covariante bilineare associato al covariante lineare** a_μ . Spieghiamo ora la ragione di tale terminologia.

Cominciamo con il termine “covariante”. Si tratta del problema generale di comprendere in quale modo si trasformano i coefficienti delle forme differenziali o le componenti dei vettori (o di altri enti geometrici) quando si cambiano le coordinate. Non vi è qui alcuna necessità di considerare il ruolo speciale del tempo. e consideriamo dunque un aperto (una carta) U di \mathbb{R}^n con assegnate coordinate x^1, \dots, x^n . Una 1-forma ha dunque l'aspetto generale

$$\omega = \sum_i a_i dx^i \equiv a_i dx^i \quad (\text{A.1.8})$$

con coefficienti a_i (detti anche *componenti* della 1-forma).

La cosiddetta convenzione di Einstein. Cominciamo da qui a usare la cosiddetta convenzione di Einstein: la sommatoria su due indici ripetuti, uno in alto e l'altro in basso, viene sottintesa. Si tratta di una cosa assolutamente irrilevante, che può essere utile per semplificare la scrittura delle formule. Per un certo numero di volte, useremo congiuntamente le due notazioni (con e senza la sommatoria esplicitamente indicata).

Ci chiediamo ora come cambiano i coefficienti quando si esegue un cambiamento (invertibile) di coordinate, passando a nuove coordinate x'^i . Se dunque

$$x^i = x'^i(x'^1, \dots, x'^n) , \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.1.9})$$

è la trasformazione di coordinate, si avrà

$$\omega = \sum_i a'_i dx'^i$$

con opportune nuove componenti a'_i , e ci chiediamo come esse sono connesse alle componenti originali a_i .

Un analogo problema si pone per le componenti dei vettori. Ricordiamo che un vettore è definito, in una maniera tra le più profonde, attraverso la velocità di un movimento. Sia dunque un movimento $x^i = x^i(t)$ e

$$v^i(t) = \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

la corrispondente velocità. Si ha il

Lemma 4 *Siano a_i ($i = 1, \dots, n$) le componenti di una 1-forma $\omega = \sum_i a_i dx^i$ e v^i ($i = 1, \dots, n$) le componenti di un vettore, relativamente a una carta con coordinate (x^1, \dots, x^n) , e si consideri un cambiamento di coordinate (A.1.9). Allora la 1-forma e il vettore hanno nuove componenti a'_i , v'^i legate alle vecchie dalle relazioni*

$$a'_i = \sum_k a_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} . \tag{A.1.10}$$

$$v'^i = \sum_k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} v^k . \tag{A.1.11}$$

Infine, la quantità $a_i v^i \equiv \sum_i a_i v^i$ è un invariante, ovvero il suo valore non dipende dalle coordinate scelte, ovvero si ha

$$a'_i v'^i = a_i v^i \quad \left(\sum_i a'_i v'^i = \sum_i a_i v^i \right) . \tag{A.1.12}$$

Dimostrazione. Le leggi di trasformazione delle componenti dei covettori e dei vettori sono una assolutamente banale applicazione della formula di derivata di funzione composta. Per quanto riguarda le componenti della 1-forma, si prende la definizione (A.1.8) $\omega = \sum_i a_i dx^i$ e si usa

$$dx^i = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k .$$

In tal modo si ottiene

$$\omega = \sum_k a'_k dx'^k$$

con opportuni a'_k . La formula (A.1.10) si ottiene scambiando i nomi degli indici i , k su cui si somma (indici muti), che sono irrilevanti.

Analogamente si procede per ottenere la formula per le componenti del vettore, si ha (ricordando la *chain rule*)

$$v'^i = \frac{dx'^i}{dt} = \sum_k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} = \sum_k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} v^k .$$

Per quanto riguarda l'ultima relazione (A.1.12), essa è un immediato corollario di una relazione generale che svolge un ruolo fondamentale nel calcolo tensoriale, ovvero la identità

$$\sum_i \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} = \delta_l^k , \quad (\text{A.1.13})$$

dove δ_l^k è il simbolo di Kronecker, uguale ad 1 se $k = l$ e altrimenti uguale a 0. Questa si ottiene nel modo seguente. Nel cambiamento di variabili (A.1.9), che esprime le variabili x^k in funzione delle x'^j , si pensano a loro volta le x'^j espresse in funzione delle x^l , e si usa la *chain rule* congiunta con la

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^l} = \delta_l^k .$$

La (A.1.12) si ottiene allora dalle (A.1.10) e (A.1.11) sostituendo nella seconda la variabile muta k con l .

Q.E.D.

