PARTE III: EPR, BELL E L'ELETTRODINAMICA CLASSICA DI DIRAC

Prefazione alla terza parte

Questa terza parte è dedicata ai problemi sollevati dal lavoro di Einstein. Podolsky e Rosen (EPR) del 1935 e dal successivo lavoro di Bell del 1964, o almeno è dedicata a una parte di tali problemi. In effetti, non ci occuperemo dei problemi connessi al computer quantistico, alla crittografia quantistica e alla teleportation, anch'essi sollevati da quei lavori, problemi molto interessanti e oggi molto studiati.

Ci limiteremo infatti al problema della possibile esistenza di *parametri nascosti* (o *hidden parameters, o Verborgene Parametern*), un punto centrale per il *"classical program"* di Einstein. Si tratta di questo. Dando per scontato che siano corrette le predizioni della MQ, si vuole stabilire se i valori medi ottenuti con metodi quantistici siano riproducibili, oppure no, con metodi di tipo classico. O meglio, con metodi come quelli della meccanica statistica classica, dove si eseguono delle medie sulle posizioni e le velocità degli atomi, che sono considerate concretamente non osservabili o controllabili (per questo chiamate parametri nascosti), ma tuttavia sono supposte esistere.

Ora, il lavoro EPR, nonostante una successiva critica di Bohr, venne sempre interpretato da Einstein come una indicazione che un interpretazione realistica della MQ di tale tipo sia possibile. D'altra parte Bell, che era in sintonia con questa prospettiva di Einstein, suo malgrado nel 1964 si trovò ad avere dimostrato che sarebbe impossibile riprodurre con tali metodi certe correlazioni che sono predette dalla MQ, e in seguito furono osservate sperimentalmente. Questo fatto fu interpretato unanimemente come costituire una pietra tombale per il classical program di Einstein. Le correlazioni quantistiche studiate da Bell sarebbero da considerarsi come il prototipo di fenomenti, in qualche modo "strani", che non erano stati messi in luce negli anni classici di fondazione della MQ, e rivelano proprietà reali della natura, descritti dalla MQ e inconcepibili in ambito classico.

Ora, da una parte, naturalmente anche il "teorema" di Bell ha le sue ipotesi, e qui vi è una ipotesi cruciale, che infatti Bell chiama la *"vital assumption"*, ovvero che la distribuzione "classica" di probabilità non dipenda dalla disposizione o assetto (o *"setting"*) degli apparati di misura. D'altra parte qualcoda di strano succede anche nell'elettrodinamica classica, nella versione che ne diede Dirac nel 1938 per tener cotno della forza di reazione di radiazione in ambito relativistico, formulando la cosiddetta equazione di ALD. Infatti eglli fu il primo a rendersi conto che tale equazione, anche nella sua versione nonrelativistica, prevede dei fenomeni "strani", che sembrerebbero inimmaginabili, tanto da condurre addirittura (come è stato mostrato in seguito) alla violazione della *vital assumption* di Bell.

L'equazione di ALD è già stata introdotta nel capitolo precedente. Qui ci concentriamo sul suo aspetto "strano", che fu messo in luce da Dirac nel 1938, e non si manifesta quando si considerano soluzioni "confinate", come quelle che si presentano in relazione alla identità di WF. Si tratta del fatto che le generiche soluzioni di tale equazione sono assurde (hanno carattere *runaway*) e questa anomalia deve essere "curata" con una prescrizione generale, che addirittura sembrerebbe a prima vista essere in contrasto col principio di causalità. Dirac ne era ben consapevole, ma andò avanti per la sua strada, e molto enfaticamente affermò addirittura : **"This will lead to the most beautiful feature of the theory"**.

E così è infatti. Quello che sta alla base di tutte queste stranezze è che l'equazione di ALD costituisce una *perturbazione singolare* (anziché regolare) dell'equazione puramente meccanica che si ottiene se si elimina la forza di reazione di radiazione. Questo fatto apre un vaso di Pandora, con una messe di conseguenze qualitative del tutto inimmaginabili se si fa riferimento alla pura equazione meccanica. Parafrasando Amleto potremmo dire che *"ci sono più cose in cielo ed in terra* (ovvero, in questo caso, nella fisica classica) *di quante possa sognarne la nostra filosofia"*.

Anzitutto risulta che **l'elettrodinamica classica di Dirac**, come la chiameremo, si presenta essa stessa, del tutto naturalmente, come una teoria a parametri nascosti, e il parametro nascosto risulta essere, semplicemente, l'accelerazione (spiegheremo perché). Non si tratta dunque di un modello inventato *ad hoc* per ottenere dei risultati desiderati, ma della solita vecchia elettrodinìmica, nella forma che essa assume quando si prenda coscienza dell'esistenza della forza di reazione di radiazione e del carattere di perturbazione singolare che essa comporta. Questo è dunque il "modello fondamentale" che consideriamo. Lo studio di un caso particolare (moto unidimensionale di una carica in presenza di una barriera di potenziale) mostra che la *prescrizione nonrunaway* di Dirac permette di comprendere come mai l'accelerazione iniziale svolga il ruolo di un paramentro nascosto, in quanto non è univocamente determinata dai dati iniziali "meccanici" di posizione e velocità, e inoltre risulta propriamente incontrollabile. Inoltre questo modello presenta l'effetto tunnel, [1] in quanto il superare o no una barriera di potenziale dipende dal valore incontrollabile del parametro nascosto, e quindi è di natura probabilistica. Infine, il dominio dei valori accessibili per il parametro nascosto dipende dal *setting* della barriera (la sua altezza, che misura l'energia della carica), e risulta allora che è violata la *vital assumption* di Bell.[2]

Dunque questa vecchia–nuova elettrodinamica classica di Dirac, da una parte è essa stessa un sistema dinamico contenente un parametro nascosto, e dall'altra è per se stessa congegnata in modo tale che viola la *vital assumption* di Bell, ovvero l'ostacolo in cui questi si era imbattuto nel ricercare se siano possibili teorie a variabili nascoste nel senso di Einstein. Questo fatto, come altri (ad esempio il carattere asintotico delle serie che si presentano nell'elettrodinamica classica di Dirac, di cui parleremo più avanti) dimostrano che l'elettrodinamica classica di Dirac presenta delle proprietà che superano la fantasia ed erano ignote alla comunità scientifica. E certo molte altre ne esistono, non ancora scoperte.

Non sappiamo ancora se queste nuove proprietà saranno sufficienti per implementare il *classical program* di Einstein. Tuttavia facciamo presente che, quando si discute di questi fatti, non si parla di qualcosa di strano, di qualche modello introdotto *ad hoc* per fare tornare astutamente le cose che si desiderano. Si parla invece di proprietà della buona vecchia fisica classica, che non erano ancora state messe in luce, e che in ogni caso le competono, le appartengono. Questo aspetto, cioè di parlare di proprietà che semplicemente competano alla fisica classica (come già avviene nel caso del problema FPU), a nostro avviso conferisce una caratteristica solidità alle recenti ed attuali ricerche che illustriamo nelle presenti note.