Si noti che la legge di trasformazione delle componenti a_i della 1-forma è ben diversa da quella che regge la trasformazione delle componenti v^i dei vettori. Si usa dire che le componenti delle velocità (o più in generale dei vettori) cambiano in maniera **contravariante**, mentre i coefficienti delle 1-forme (dette anche componenti dei covettori) cambiano in maniera **covariante**. Il fatto che le due n -uple di componenti si trasformano nei due modi diversi sopra indicati ha una fondamentale conseguenza:

Esercizio. Si consideri la 1-forma $\omega = \sum_i a_i dx^i$ ($\equiv a_i dx^i$) e la corrispondente matrice

$$a_{ik} = \partial_i a_k - \partial_k a_i .$$

Siano a'_i i coefficienti della forma ω nelle coordinate x'^i e

$$a'_{ik} = \partial'_i a'_k - \partial'_k a'_i \quad (\partial'_i \equiv \frac{\partial}{\partial x'^i}) .$$

Allora si ha

$$a'_{ik} = \sum_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} a_{lm}$$

Questa proprietà spiega il fatto che la matrice a_{ik} viene detta “covariante”: gli elementi della matrice si trasformano come il prodotto $a_i a_k$

di componenti di una 1-forma (che, come sappiamo, si trasformano per covarianza).⁴⁹

A.2 Il teorema di Stokes, la circuitazione della forma di Poincaré–Cartan e la dimostrazione del Lemma di Hamilton sulla variazione dell'azione

In questa appendice vogliamo dare una dimostrazione piú geometrica del Lemma 3 di variazione dell'azione, che metta in luce alcuni aspetti geometrici interessanti, che meritano di essere conosciuti. Essa ha anche il merito di farsi praticamente senza calcoli, una volta capiti i presupposti geometrici. Essa si basa sul fatto che la circuitazione della forma di Poincaré–Cartan $\omega = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - Hdt$, su un opportuno circuito Γ è nulla. Questa dimostrazione si potrebbe effettuare con un calcolo diretto, che risulterebbe però poco espressivo. Non si capirebbe infatti la ragione per cui la circuitazione è nulla, e il risultato apparirebbe una mera coincidenza. Ricordiamo infatti che la circuitazione di un campo vettoriale è nulla su un arbitrario circuito (curva chiusa) se il rotore del campo risulta nullo; ma il rotore della forma di Poincaré–Cartan non è affatto nullo, come spiegato nell'Appendice precedente, per cui sembra una fortuita coincidenza l'aver trovato un circuito lungo cui la circuitazione si annulli. Invece non è così, ed esiste una ragione profonda per cui la circuitazione si annulla. Per comprenderla bisogna però preliminarmente introdurre in modo piú geometrico il concetto di *derivata esterna* di una forma differenziale (cioè la generalizzazione di quello che è il concetto di rotore nel caso ordinario) e fornire la corrispondente generalizzazione del Teorema di Stokes.

A.2.1 La dimostrazione del Lemma di Hamilton per via geometrica

Vogliamo dunque mostrare la formula

$$dS = \mathbf{p}_1 \cdot d\mathbf{q}_1 - H_1 dt_1 - \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0 + H_0 dt_0 .$$

Si parte dalla osservazione fatta nel testo che l'assegnazione delle coppie (\mathbf{q}_0, t_0) e (\mathbf{q}_1, t_1) determina un unico movimento $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ e quindi anche $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$. Pertanto resta determinato il movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \equiv (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ nello spazio delle fasi \mathcal{F} , e anche la corrispondente traiettoria nello spazio delle fasi esteso $\tilde{\mathcal{F}}$, che denoteremo con γ . Siano $A_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0)$ e $A_1 =$

⁴⁹NOTA PER GLI AUTORI. Da aggiungere quanto segue. Forme bilineari. Regola mnemonica per il i cambiamenti. Dare la forma standard $a_{ik} = E_{ik}$ per i sistemi hamiltoniani, e la corrispondente forma orlata.

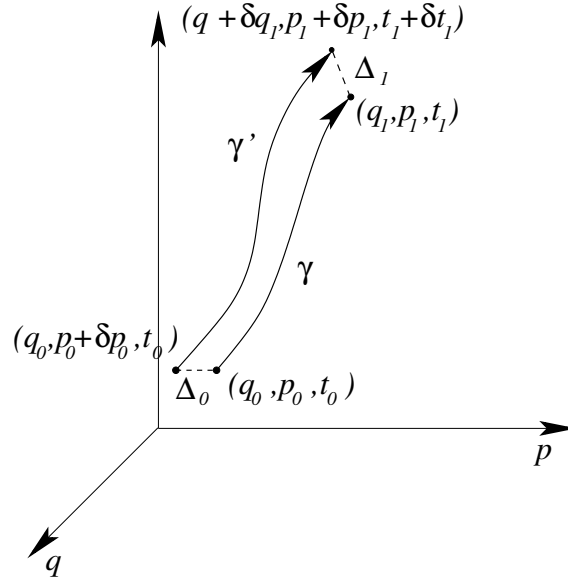


Figura A.10: Il circuito nello spazio delle fasi estese per il calcolo del differenziale dell'azione.

$(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t_1)$ i corrispondenti punti iniziale e finale nello spazio delle fasi esteso \mathcal{F} . Poiché lungo le soluzioni si ha

$$L dt = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt ,$$

si ha anche

$$S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{\gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) .$$

Se ora, tenendo fissa la coppia iniziale (\mathbf{q}_0, t_0) , spostiamo la coppia finale mediante incrementi $(d\mathbf{q}_1, dt_1)$, si dovrà considerare una soluzione differente, diciamo $\mathbf{q}(t) + d\mathbf{q}(t)$, delle equazioni di Lagrange. In particolare, pur essendo $\mathbf{q}_0' = \mathbf{q}_0$, $t_0' = t_0$ si avrà un ben definito momento iniziale $\mathbf{p}_0' \neq \mathbf{p}_0$ (e ovviamente un altro ben definito momento finale \mathbf{p}_1'). Denotiamo con γ' la corrispondente curva variata nello spazio delle fasi esteso (con estremi $A_0' = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0', t_0)$, $A_1' = (\mathbf{q}_1 + d\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 + d\mathbf{p}_1, t_1 + dt_1)$) (vedi figura A.10). L'incremento dell'azione sarà quindi dato da

$$dS = \int_{\gamma'} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) - \int_{\gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) .$$

Indichiamo con Δ_1 il segmento che unisce il punto finale originario $A_1 = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t_1)$ con il punto finale variato $A_1' = (\mathbf{q}_1 + d\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 + d\mathbf{p}_1, t_1 + dt_1)$. Indichiamo anche con Δ_0 il segmento che unisce il punto iniziale originario

$A_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0)$ con il punto iniziale variato $A_0' = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0', t_0)$. Infine, denotiamo con Γ il corrispondente circuito (cammino chiuso) orientato come γ' , ovvero

$$\Gamma = \gamma' \cup (-\Delta_1) \cup (-\gamma) \cup \Delta_0$$

(si intende che $-\gamma$ è il cammino coincidente con γ , ma orientato in senso opposto, e analogamente per $-\Delta_1$). Si osservi che il cammino Γ è il contorno di un dominio bidimensionale che è l'unione di curve (monodimensionali) soluzioni delle equazioni di Hamilton.⁵⁰ Infatti, ogni punto della curva dei dati iniziali Δ_0 dà luogo a una curva-soluzione che termina in un punto della curva finale Δ_1 .

Si ha ora la proprietà (vedi il Lemma seguente) che per domini di tale tipo la circuitazione della forma di Poincaré–Cartan lungo il circuito Γ risulta nulla,

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) = 0 .$$

Osservando anche che il tratto dovuto al segmento Δ_0 non contribuisce all'integrale,

$$\int_{\Delta_0} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) = 0 ,$$

(perché su Δ_0 si ha $d\mathbf{q} = 0$, $dt = 0$), segue pertanto immediatamente

$$dS = \int_{\Delta_1} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) .$$

Infine, applicando il Teorema della Media, e limitandosi alla parte principale dell'incremento (cioè al differenziale). si trova

$$dS = \mathbf{p}_1 \cdot d\mathbf{q}_1 - H_1 dt_1 ,$$

cioè la tesi, per quanto riguarda la variazione della coppia finale (\mathbf{q}_1, t_1) . Per quanto riguarda la variazione della coppia iniziale, la dimostrazione procede in maniera del tutto analoga, scegliendo adeguatamente i cammini.

Dunque la dimostrazione di tipo geometrico appena data riposa sul fatto che la circuitazione della forma di Poincaré–Cartan $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$ sul circuito Γ scelto risulta nulla. Notiamo che invece la circuitazione lungo un circuito generico nello spazio delle fasi esteso non è nulla, perché la forma di Poincaré–Cartan non ammette potenziale (non è il differenziale di nessuna funzione). Questa è la differenza che sussiste tra il caso che qui stiamo trattando e il caso ad esempio delle forze conservative.

⁵⁰Nello spazio delle fasi esteso, le analoghe delle equazioni di Hamilton sono le equazioni

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} , \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} , \quad \dot{t} = 1 .$$

Ricordiamo che un campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ in \mathbb{R}^3 si dice conservativo se il lavoro $\int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ lungo un *qualsunque* circuito (cammino chiuso) Γ è nullo. In tal caso l'energia potenziale $V(\mathbf{x})$ viene definita come il lavoro (cambiato di segno) compiuto lungo un qualunque cammino che porta da un punto fissato ad \mathbf{x} . La relazione $\mathbf{F} = -\text{grad } V$ viene poi dimostrata proprio con un procedimento analogo a quello seguito sopra. La differenza sta nel fatto che, nel caso delle forze conservative, sono arbitrari i due cammini scelti per andare dal punto iniziale fissato A_0 al punto finale A_1 . Nel caso presente, (oltre alla complicazione di dovere considerare due diversi punti iniziali A_0 ed A_0') la differenza sostanziale consiste nel fatto di dovere considerare cammini non generici, bensì aventi la speciale proprietà di minimizzare l'azione.

Enunciamo ora il Lemma richiesto per la dimostrazione del teorema precedente.

Lemma 5 *Nello spazio delle fasi esteso $\tilde{\mathcal{F}}$, sia Γ un circuito (curva chiusa) che è bordo di una superficie bidimensionale avente la speciale proprietà di essere unione di curve soluzioni delle equazioni di Hamilton. Allora è nulla la circuitazione lungo Γ della forma di Poincaré–Cartan:*

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) = 0 .$$

La dimostrazione è rimandata piú avanti, perché essa si basa sul teorema di Stokes (la circuitazione è eguale al flusso del rotore) in \mathbb{R}^n , e richiede dunque l'introduzione di un concetto nuovo, ovvero il **differenziale di una 1-forma**, detto anche **rotore di una forma differenziale**, in \mathbb{R}^n . Come vedremo esso coincide con il covariante bilineare, introdotto nell'Appendice precedente.