Nel primo capitolo illustreremo il carattere di perturbazione singolare dell'equazione di ALD, e l'effetto tunnel che esso comporta. Verremo poi al lavoro EPR e a quelli di Bell, e mostreremo come il modello che "spiega" l'effetto tunnel violi la *vital assumption* di Bell.

[1] La nonunicità fu dimostrata nel lavoro A. Carati, P. Delzanno, L. Galgani, J. Sassarini, *Nonlinearity*, **8**, 65–76 (1995). Una dimostrazione con metodi variazionali fu poi data in B. Ruf, P.N. Srikanth, *Rev. Math. Phys.* **12**, 657–696 (2000) e **12**, 1137–1157 (2000)

[2] A. Carati, L. Galgani, *Non locality of classical electrodynamics of point particles and violation of Bell's inequalities*, *Nuovo Cimento* B **114**, 489 (1999).

Capitolo 14

L'elettrodinamica classica di Dirac, come teoria a parametri nascosti che viola la "vital assumption" di Bell

14.1 La "forza di reazione di radiazione", l'equazione di Abraham Lorentz Dirac (ALD) e il suo carattere perturbativo

Abbiamo già illustrato, nella seconda parte di queste note, come la forza di reazione di radiazione agente su una carica fu introdotta da Planck per rendere conto dell'emissione di radiazione da parte di una carica accelerata, fu poi discussa da Abraham e Lorentz, e infine, in versione relaativistca, da Dirac.[1] Nella sua versione non relativistica, che è sufficiente per i nostri scopi, essa conduce ad una equazione di moto, usualmente detta equazione di Abraham, Lorentz e Dirac (ALD), che ha la forma

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{a}} \,, \tag{14.1}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \varepsilon\dot{\mathbf{a}} \,, \tag{14.2}$$

dove abbiamo introdotto il parametro ε definito da

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3} \,, \tag{14.3}$$

[1] P.A.M. Dirac, *Classical theory of radiating electrons*, *Proc. Royal Soc. (London)* **A 167**, 148–168 (1938).

che svolge il ruolo di una parametro perurbativo, in quanto l'equazione si riduce a quella puramente meccanica per $\varepsilon = 0$. Questo parametro ha le dimensioni di un tempo, che per l'elettrone ha una valore dell'ordine di 10^{-23} secondi.

Rispetto alla discussione data nella seconda parte di queste note, ora vogliamo mettere in luce l'aspetto qualitativo nuovo e significativo di questa equazione (comune anche a quella relativistica), rispetto al caso delle corrispondenti *equazioni meccaniche* (come le chiameremo), a cui esse si riducono se si trascura la forza di reazione di radiazione. Si tratta di un aspetto qualitativo che apre un vaso di Pandora da cui escono a frotte proprietà sorprendenti, che Dirac aveva solo presagito.

14.2 Si apre il vaso di Pandora: il carattere di perturbazione singolare dell'equazione di ALD

È significativo riscrivere l'equazione di ALD (14.2) mettendo in evidenza il termine con la derivata di ordine massimo (qui il terzo), scrivendola dunque nella forma

$$\varepsilon\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \mathbf{F}/m \ , \quad \text{o anche} \qquad \dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{a} - \mathbf{F}(\mathbf{x})/m) \ . \tag{14.4}$$

Abbiamo già osservato che, per la piccolezza del parametro ε, abbiamo a che fare con un problema di tipo perturbativo, che cioè si riduce al problema imperturbato, quello puramente meccanico, per $\varepsilon = 0$. Ora, anche una equazione del tipo

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + m\varepsilon G(\mathbf{x}) \ ,$$

dove $\mathbf{G}$ è una generica forza dipendente dal posto, è una perturbazione dell'ordinaria equazione di Newton. Ma questa è una *perturbazione regolare*, perché essa modifica di pochissimo l'equazione originale nel senso che, per fissati dati iniziali di posizione e velocità, fino a tempi lunghissimi la soluzione dell'equazione perturbata e quella dell'equazione imperturbata si scostano di pochissimo l'una dall'altra.

Qui invece le cose sono completamente diverse perché ora abbiamo a che fare (è questo un punto cruciale per le implicazioni che esso comporta), con una una **perturbazione singolare**, nel senso che l'equazione limite (quella che si ottiene per $\varepsilon \to 0$) è qualitativamente diversa da quella che si ha per $\varepsilon \neq 0$, comunque piccolo esso sia.

Questo è messo in evidenza dalla forma che figura a sinistra della (14.4), in cui si vede che l'equazione limite è di secondo ordine, anziché di terzo. Questo significa che una generica soluzione dellì'equazione limite è individuata dai dati iniziali di posizione e velocità (o dati meccanici, come diremo), mentre per avere una soluzione dell'equazione di ALD bisogna assegnare anche l'accelerazione iniziale, che può essere scelta ad arbitrio in $\mathbb{R}^3$ (perché ora $\mathbf{a}$ non è più determinata da $\mathbf{x}$ tramite $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, come avveniva nel caso meccanico). Questo fatto ha una rilevanza cruciale, come vedremo, e la conseguenza fondamentale è che le soluzioni dell'equazione di ALD si suddividono in due classi, quelle che sono vicine a soluzioni dell'equazione limite (soluzioni di tipo meccanico, come diremo) e soluzioni del tutto diverse, con proprietà incredibilmente nuove rispetto a quelle dell'equazione meccanica. È questa l'apertura del vaso di Pandora, che porterà alle nuove inaspettate conseguenze che Dirac aveva presagito.

Il caso analogo delle equazioni algebrìche. Questo proprietà delle perturbazioni singolari si manifesta in maniera particolarmente semplice nel caso delle equazioni algebriche L'esempio più semplice è quello dell'equazione di secondo grado

$$\varepsilon x^2 + bx + c = 0 \, ,$$

che perde un grado nel limite $\varepsilon \to 0$. Nel caso imperturbato l'equazione ha una sola soluzione, $x = -c/b$. Invece nel caso perturbato si hanno due soluzioni,

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\varepsilon c}}{2\varepsilon} \simeq \frac{b}{2\varepsilon}\Big(1 \pm (1 - \frac{2\varepsilon c}{b^2})\Big) \, .$$

Si vede allora immediatamente che, per $\epsilon \to 0$, una delle due soluzioni tende a quella del caso imperturbato (è la soluzione col segno meno, in cui al numeratore si fattorizza ε, eliminando l'ε del denominatore. Invece l'altra diverge, perché il numeratore tende a un valore finito, e vince allora la divergenza dovuta al denominatore.