A.2.2 Derivata (o rotore) di una forma differenziale e Teorema di Stokes

Cominciamo con un esempio semplice. Data una qualunque funzione F a valori reali con dominio su una certa varietà (ad esempio, lo spazio delle fasi esteso), l'incremento $F(P) - F(Q)$ può essere calcolato nel modo seguente. Si prende una curva \widehat{QP} qualunque che congiunge i due punti P e Q , e allora si ha $F(P) - F(Q) = \sum_j F(\mathbf{x}_{j+1}) - F(\mathbf{x}_j)$, dove gli \mathbf{x}_j sono una successione di punti sulla curva, con $\mathbf{x}_0 = Q$ e $\mathbf{x}_n = P$. Infatti la sommatoria è quella che si chiama una *sommatoria telescopica*, e tutti i termini si elidono tranne il primo e l'ultimo. Se prendiamo i punti sufficientemente fitti, allora l'incremento $F(\mathbf{x}_{j+1}) - F(\mathbf{x}_j)$ è ben approssimato dal suo sviluppo di Taylor al primo ordine $\text{grad } F \cdot d\mathbf{x}_j$ (con $d\mathbf{x}_j \equiv \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j$), per cui ha

$$F(P) - F(Q) \simeq \sum_j \text{grad } F \cdot d\mathbf{x}_j \rightarrow \int_{\widehat{QP}} dF .$$

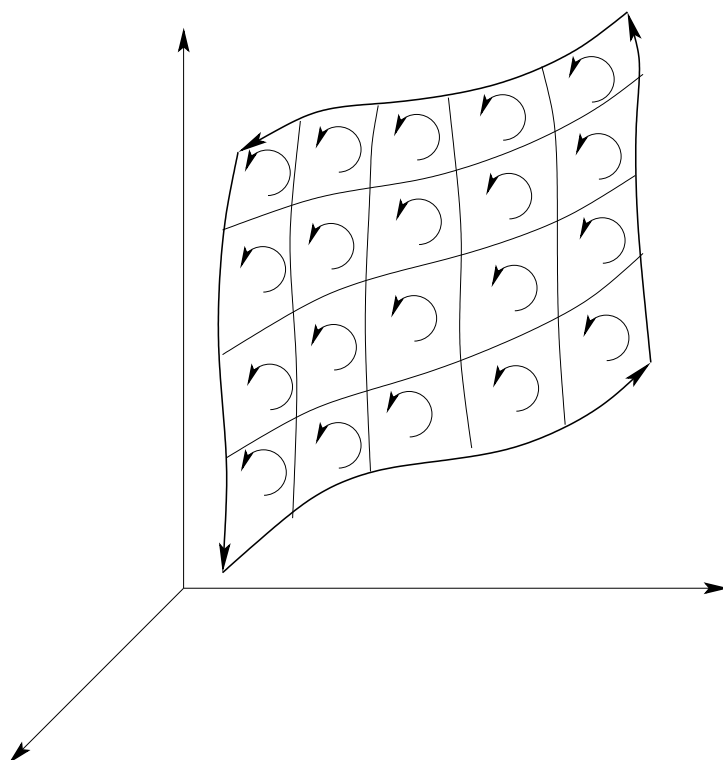


Figura A.11: La circuitazione lungo γ come somma di circuitazioni elementari.

Mediante questa formula la differenza dei valori di F agli estremi (o bordi) della curva viene espressa attraverso i valori che la sua "derivata" dF assume nei punti all'interno della curva stessa.

Ora, se abbiamo la circuitazione di una forma differenziale⁵¹ $\omega = \sum F_i dx^i$ lungo una linea chiusa (circuito) γ di una data varietà, ci si domanda se non si può in modo analogo esprimerla attraverso i valori che una sua derivata (da definirsi) assume nei punti "all'interno" del circuito (cioè nei punti di una superficie bidimensionale Σ di cui il circuito γ sia il bordo – ciò che si denota con $\gamma = \partial\Sigma$). Il teorema di Stokes fornisce una risposta a questa domanda. L'idea base nasce dall'osservazione che, analogamente al fatto che due punti costituiscono il "bordo" di una curva, così una linea chiusa γ costituisce il "bordo" di una superficie, diciamo Σ , ovvero, come si scrive, si

⁵¹Per consistenza con le notazioni tensoriali (che noi useremo ad esempio nel secondo capitolo di relatività), denotiamo qui con x^i anziché con x_i le componenti dei vettori; le componenti di una forma, come le quantità F_i , hanno invece, coerentemente indici in basso.

ha $\gamma \equiv \partial\Sigma$.⁵² Se ora dividiamo la superficie Σ in tante areole Σ_i , si ottiene

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \sum_i \oint_{\partial\Sigma_i} \omega ,$$

perché la somma a secondo membro è una sorta di somma telescopica (vedi la figura A.11). Infatti il contributo che viene da un lato comune a due areole si annulla, perché esso viene percorso due volte in versi opposti; nella sommatoria rimangono dunque solo i contributi dei lati che giacciono sul bordo $\gamma \equiv \partial\Sigma$, e da questo segue la formula.