Un fenomeno analogo si presenta nell'equazione di ALD. Questo si vede nella maniera più semplice nel caso paradigmatico della particella libera, cioè il caso $\mathbf{F} = 0$. In tal caso l'equazione prende la forma

$$\varepsilon \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \, ,$$

la cui soluzione generale è ovviamente

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 e^{t/\varepsilon} \, , \tag{14.5}$$

che dipende dal parametro $\mathbf{a}_0$, definito dal dato iniziale. Dunque si vede immediatamente che nel caso generico $\mathbf{a}_0 \neq 0$ la soluzione diverge, con una accelerazione che cresce esponenzialmente al crescere del tempo, ovviamente contro il principio d'inerzia. Ora, queste soluzioni sono chiaramente assurde, e certamente in qualche modo tutti le conoscevano, ma nessuno ne discuteva. È questo un tipo di situazione che si incontra abbastanza spesso nella vita comune. Ebbene, Dirac per primo ebbe il coraggio di prendere di petto questa situazione, cominciando a dare un nome a queste soluzioni assurde, con il chiamarle *soluzioni runaway*. Tra l'altro, tutte queste soluzioni generiche hanno la proprietà che la particella irraggia un'energia infinita, e quindi a maggior ragione non sono fisicamente accettabili. Queste sono dunque le soluzioni generiche nel caso della particella libera.

Soluzioni runaway come soluzioni generiche dell'equazione di ALD in presenza di forza esterne: metodo qualitativo

Che le soluzioni generiche dell'equazione di ALD abbiano il carattere runaway anche quando è presente una forza, si capisce in una maniera qualitativa molto significativa, se si riguarda al problema in maniera in qualche modo geometrica, considerando la struttura che l'equazione di moto presenta nello spazio delle fasi esteso $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^9$ delle triple $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$. Qui viene utile la forma usata a destra nella (14.4), che in maniera più completa possiamo scrivere nella familiare *forma normale*, come tripla di equazioni del primo ordine,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}\ , \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}\ , \quad \dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{m}\right)\ .$$

Questa mostra che, mentre le derivate della posizione e della velocità hanno la forma consueta, la derivata dell'accelerazione è sostanzialmente infinita in tutto lo spazio delle fasi $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$, tranne che in una piccolissima striscia (di spessore di ordine ε) attorno alla ipersuperficie definita da

$$m\mathbf{a} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0\ .$$

che potremmo chiamare la *varietà meccanica*. Inoltre fuori dalla striscia la derivata dell'accelerazione è sostanzialmente parallela all'accelerazione stessa ed è sempre diretta *via dalla* varietà meccanica, in modo che il punto rappresentivo fugge all'infinito con accelerazione crescente in maniera esponenziale. Evidentemente, anche l'energia irraggiata risulta essere infinita.

14.3 La prescrizione nonrunaway di Dirac. Analogia con il problema della ricerca degli autovettori

Dunque in generale l'equazione di ALD conduce a soluzioni fisicamente assurde. Dirac tuttavia osserva che, nel caso della particella libera, esistono anche soluzioni fisicamente acettabili, che addirittura coincidono con le soluzioni dell'equazione puramente meccanica. Basta infatti, nella soluzione generale (14.5), prendere nullo il dato iniziale dell'accelerazione, $\mathbf{a}_0 = 0$, per ritrovare la soluzione $\mathbf{a}(t) = 0$, cioè proprio la soluzione (moto per inerzia) della particella libera nel caso puramente meccanico.

Questa osservazione suggerisce a Dirac la soluzione el problema in un caso abbastanza, anche se non completamente, generale. Si tratta del caso in cui, anzitutto, si ha un campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ che si annulli all'infinito. Inoltre, egli si limita al caso particolare in cui si abbia un urto (o *scattering*), ovvero la particella provenga dall'infinito e, dopo avere interagito con il campo di forze, si allontani all'infinito. Allora il suo ragionamento è che all'infinito, venendosi a trovare in assenza di forze, la particella debba comportarsi come una particella libera, e quindi debba avere accelerazione nulla. Pertanto egli richiede che tra tutte le soluzioni, determinate ciascuna da un punto iniziale nello spazio delle fasi esteso delle triple $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$, si trattengano come aventi significato fisico solo le soluzioni (se esistono) che soddisfano alla proprietà asintotica

$$\mathbf{a}(t) \to 0 \quad \text{per} \quad t \to +\infty \ . \tag{14.6}$$

Vedremo più sotto come questo modo di formulare il problema della ricerca di soluzioni particolari, fisicamente significative, dell'equazione di ALD venga formulato matematicamente, in relazione al classico problema di Cauchy.

Dunque Dirac ricerca soluzioni particolari che soddisfano la condizione asintotica (14.6). Ora mostriamo come tale condizione può essere generalizzata, e in maniera alquanto naturale, in maniera da potersi applicare anche a casi significativi diversi da quelli particolari da lui considerati.

L'osservazione rilevante è che la condizione di Dirac assicura sostanzialmente che converga l'integrale $\int_0^{+\infty} \mathbf{a}^2(t)\mathrm{d}t$, e questo, ricordando la formula di Larmor, garantisce che nel suo moto la particella irraggi una quantità di energia finita. Questa osservazione suggerisce addirittura che il problema dell'equazione di ALD possa essere formulato matematicamente come problema globale, ambientandolo in L^2, ovvero richiedendo che tra tutte le soluzioni si trattengano solo quelle che soddisfano la condizione globale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}^2(t)\mathrm{d}t < \infty \ . \tag{14.7}$$

Si noti che questa condizione ha senso anche per moti non di tipo d'urto (o di scattering), ovvero ha senso anche per moti confinati (*bound states*).

Si verifica facilmente che questa condizione è equivalente al richiedere che lungo i moti esistano sia i potenziali avanzati (decadimento dell'accelerazione per $t \to +\infty$) sia quelli ritardati (decadimento dell'accelerazione per $t \to -\infty$). Quindi la condizione globale (14.7) garantisce che si possa formulare un teoria di WF.

Per quanto riguarda questa condizione di tipo globale, si noti l'analogia con la situazione che si incontra in MQ quando si determina una autofunzione $u(\mathbf{x})$ ad esempio dell'hamiltoniana di una particella. Schrödinger nel suo lavoro discute con grande enfasi questo problema. In generale la soluzione dell'equazione differenziale che si incontra ha soluzioni che divergono all'infinito, e le autofunzioni si presentano solo nei casi particolarissimi in cui la funzione $u(\mathbf{x})$ è di classe L^2, ovvero soddisfa la condizione

$$\int_{\mathbf{R}^3} |u(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}^3\mathbf{x} < \infty \ .$$

In particolare, questa è soddisfatta se all'infinito la soluzione si annulla (in modo opportuno), analogamente a come la condizione di Dirac sostanzialmente garantisce che sia soddisfatta la condizione più generale (14.7).