Per procedere oltre bisogna ora capire come esprimere analiticamente il bordo di ogni areola elementare $\partial\Sigma_i$. Per far ciò, consideriamo una parametrizzazione qualunque di Σ , di modo che questa risulti l'immagine di una funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, s)$ con un dominio $D \in \mathbb{R}^2$ e valori nello spazio da noi considerato (è questa la *formula di immersione* discussa nel capitolo sulle equazioni di Lagrange: prime nozioni della teoria locale delle superfici). La divisione di Σ in areole, può essere allora ottenuta mediante la corrispondente divisione di D in rettangolini di lati $\Delta t, \Delta s$; anzi, tali lati li prendiamo così piccoli che l'areola si possa considerare ben approssimata dal parallelogramma di lati $\mathbf{u}\Delta t, \mathbf{v}\Delta s$. Qui abbiamo denotato con $\mathbf{u} = \partial_t \mathbf{x}$ e $\mathbf{v} = \partial_s \mathbf{x}$ i corrispondenti “vettori coordinati” (con $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ e analogo per ∂_s), esattamente come essi erano stati definiti nei richiami di geometria nel capitolo sulle equazioni di Lagrange). Se denotiamo con M_1, M_2, M_3, M_4 i punti medi dei quattro lati, disposti in modo tale che (si veda la figura A.12)

$$M_3 - M_1 = \mathbf{v} \Delta s , \quad M_2 - M_4 = \mathbf{u} \Delta t , \quad (\text{A.2.1})$$

avremo in prima approssimazione (per le notazioni, si veda la spiegazione qui sotto)

$$\oint_{\partial\Sigma_i} \omega \simeq (\omega(\mathbf{u})|_{M_1} - \omega(\mathbf{u})|_{M_3})\Delta t + (\omega(\mathbf{v})|_{M_2} - \omega(\mathbf{v})|_{M_4})\Delta s + o(\Delta t \Delta s) . \quad (\text{A.2.2})$$

Spiegazione della notazione. Ricordiamo che, per definizione, una 1-forma differenziale ω non è altro che una espressione del tipo

$$\omega \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \equiv F_1 dx^1 + \dots + F_n dx^n$$

e che l'integrale $\int_\gamma \omega$ della forma ω lungo un cammino γ è definito nel modo seguente. Anzitutto si parametrizza il cammino γ con una funzione (formula di immersione) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ (con $t_0 \leq t \leq t_1$), sicché ad ogni tempo t è nota anche la velocità $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$. Allora si definisce semplicemente

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}|_{\mathbf{x}(t)} \cdot \mathbf{v}(t) dt ,$$

⁵²Questo però non è sempre vero: esistono esempi di curve chiuse che non sono il bordo di alcuna superficie. Ciò dipende dalla natura topologica dello spazio ambiente che si considera. Un esempio è riportato alla fine di questa appendice.

dove $F_i \equiv F_i|_{\mathbf{x}}$ è la i -esima componente di F valutata nel punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Questa espressione viene anche riscritta nella forma

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{t_0}^{t_1} \omega(\mathbf{v}(t))|_{\mathbf{x}(t)} dt .$$

In altri termini,

$$\omega(\mathbf{v})|_{\mathbf{x}} = \mathbf{F}|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = \sum_i F_i|_{\mathbf{x}} v^i .$$

In tal modo si mette in luce che ω dipende dal posto (cioè da \mathbf{x}) e poi che essa viene applicata a un vettore (nel nostro caso, il vettore velocità \mathbf{v}), che è un vettore tangente al cammino γ proprio nel punto \mathbf{x} occupato al tempo t . Nella formula (A.2.2), si ha appunto una scrittura di questo tipo, relativa a una approssimazione dell'integrale mediante una somma di Riemann, e alla considerazione di un solo termine della somma di Riemann (relativo a ciascuno dei quattro lati del rettangolo considerato). Più precisamente, si deve pensare che la forma ω nel punto \mathbf{x} sia applicata al vettore $\mathbf{v}\Delta t$. Ma, poiché la forma è *lineare*, per definizione si ha $\omega(\mathbf{v}\Delta t) = \Delta t \omega(\mathbf{v})$.

In virtù delle relazioni (A.2.1), sviluppando in serie di Taylor al prim'ordine i termini al membro di destra si otterrà:⁵³

$$\oint_{\partial\Sigma_i} \omega \simeq (\mathbf{u} \cdot \nabla\omega(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla\omega(\mathbf{u}))\Delta t\Delta s + O(\Delta t\Delta s) . \quad (\text{A.2.3})$$

In quest'ultima formula, il primo termine del membro di destra è il termine con la "derivata" che andavamo cercando. Sommando i termini relativi a tutte le areole otteniamo

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \sum_i (\mathbf{u}_i \cdot \nabla\omega(\mathbf{v}_i) - \mathbf{v}_i \cdot \nabla\omega(\mathbf{u}_i))\Delta t\Delta s + O(\Delta t\Delta s)$$

e passando al limite per $\Delta t, \Delta s \rightarrow 0$ si trova il teorema di Stokes nella forma

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \iint_D dt ds (\mathbf{u} \cdot \nabla\omega(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla\omega(\mathbf{u})) , \quad (\text{A.2.4})$$

e si è quindi espresso il valore della circuitazione come l'integrale su di una superficie di una certa quantità.