Formulazione analitica del problema

È dunque chiaro che ci troviamo a trattare con un problema matematico ben diverso da quello che si incontra comunemente studiando l'equazione di Newton. In effetti, si constata immediatamente che l'equazione di ALD, congiunta con la condizione asintotica di Dirac, è equivalente a risolvere l'equazione integrale

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{+\infty} e^{(t-s)/\varepsilon}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\, \mathrm{d}s \ , \tag{14.8}$$

in cui l'incognita è la funzione $\mathbf{x}(t)$ (con la conseguente funzione $\mathbf{a}(t)$ che essa produce per derivazione).

Dal punto di vista analitico, il problema considerato da Dirac può essere posto nel modo seguente.[2] Si ha lo spazio delle fasi $\mathbb{R}^9$ delle triple $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$, che abbiamo già chiamato *spazio delle fasi esteso*. Allora si fissa un punto dello spazio $\mathbb{R}^6$ delle coppie $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ (che chiameremo *spazio delle fasi meccanico*) e, tra tutte le soluzioni definite dall'ulteriore assegnazione di una accelerazione iniziale $\mathbf{a}_0$, si ricerca se ne esista una che genera una soluzione che soddisfi la condizione asintotica di Dirac (14.6). Più in generale noi richiederemo che la soluzione soddisfi la condizione globale nella forma (14.7).

Questo dunque è dal punto di vista analitico un problema completamente diverso da quello di Cauchy, in cui si determina una soluzione per ogni dato iniziale nello spazio delle fasi esteso. Qui invece si tratta di un problema di tipo misto, parzialmente di Cauchy (dato iniziale nello spazio delle fasi meccanico) e al contorno (condizione asintotica di Dirac, o condizione globale che la funzione $\mathbf{a}(t)$ sia in L^2).

Formalmente il problema è dunque il seguente. *Per ogni dato iniziale meccanico* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$, *si richiede di stabilire se esistono uno o più dati iniziali dell'accelerazione* $\mathbf{a}_0$ *tali che la soluzione* $(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t))$ *del corrispondente problema di Cauchy dell'equazione di ALD soddisfi la condizione asintotica di Dirac o quella globale (14.7).*

L'incognita quindi è l'accelerazione iniziale, come funzione del punto generico dello spazio delle fasi meccanico. Questa funzione definisce una ipersuperficie di dimensione 6 immersa nello spazio delle fasi esteso. Chiameremo questa superficie *la varietà fisica* oppure *la varietà di Dirac*.

L'esempio della particella libera mostra che in quel caso la soluzione esiste ed è unica: per ogni dato iniziale meccanico la soluzione è $\mathbf{a}_0 = 0$. Dirac nel suo lavoro espresse la congettura che questo avvenga per ogni tipo di forza. Invece vi sono argomenti matematici di carattere generale che indicano come, in problemi di questo tipo, la soluzione non esiste, oppure, se esiste, generalmente non è unica. Come stanno dunque le cose in generale?

[2] L.K. Hale, A.P. Stokes, *J. Math. Phys.* **3**, 70 (1962).

Un esempio di rilevanza fisica: la barriera di potenziale e l'effetto tunnel. Nonunicità dell'accelerazione, e suo ruolo di parametro nascosto

La situazione è complicata e non ancora chiara. Una certa luce è venuta comunque da uno studio riguardante il moto di una particella in presenza di una barriera di potenziale. Si trova che se la barriera è abbastanza larga la soluzione (l'accelerazione iniziale come funzione dei dati iniziali meccanici) è unica, come nel caso della particella libera. Invece, se la barriera è abbastanza stretta si ha nonunicità: per un fissato dato iniziale meccanico $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ si hanno in generale più soluzioni $\mathbf{a}_0$ accettabili, e il numero delle soluzioni addirittura diverge al variare del dato iniziale. [3]

Dal punto di vista geometrico, questo significa che in tali casi di nonunicità la varietà di Dirac è ripiegata (*folded*). Inoltre, si trova che allontanandosi dalla barriera i vari fogli si appiattiscono tutti, in maniera esponenzialmente veloce, sul "piano" $\mathbf{a}_0 = 0$, e dunque le diverse accelerazioni accettabili sono praticamente indistinguibili l'una dall'altra, ovvero sono incontrollabili. In altri termini, l'accelerazione iniziale svolge il ruolo di un parametro, che è proprio un parametro "nascosto". Esso deve essere assegnato per determinare il movimento, ma è incontrollabile, e quindi deve essere assegnato in maniera intrinsecamente probabilistica. Per certi dati iniziali la particella supera la barrriera e per altri no, e potremo solo stimare quale è la probabilità ci certi eventi, ad esempio che essa passi o non passi. Infine, si trova che il dominio in cui sono definite le accelerazioni iniziali per i quali si deve assegnare la probabilità iniziale, per fissato dato iniziale meccanico, dipende dall'altezza (il *setting*) della barriera. Questa è la caratteristica peculiare del paramentro nascosto che in maniera del tutto naturale si presenta nell'equazione di ALD, facendo sì che risulti violata la vital assumption di Bell.

Carattere asintotico delle serie perturbative dell'elettrodinamica di Dirac. Moti di tipo meccanico e moti di tipo nonmeccanico. La barriera di potenziale e il gatto di Schrödinger

Abbiamo già ricordato come la teoria di Dirac sia sempre stata guardata con una certa apprensione per i suoi aspetti non comuni. Si può dire che essa era rimasta sostanzialmente incompresa fino a tempi abbastanza recenti. Forse una ragione è il carattere di perturbazione singolare dell'equazione di ALD. In effetti esso è familiare in problemi di fisica appplicata come l'idrodinamica, ma apparentemente ignoto rispetto a problemi di fisica generale come quelli relativo al campo elettromagnetico classico. Un esempio ci sembra significativo a tale proposito,

[3] La nonunicità fu dimostrata nel lavoro A. Carati, P. Delzanno, L. Galgani, J. Sassarini, *Nonlinearity*, **8**, 65–76 (1995). È molto significativo il fatto che una indicazione in questa direzione era stata data molti anni prima da uno dei più autorevoli studiosi della teoria quantistica dei campi, R. Haag. Si veda .... Una dimostrazione con metodi completamenti diversi, di tipo variazionale, fu poi data in B. Ruf, P.N. Srikanth, *Rev. Math. Phys.* **12**, 657–696 (2000) e **12**, 1137–1157 (2000).

e riguarda il carattere asintotico che tale singolarità comporta per le serie della elettrodinamica di Dirac.

Si tratta di questo. Ovviamente è possibile scrivere le soluzioni dell'equazione (14.8) come uno sviluppo in serie di potenze del parametro ε, ed infatti questa serie si trova scritta anche nel manuale di Jackson (ultimo capitolo). È naturale allora chiedersi se tale serie converga. Questa domanda venne infatti posta da Röhrlich (considerato una autorità nel campo dell'elettrodinamica) in occasione di una conferenza dedicata a Dirac, e Röhrlich afferma di attendersi che la serie converga. Invece, in poche righe è stato dimostrato che la serie diverge, avendo carattere asintotico.[4] Questo fatto (il non essersi resi conto di tale carattere della serie perturbativa), è una chiara dimostrazione del fatto che le implicazioni dell'equazione ALD non erano ancora comprese, o forse non erano state sufficientemente interiorizzate, dalla comunità scientifica.[5]

Proprio questo carattere asintotico à la ragione profonda per cui le soluzioni dell'equazione si dividono in due classi, quelle che "assomigliano" alle soluzioni dell'equazione imperturbata (senza forza di reazione di radiazione, per questo dette *soluzioni di tipo meccanico*) e quelle che sono qualitativamente diverse, come quelle che "spiegano" l'effetto tunnel. Forse l'esempio della barriera di potenziale potrebbe fungere da paradigma per "spiegare" paradossi del tipo del gatto di Schrödinger. Nella sostanza, tale paradosso mette in luce come appaia assurdo pensare di applicare i ragionamenti tipici quantistici a situazioni macroscopiche. É evidente che una teoria fondamentale debba prevedere che il gatto sia vivo o morto, indipendentemente dal fatto che noi andiamo o no ad aprire lo sportello per accertarcene. D'altra parte è giusto che si debba pensare di avere una unica teoria, che poi si riduca in un certo limite alla classica teoria macroscopica. Se ora si pensa a questo problema dal pumto di vista delle perturbazioni singolari, la situazione potrebbe essere analoga a quella dell'effetto tunnel nell'equazione di ALD. Ovvero, nel caso del gatto siamo come nel caso della barriera larga: si ha solo una piccolissima, impercettibile modificazione rispetto a quello che si ha nella teoria classica. Non si ha nessun fenomeno di tipo quantistico, e in particolare non si ha nessuna precipitazione. Solo con la barriera stretta si presenta qualcosa di qualitativamente diverso, in particolare qualcosa che possa o debba essere descritto in termini di precipitazione.

---

[4] A. Carati, L. Galgani, *Asymptotic character of the series of classical elctrodynamics, and an application to brehmsstrahlung*, *Nonlinearity* **6**, 905 (1993).

[5] La "scoperta" del carattere asintotico delle serie perturbative dell'elettrodinamica di Dirac, sopra ricordata, fece una profonda impressione su uno studioso brasiliano, Jayme de Luca, che si affrettò a ricercare se mediante l'elettrodinamica di Dirac si potessero "spiegare" le righe spettrali. In effetti, egli trovò significativi risultati preliminari per l'atomo di elio. Si veda J. De Luca, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 680 (1998).

14.4 L'effetto tunnel. Violazione della vital assumption di Bell

NOTA DIDATICA: Non abbiamo avuto tempo per completare questa sezione. Diamo solo un cenno, e rimandiamo per ora all'articlo di Carati, Delzanno et al citato sotto

L'effetto tunnel classico per l'equazione di ALD nonrelativistica fu dapprima osservato mediante integrazione numerica[6]. Ne venne poi trovata una dimostrazione geometrico–analitica che fa uso delle tecniche della teoria dei sistemi dinamici, illustrata nel medesimo lavoro in cui si davano i risultati numerici[7]. Successivamente ne venne data una dimostrazione indipendente, cha fa uso delle tecniche di analisi funzionale per i problemi variazionali.[8] Si considera una particella su una retta, soddisfacente l'equazione ALD in cui la forza esterna è dovuta ad una barriera di potenziale. Per una barriera abbastanza acuta, si trova che, se si fa partire la particella lontano dalla barriera con un'energia meccanica prossima al valore del picco della barriera, allora si ha nonunicità, e anzi il numero di possibili valori della accelerazione iniziale diventa illimitato quando l'energia meccanica della particella tende al valore del picco della barriera. Fissata un'altezza della barriera, aumentando il valore del parametro nascosto (l'accelerazione) tra quelli possibili (che si trovano sulla varietà fisica che risulta essere ripiegata), le soluzioni alternativamente passano la barriera o ne vengono riflesse. Si ha quindi un effetto tunnel classico, in cui la probabilità di passare o non passare la barriera viene determinata assegnando delle probabilità a ciascuno dei valori possibili del parametro nascosto (l'accelerazione).

Un altro fatto rilevante è che tutti i possibili valori dell'accelerazione si schiacciano sul valore $a = 0$ (e in maniera esponenzialmente veloce) quando ci si allontana dalla barriera, il che vuol dire che i possibili valori del parametro nascosto sono proprio nascosti, nel senso che sono assolutamente incontrollabili.

Ma la proprietà più rilevante per i nostri scopi è che il dominio dei valori possibili per l'accelerazione dipende dall'altezza della barriera. Si ha qui quello che Accardi (si veda un prossimo capitolo) chiamerebbe *effetto camaleonte*. Se infatti utilizziamo la barriera come strumento di misurazione dicotomica (risultato $+1$ se la particella passa, -1 se non passa), allora si ha, come dice Accardi in una situazione analoga, che *"The dynamics of the system may depend on the observables we want to measure"*. Infatti, se cambiamo il setting (l'altezza), la dinamica cambia in quanto cambia addirittura il dominio dei valori che può assumere il parametro nascosto, che definisce dinamicamente la soluzione.

[6]Dato il generico carattere runaway delle soluzioni per tempi positivi, per risolvere numericamente l'equazione e trovare soluzioni nonrunaway è necessario usare metodi di tipo *backward*, cioè andando all'indietro nel tempo.

[7]A. Carati, P. Delzanno, L. Galgani, J. Sassarini, *Nonuniqueness properties of the physical solutions of the Lorentz–Dirac equation*, Nonlinearity **8**, 65 (1995).

[8]B.Ruf, P.N. Srikanth, *Rev. Mat. Phys.* **12**, 657 and 1137 (2000).