Resta da capire in concreto a quale oggetto geometrico corrisponda l'espressione $d\omega \equiv \mathbf{u} \cdot \nabla\omega(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla\omega(\mathbf{u})$, e quale espressione essa assuma quando si fissi una carta nella nostra varietà. Si vede subito che $d\omega$ agisce su di una coppia di vettori tangenti \mathbf{u}, \mathbf{v} , a produrre un numero reale, e che il risultato dipende in modo lineare da ciascuno di essi (perché la 1-forma ω è per definizione lineare). Abbiamo quindi a che fare con un funzionale

⁵³Denotiamo

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \equiv \mathbf{u} \cdot \text{grad} \equiv u^1 \partial_1 + \dots + u^n \partial_n \equiv u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \dots + u^n \frac{\partial}{\partial x^n} .$$

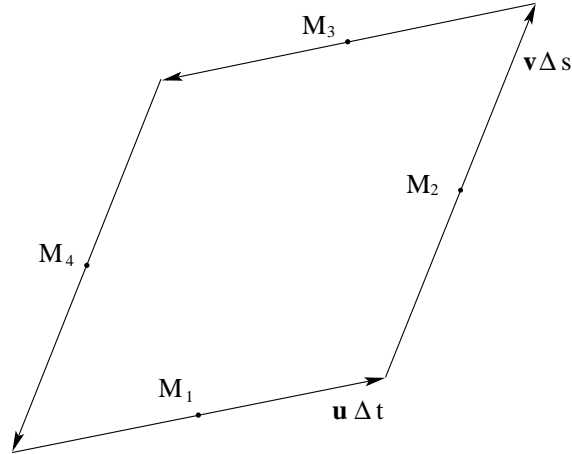


Figura A.12: Contributo alla circuitazione totale dovuta all'areola Σ_i .

bilineare definito sullo spazio tangente, in un certo modo simile alla metrica, la quale anche agisce su ogni coppia di vettori, associando ad essa il corrispondente prodotto scalare. Ma mentre il prodotto scalare è simmetrico, abbiamo ora a che fare con un funzionale lineare antisimmetrico, il cui valore cioè cambia di segno scambiando \mathbf{u} con \mathbf{v} . Si dice in tal caso che si è in presenza di una **forma bilineare**. La forma $d\omega$, viene detta **derivata esterna** della forma ω o anche **rotore** di ω .

Per calcolare l'espressione concreta che $d\omega$ assume in un fissato sistema di coordinate, procediamo nel modo seguente: siano F_i le componenti della forma ω , nel senso che $\omega = \sum F_i dx^i$, e siano u^j le componenti di \mathbf{u} , e v^i le componenti di \mathbf{v} . Allora si ha

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega(\mathbf{v}) = \sum_i \left(\sum_j u^j \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \right) v^i, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \omega(\mathbf{u}) = \sum_i \left(\sum_j v^j \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \right) u^i,$$

da cui segue

$$d\omega = \sum_i \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x^j} (u^j v^i - v^j u^i). \quad (\text{A.2.5})$$

Questa formula fornisce l'espressione che stavamo cercando.

Questa formula viene solitamente riscritta in una forma più espressiva introducendo le 2-forme $dx^j \wedge dx^i$ definite mediante la relazione

$$dx^j \wedge dx^i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^j v^i - v^j u^i . \quad (\text{A.2.6})$$

Si può mostrare che queste forme sono una base nello spazio delle forme bilineari. Dunque la relazione (A.2.5) si scrive anche come

$$d\omega = \sum_i \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i , \quad (\text{A.2.7})$$

che è l'espressione standard che si trova nei libri di geometria. Un altro modo in cui la relazione (A.2.5) si può scrivere, è il seguente:

$$d\omega = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j} - \frac{\partial F_j}{\partial x^i} \right) u^j v^i , \quad (\text{A.2.8})$$

che si ottiene scambiando l'indice i con j nella somma contenente i termini $-v^j u^i$ (si ricordi che gli indici su cui si somma sono "muti" – o *dummy*). Questa è la forma del rotore più familiare ai fisici, e mostra in maniera del tutto evidente che, se $\omega = \sum_i F_i dx^i$, per aversi $d\omega = 0$ deve essere $\frac{\partial F_i}{\partial x^j} - \frac{\partial F_j}{\partial x^i} = 0$.