Violazione della vital assumption di Bell

L'applicazione dell'effetto camaleonte (che è alla base dell'effetto tunnel classico) per la costruzione di un modello che viola la disuguaglianza di Bell è allora abbastanza banale.[9] Si consideri un esperimento con due particelle su una retta che escono dall'origine in direzioni opposte, andando ciascuna verso una propria barriera. L'altezza di ciascuna delle due barriere può essere fissata in tre assetti diversi. Si ha ora l'effetto camaleonte appena descritto, per cui lo spazio di probabilità del parametro nascosto (l'accelerazione) di ognuna delle due particelle dipende dall'assetto della corrispondente barriera. Dunque si ha che anche lo spazio di probabilità dei parametri nascosti del sistema globale, cioè il prodotto cartesiano dei due spazi di probabilità, dipende dagli assetti delle due barriere, È quindi del tutto ovvio che viene violata la "vital assumption" di Bell, e dunque la disugluaglianza di Bell non può più essere dimostrata. È anche facile trovare delle distribuzioni iniziali di probabilità che conducono a una violazione di tale disuguaglianza.

Un'ultima rilevante osservazione è che il modello appena descritto è nonrelativistico, ma può essere esteso abbastanza facilmente al caso relativistico. Questo significa che il condizionamento (dovuto all'avere fissato l'assetto degli apparati di misura) è presente anche in ambito relativistico, in cui una particella ha velocità dell'ordine di quella della luce nel vuoto.

Esercizio (proposto da B. Ruf). Utilizzando un procedimento analogo a quello qui illustrato per l'analogo classico dell'effetto tunnel, mostrare che nell'ambito dell'elettrodinamica classica di Dirac per particelle puntiformi si ottiene anche la diffrazione da due fenditure.

14.5 Il problema della causalità. Analogia con quello della irreversibilità

Dirac mise subito in luce, nel suo lavoro, che nell'equazione di ALD ci si imbatte in situazioni in qualche modo contastanti con l'idea comune di causalità. E addirittura questo avviene nel caso della forma relativistica dell'equazione, che egli stesso aveva scoperto. Egli trova infatti che, se si sottopone la particella all'azione di una forza "a impulso" nel tempo (proporzionale a una funzione $\delta(t)$), allora la particella "sente" la forza prima che incontri l'impulso, entro un tempo dato proprio dal parametro ε. È questo il cosiddetto "fenomeno della preaccelerazione" previsto dall'equazione di ALD.

[9] Si veda A. Carati, L. Galgani, *Non locality of classical electrodynamics of point particles and violation of Bell's inequalities*, Nuovo Cimento B **114**, 489 (1999). L'appendice contiene un banale errore (che avrebbe una storia abbastanza curiosa). La versione corretta è data nell'appendice al lavoro A. Carati, L. Galgani, *Theory of dynamical systems and the relations between classical and quantum mechanics*, *Found. of Physics* **31**, 69 (2001) – volume per il settantesimo compleanno di Martin Gutzwiller.

Questo fatto è discusso da Dirac a pag. 158 del suo lavoro, nel paragrafo dal titolo *"Motion of an electron disturbed by a pulse"*. Egli considerava il caso dell'equazione relativistica, ma con un cambiamento di variabile si era poi ridotto a un'equazione che formalmente coincide con quella nonrelativistica, ovvero all'equazione

$$\varepsilon^{-1} a - \dot{a} = \varkappa \delta(t) \,, \quad (a = \ddot{x} \,.$$

Si tratta della sua equazione (33), dove però abbiamo denotato il suo a con $1/\varepsilon$. Nelle sue parole: *This equation shows that, at the time $t = 0$, $\ddot{x}$ increases discontinuously by an amount $-\varkappa$, and before and after this time we have*

$$\varepsilon^{-1} a - \dot{a} = 0 \,.$$

According to the conclusions of the previous section, we must take a motion for which, after $t = 0$, $\dot{x}$ is a constant, q say. We now have $\ddot{x}$ zero just after $t = 0$, so it must have the value $\varkappa$ just before. The general solution is

$$\dot{x} = c_1 e^{t/\varepsilon} + c_2$$

where c_1 and c_2 are constants of integration. To obtain the motion of our electron before $t = 0$ we must choose these constants of integration so that $\dot{x} = 0$ for $t = -\infty$ and $\ddot{x} = \varkappa$ for $t = 0$, the former condition taking into account that the electron is initially at rest. This fixes $c_2 = 0$ and $c_1 = \varkappa\varepsilon$. Finally, we have the condition that $\dot{x}$ must be continuous at $t = 0$ (since there is no δ function in $\ddot{x}$), which gives us $q = c_1$. Thus the solution of our equation of motion is

$$\dot{x} = \varkappa\varepsilon \, e^{t/\varepsilon} \quad \text{for } t < 0 \,, \qquad \dot{x} = \varkappa\varepsilon \quad \text{for } t > 0 \,.''$$

Poi egli descrive a parole il moto, dicendo: *"We can describe the motion by saying that the electron is, to a high approximation, at rest for large negative values of t, but as t approaches zero it acquires a velocity and acceleration, in accordance with the equations, of such amounts that just before $t = 0$ the acceleration has the right value to be exactly cancelled by the effect of the pulse, so that after $t = 0$ the electron is left moving with constant velocity."*

Sostanzialmente,[10] la forza impulsiva produce un salto finito dell'accelerazione al tempo $t = 0$. Per tempi diversi da zero si ha la particella libera, con la soluzione generale esponenziale per l'accelerazione che già abbiamo discusso. Ma per tempi positivi l'accelerazione deve essere nulla sempre (e quindi anche al tempo 0_+) perché altrimenti la soluzione sarebbe di tipo runaway. Invece per tempi negativi la soluzione resta esponenziale, e quindi l'accelerazione al tempo zero (al tempo 0_-) ha un certo valore, il quale resta definito perché sono fissati sia il salto dell'accelerazione, sia il valore dopo il salto. Questo già basta per concludere che l'accelerazione "sente" la forza impulsiva, prima del tempo zero, in cui essa agisce.

E infine Dirac commenta: *"It would appear here that we have a contradiction with elementary ideas of causality. The electron seems to know about the pulse before it arrives and to get an acceleration (as the equations of motion allow it to do), just sufficient to balance the effect of the pulse when it does arrive. The electron will of course radiate all the time it is accelerating and will thus be radiating before $t = 0$."*

---

[10]Per l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x) + c\delta(t)$$

con f regolare, la soluzione, ottenuta integrando $\dot{x}$, ha in $t = 0$ il salto $x(0_+) - x(0_-) = c$.