L'espressione (A.2.7) mostra che la regola per calcolare $d\omega$, se $\omega = \sum_i F_i dx^i$, è la seguente:

- 1) Si usa il differenziale con le consuete regole (linearità, regola di Leibniz per il prodotto); pertanto si ha anzitutto

$$d \sum_i F_i dx^i = \sum_i [dF_i dx^i + F_i d dx^i] ,$$

e poi il calcolo del differenziale di una funzione viene eseguito nel modo consueto, sicché

$$dF_i = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x^j} dx^j .$$

Si ha però l'avvertenza di scrivere, per due generiche funzioni f e g ,

$$df dg \equiv df \wedge dg ,$$

- 2) Si usa poi la regola fondamentale per l'applicazione successiva di due operatori d

$$dd = 0 \quad (\text{ad esempio } d dx^i = 0) .$$

- 3) Infine si usa la proprietà di antisimmetria .

$$dx^j \wedge dx^i = - dx^i \wedge dx^j$$

insieme con la proprietà definitoria (A.2.6)

$$dx^j \wedge dx^i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^j v^i - v^j u^i .$$

se u^j e v^i sono le componenti dei vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} .

Ora, quando abbiamo una 1-forma ω e vogliamo definirne l'integrale lungo una curva γ (integrale che viene denotato con $\int_{\gamma} \omega$), abbiamo già ricordato che dobbiamo anzitutto scegliere una parametrizzazione $\mathbf{x}(t)$ della curva, e allora l'integrale viene definito mediante l'integrale (inteso nel senso consueto)

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{t_0}^{t_1} \omega(\dot{\mathbf{x}}(t))|_{\mathbf{x}(t)} dt .$$

Si dimostra poi che il valore dell'integrale non dipende dalla parametrizzazione scelta. Analogamente, quando si ha una 2-forma ω , se ne definisce l'integrale su di una superficie Σ scegliendo anzitutto per Σ una parametrizzazione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, s)$, con $(t, s) \in D \subset \mathbb{R}^2$, e definendo

$$\int_{\Sigma} \omega := \int_D \omega(\partial_t \mathbf{x}, \partial_s \mathbf{x})|_{\mathbf{x}(t,s)} dt ds . \quad (\text{A.2.9})$$

Un calcolo non particolarmente istruttivo mostra che anche questa definizione non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Il teorema di Stokes, che ora enunciamo, mostra che questa definizione è molto significativa, perchè è la generalizzazione del concetto di flusso attraverso una superficie di cui si ha una nozione intuitiva nel caso di \mathbb{R}^3 . Usando la terminologia introdotta, la formula (A.2.4) dedotta più sopra, può essere riformulata nel modo seguente:

Teorema 10 (di Stokes) *Sia Σ una superficie regolare con bordo $\partial\Sigma$ regolare a tratti. Se ω è una 1-forma regolare vale*

$$\int_{\Sigma} d\omega = \oint_{\partial\Sigma} \omega . \quad (\text{A.2.10})$$

Osservazione. I lettori più attenti avranno notato che la (A.2.4) era stata scritta con i termini scambiati (cioè la circuitazione di ω eguale al flusso del rotore). Avevamo supposto cioè che dato γ esistesse sempre una superficie Σ di cui questa fosse il bordo: $\gamma = \partial\Sigma$. Questo non è sempre vero. Un esempio viene fornito (vedi figura A.13) dai meridiani del toro. Può dunque capitare che il rotore di una forma sia nulla ma la sua circuitazione no. La forma costante sul toro $\omega = d\varphi + d\vartheta$ (φ, ϑ sono le coordinate introdotte nell'esercizio 3 del capitolo 1), ha ovviamente rotore nullo, ma la sua circuitazione lungo una curva chiusa γ vale $2(m+n)\pi$, dove m è il numero di giri lungo i meridiani ed n è il numero di giri lungo i paralleli compiuti nel percorrere γ . La formulazione da noi data del teorema di Stokes, sebbene corretta, nasconde un po' questa interessantissima problematica di topologia delle varietà. Il lettore interessato è rimandato al testo *Dubrovin, Novikov, Fomenko*, Geometria contemporanea.

A.2.3 Linee di rotore, equazioni di Hamilton e teorema di Helmholtz

Vogliamo ora dimostrare il lemma 5 dato nel testo, cioè che è nulla la circuitazione della forma di Poincaré–Cartan ω è sul circuito particolare Γ

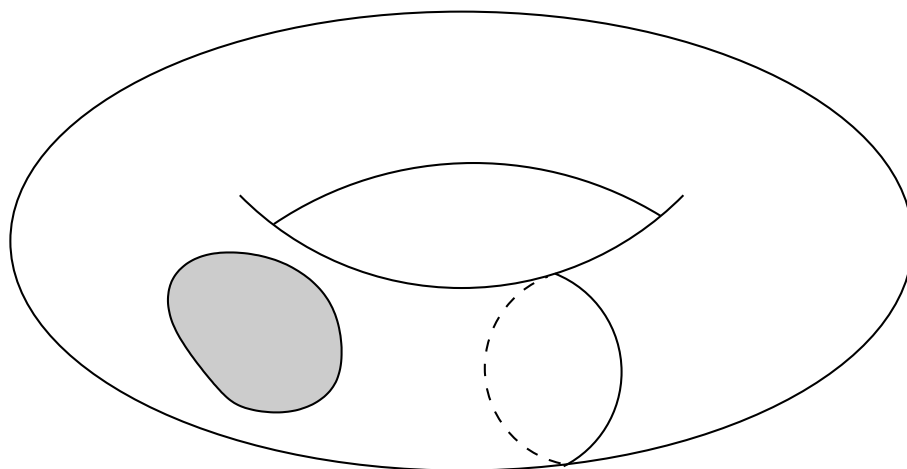


Figura A.13: Esempio di curva chiusa che non sottende un'area.