Dunque Dirac propone una teoria del mondo microscopico (in quanto contiene come parametro perturbativo il tempo ε, che è estremamente piccolo su scala atomica), che sembrerebbe andare contro il comune modo di intendere la causalità. Tuttavia egli non si scompone e va avanti per la sua strada. In particolare, egli formula la sua teoria introducendo la sua prescrizione nonrunaway, che coinvolge quello che deve avvenire al tempo $+\infty$, invece di discutere la sua equazione al modo consueto, come problema di Cauchy. Ingenuamente, in questo modo egli sembrerebbe richiedere che il futuro determini la soluzione, in modo assolutamente contrario all'approccio tradizionale enfaticamente proclamato nel celebre passaggio di Laplace nel suo saggio sulla teoria delle probabilità dell'anno 1800. Ma Dirac non ha esitazioni, e infatti poco prima, commentando il modo in cui aveva scelto di impostare il problema, aveva detto, anche egli in maniera enfatica: *"This will lead to the most beautiful feature of the theory"*. E aveva ragione. È proprio la sua condizione asintotica il grimandello che ha aperto il vaso di Pandora nell'equazione di ALD.

Analogia tra il problema della causalità e quello della reversibilità temporale

Concludiamo con una analogia tra il problema della causalità e quello della irreversbilità. Abbiamo già osservato nella seconda parte di queste note che tutta la teoria di WF a prima vista potrebbe sembrare violare la causalità, in quanto fa intervenire in maniera simmetrica potenziali ritardati e avanzati.[11] Tuttavia abbiamo poi dimostrato che, paradossalmente, la teoria di WF è compatibile con una proprietà di causalità macroscopica nel senso comune, che viene espressa attraverso le relazioni di Kramers–Kronig.

Per quanto riguarda la causalità, sembrerebbe dunque che ci si imbatta in una situazione analoga a quella che si incontra nel problema della reversibilità temporale, che abbiamo discusso alla fine della prima parte. Si ritiene "comunemente" che l'irreversibiltà macroscopica si presenti "nonostante" la reversibiltà microscopica. Abbiamo invece mostrato che essa è addirittura una conseguenza della reversibiltà microscopica. Al punto tale da potersi addirittura congetturare che la irreversibiltà macroscopica non si presenterebbe se non si avesse la reversibiltà microscopica.

Nel caso della causalità, la situazione sembra in qualche modo simile. Si ha una forma di causalità microscopica che risulta essere espressa analiticamente nella forma di WF, la quale è apparentemente noncausale. E invece la teoria di WF comporta una causalità macroscopica (ovvero le relazioni di Kramers–Kronig), che è adeguata alla comune esperienza, come avviene per l'irreversibiltà.

[11] Come diceva fortemente di volere anche Einstein nel suo articolo del 1908, e come avviene in teoria quantistica dei campi. Infatti, nella QED si usa il propagatore di Feynman, che coinvolge simmetricamente quello ritardato e quello avanzato, e quindi non si annulla identicamente fuori dal cono di luce (si veda il libro di Bogolyubov).

Capitolo 15

EPR, 1935

Il problema se le cose esistano fuori di noi, indipendentemente dalla nostra coscienza, è un problema centrale della filosofia. Ad esempio, per quanto riguarda la filosofia moderna, possiamo ricordare come il vescovo Berkeley si chiedesse se gli alberi esistono, dietro di noi, anche quando non li osserviamo, e concludesse che in effetti essi esistono perché c'è Dio che li osserva.

In meccanica quantistica sembra che in qualche modo si abbia a che fare con un problema analogo, in relazione all'assioma di *riduzione* o *precipitazione* dello stato all'atto di una misurazione. Ricordiamo che, secondo la cosiddetta "formulazione ortodossa"' della meccanica quantistica (nome coniato da Einstein stesso), i valori che si possono osservare per una data osservabile sono gli autovalori del corrispondente operatore (autoaggiunto); inoltre, dato uno stato ψ, esso ci permette soltanto di calcolare la probabilità di osservare ognuno dei valori possibili. Ma il valore "non esiste" prima dell'atto di osservazione, il quale farebbe "precipitare" istantaneamente lo stato ψ su un nuovo stato, l'autostato della osservabile relativo all'autovalore osservato. Solo allora l'osservabile avrebbe un valore, proprio l'autovalore corrispondente a quell'autostato.

Naturalmente, anche in meccanica classica si concepisce che esistano situazioni in cui si dispone solo della probabilità di osservare uno dei possibili valori di una variabile dinamica (o osservabile), ma ciò solo a causa di una nostra ignoranza dello stato del sistema, mentre si ammette che non vi sia alcuna ostruzione in linea di principio a conoscere lo stato esatto del sistema, rappresentato da un punto nel corrispondente spazio delle fasi. Invece in meccanica quantistica non si tratta di ignoranza dello stato del sistema, perché secondo la teoria ortodossa lo stato ψ fornisce una conoscenza "completa" del sistema, oltre la quale non si può andare. Pertanto il valore "reale" in qualche modo "non esiste" finché non si compie l'osservazione. Prima, in generale il sistema si trova in uno stato che è sovrapposizione di altri stati cui corrisponderebbero dei precisi valori di una osservabile, valori che però, nelle parole di Heisenberg, sono solo valori che hanno un carattere "potenziale" fino al momento in cui si compie un'osservazione, la quale soltanto conferirebbe a uno di quei valori uno stato "attuale".

Si tratta evidentemente di una concezione che potrebbe apparire assurda, se appplicata alle esperienze della vita comune. Ed è proprio per mettere in luce tale assurdità che Schrödinger inventò il suo celebre paradosso del gatto. Questo gatto, poverino, è chiuso in una scatola nella quale si trova un meccanismo che, sotto l'azione casuale di raggi cosmici, può aprirsi oppure no. Nel primo caso uccide il gatto[1] e nel secondo lo lascia in vita. Ma secondo questa parodia della MQ il gatto rimane in uno stato di sovrapposizione

$$\psi = u_{\text{gattovivo}} + u_{\text{gattomorto}} \, .$$

E soltanto quando apriamo la scatola avviene che non solo veniamo a sapere se il gatto è vivo oppure morto, ma addirittura siamo noi stessi che, con l'atto di osservazione, facciamo precipitare il gatto in uno dei sue stati. Prima egli era insieme vivo e morto, sovrapposizione dei due stati.

Questo è il tipo di problemi che pervade il lavoro EPR. Problemi che immaginiamo facessero storcere il naso a Fermi, confermandolo nel suo atteggiamento di ritrosia su questi temi. Tuttavia, non tutto viene per nuocere, ed è avvenuto che l'insistenza di Einstein nel suo atteggiamento "realistico" conducesse Bell a produrre un contributo molto significativo, il quale ha finito col mettere in luce delle proprietà che sono "concrete" nel senso comune della fisica, verificabili con esperimenti effettivi, come è avvenuto da parte di Aspect e altri.[2]

15.1 La "formulazione ortodossa" della meccanica quantistica, e il problema dei parametri nascosti

Ricordiamo gli assiomi della MQ nella forma più semplice possibile, facendo riferimento al caso paradigmatico in cui si abbiano operatori con "spettro discreto e nondegenere".