considerato nel testo. Il calcolo del rotore di ω , usando la formula (A.2.7), fornisce

$$d\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt, \quad (\text{A.2.11})$$

che mostra come il rotore di ω non sia affatto nullo. L'annullarsi della circuitazione non proviene dunque dall'annullarsi del rotore ma da un'altra proprietà, che è l'analogo di un noto teorema di Helmholtz dell'idrodinamica. Per spiegare questa proprietà cominciamo col definire il **campo nullo per il rotore** $d\omega$ come quel campo $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tale che in ogni punto \mathbf{x} vale $d\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}} = 0$ per ogni vettore \mathbf{u} dello spazio tangente in \mathbf{x} . Diciamo anche che una superficie Σ è una **superficie nulla** per ω se essa ammette un campo di vettori tangenti nullo per $d\omega$.

L'interesse di queste nozioni sta nel fatto che si ha il

Lemma 6 *Se Σ è una superficie nulla per ω (cioè ha la proprietà che, in ogni suo punto, il piano tangente contiene un vettore nullo per $d\omega$), allora si ha*

$$\int_{\Sigma} d\omega = 0.$$

Siamo dunque riusciti a caratterizzare le superfici sulle quali il flusso di $\text{rot } \omega$ è nullo. Corrispondentemente, la circuitazione di ω si annullerà per tutte le curve che sono il bordo di almeno una superficie nulla. Quello che dimostreremo sarà che le curve considerate nel Lemma 5 sono appunto di questo tipo.

Dimostrazione. [del Lemma 6] La dimostrazione si ottiene osservando che, per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ del piano tangente a Σ in un suo generico punto \mathbf{x} , si ha $d\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0$. Infatti, sia \mathbf{v} il vettore nullo, e sia \mathbf{w} un secondo vettore indipendente, di modo che (\mathbf{v}, \mathbf{w}) formino una base. Allora si ha $\mathbf{u}_1 = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}_2 = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$, con opportuni coefficienti a, b, c, d , e dunque

$$d\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = ac d\omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (ad - bc) d\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + bd d\omega(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0 .$$

Infatti, il primo e l'ultimo termine sono nulli perchè $d\omega$ è antisimmetrico, mentre il secondo è nullo perché \mathbf{v} è un vettore nullo (per $d\omega$). Dalla definizione (A.2.9) di integrale segue la tesi. **Q.E.D.**

Quindi una forma differenziale ω , determina in maniera intrinseca un campo vettoriale \mathbf{v} , cioè il campo nullo del suo rotore, e dunque un sistema di equazioni differenziali $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ che coincidono con le equazioni (A.1.4). L'osservazione chiave che permette di utilizzare le considerazioni fin qui fatte consiste nel rendersi conto che è lo *stesso campo vettoriale generato dalle equazioni di Hamilton* ad essere un campo nullo per il rotore della forma di Poincaré–Cartan ω . Infatti il campo vettoriale associato nello spazio delle fasi esteso alle equazioni di Hamilton,⁵⁴ è il campo

$$\mathbf{X} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}, 1 \right) .$$

Allora per ogni altro campo $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_q, \mathbf{u}_p, u_t)$, usando l'espressione (A.2.11) per $d\omega$, si avrà

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{X}, \mathbf{u}) &= \sum_i \left[\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} u_q^i - \frac{\partial H}{\partial p^i} u_p^i \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial p^i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} u_t - u_p^i \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial q^i} \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} u_t - u_q^i \right) \right] \\ &= 0 , \end{aligned} \tag{A.2.12}$$

dove si è fatto uso della definizione (A.2.6) per il calcolo del valore delle varie forme $dp^i \wedge dq^i$, $dq^i \wedge dt$, $dp^i \wedge dt$ sui vettori \mathbf{X}, \mathbf{u} . Ne segue l'importantissimo fatto che le superfici interamente solcate da soluzioni delle equazioni di Hamilton sono superfici nulle. Si capisce dunque come debba effettuarsi la dimostrazione.

⁵⁴Nello spazio delle fasi esteso le equazioni di Hamilton si scrivono

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} , \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} , \quad \dot{t} = 1 .$$

Dimostrazione. [del Lemma 5.] Per ogni punto $P := (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ sull'arco $\Delta\gamma$, consideriamo una curva minimizzante l'azione che abbia punto iniziale $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0)$ e punto finale P . Costruirò in questo modo una superficie Σ che ha come bordo il circuito $\gamma \cup (-d\gamma) \cup (-\gamma)$, ed è interamente solcata da soluzioni delle equazioni di Hamilton. Si ha pertanto $\int_{\Sigma} d\omega = 0$, ed applicando il Teorema di Stokes segue che la circuitazione è nulla, $\int_{\partial\Sigma} \omega = 0$. **Q.E.D.**