Gli assiomi della meccanica quantistica

Nel caso paradigmatico in cui si considerano osservabili con spettro discreto e nondenegere gli assiomi sono i seguenti.

1. Ad un sistema si associa uno spazio di Hilbert complesso. Dati due suoi vettori ψ, φ esiste quindi il loro "prodotto scalare", che indicheremo con l'usuale notazione di Dirac oppure con la notazione più consueta in matematica:
$$\langle \psi | \varphi \rangle \quad \text{equivalente a} \quad (\psi, \varphi)$$

[1] Nelle parole di Einstein, in una sua celebre lettera scambiata con Schrödinger, il povero gatto viene *pulverisiert*.

[2] Tra questi anche Tonino Scotti , una persona molto vicina ai presenti autori. Si veda A. Scotti, G. Bertolini, E. Diana (1981), lavoro pubblicato un anno prima di quello di Aspect, del 1982.

2. A ogni quantità osservabile è associato un operatore autoaggiunto A, e i valori "possibili" a_n dell'osservabile sono gli autovalori di A, relativi ai corrispondenti autovettori (normalizzati) u_n. Questi sono definiti come soluzioni dall'equazione agli autovalori

$$Au = au \ .$$

3. La massima informazione sullo "stato fisico" del sistema è fornita da un vettore ψ (normalizzato) dello spazio di Hilbert, e si ottiene come segue.

   Dati uno stato ψ e una osservabile cui corrisponde l'operatore A, allora l'osservabile "ha" un ben preciso valore soltanto se lo stato ψ coincide con uno degli autovettori di A, diciamo $\psi = u_n$, e in tal caso l'osservabile "ha" con certezza il valore a_n.

   Ma in generale si ha solo un'informazione di tipo "intrinsecamente probabilistico". Si sviluppa ψ sulla base degli autovettori u_n di A,

$$\psi = \sum_n c_n u_n \ ,$$

   e allora la probabilità che misurando A si trovi il valore a_n è data da

$$\Pr(a_n|\text{dato}\,\psi) = |c_n|^2 = |(u_n, \psi)|^2 \ .$$

4. L'evoluzione temporale ψ_t dello stato, quando non si compie alcuna misurazione (evoluzione libera) è una evoluzione unitaria (cioè che conserva la norma dei vettori) retta dall'operatore hamiltoniano H del sistema

$$\psi_t = U^t \psi_0 \ , \quad \text{dove} \qquad U^t = e^{-iHt/\hbar} \ .$$

   Equivalentemente, ψ_t è soluzione dell'equazione di Schroedinger

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi$$

   relativa la "dato iniziale" ψ_0.

5. Invece, quando (diciamo al tempo t_o) si compie la misurazione di una osservabile, diciamo A, trovando il valore a_n, allora lo stato "precipita" (o collassa) istantaneamente sulla direzione del corrispondente autovettore u_n. Ovvero: ad un tempo "immediatamente successivo" a quello della misurazione che ha fornito il vaolre a_n di A si ha (con evidente notazione)

$$\psi_0^+ = u_n \ .$$

Aggiungiamo qualche sommaria osservazione.

- Si noti il carattere assolutamente diverso delle due evoluzioni (libera, o indotta da una misurazione). L'evoluzione è descritta da due operatori che hanno natura matematica completamente diversa, unitaria o mediante proiettore. Sarebbe molto interessante approfondite la relazione matematica tra le due evoluzioni, mostrando come si possa riguardare la seconda evoluzione come un caso limite della prima.
- Dunque si fa uso dell'assioma sulla precipitazione (a seguito di una osservazione) per fissare lo "stato iniziale" del sistema. Si compie una misurazione, e allora lo stato iniziale è quello corrispondente, nel modo sopra indicato, al valore osservato, ovvero: lo stato iniziale che determina l'evoluzione libera successiva è dato da $\psi_0^+ = u_n$.
- L'assioma dato sopra per la probabilità dei valori di un'osservabile A, quando il sistema si trova nello stato ψ, è una particolarizzazione di un assioma generale, la cui origine si trova in un interessantissimo lavoro di Heisenberg. Lo si può formulare come segue.

  Assioma: Assegnati due stati ψ, φ, ciascuno di essi "si trova parzialmente anche nell'altro", e "la probabilità che l'uno possa essere osservato nell'altro" [3] viene espressa attraverso il loro prodotto scalare, essendo data dalla quantità

  $$|(\psi, \varphi)|^2 .$$

  La cosa si controlla subito osservando che, nella notazione usata più sopra, si ha $c_n = (u_n, \psi)$.

Il problema dei parametri nascosti

Il problema se le osservabili abbiano dei valori anche quando non le si osservi ha una lunga storia, e va generalmente sotto il nome di *problema dei parametri nascosti*. Infatti, fin dagli inizi della meccanica quantistica venne subito dibattuto se fosse possibile "completarla" aggiungendo, all'informazione fornita dallo stato ψ, l'ulteriore informazione fornita dai valori assunti da altre coordinate, dette *parametri nascosti* (*"hidden parameters"*, in tedesco *"verborgene parameter"*[4]). La

[3] La formulazione qui data può certamente apparire oscura. Dirac dà la seguente. formulazione (paragrafo 18, pag 76 dell'ultima edizione – la quarta – del 1958). Egli si riferisce al caso in cui ψ è l'autostato di un operatore A relativo a un suo certo autovalore a, mentre φ è l'autostato di un altro operatore B, relativo all'autovalore b:

$$A\psi = a\psi \ , \quad B\varphi = b\varphi \ .$$

Allora $|(\varphi, \psi)|^2$ è la probabilità (probabilità condizionata) che la seconda osservabile B abbia il valore b se il sistema è nello stato in cui la prima osservabile A ha certamente il valore a. E viceversa.

[4] Questo è il nome classico che risale a Helmholtz, Boltzmann. Naturalmente, nei paesi di lingua tedesca questo è ancora il termine corrente. Si veda, reperibile in rete, la conferenza di Kedar S. Ranade, *Verborgene Parameter und die Bellsche Ungleichung*, Technische Universität Darmstadt (2003).

conoscenza di tali parametri ripristinerebbe una "conoscenza completa dello stato del sistema", dalla quale si dovrebbero ottenere le previsioni della meccanica quantistica compiendo operazioni di media sui parametri nascosti.

Si tratta di un procedimento analogo a quello che si compie in termodinamica statistica. Infatti la termodinamica (scienza macroscopica) viene "dedotta" in meccanica statistica partendo da un modello microscopico che fa intervenire parametri nascosti (che non si osservano e sono incontrollabili), le posizioni e le velocità delle molecole di un gas. In tal modo si "spiega" la termodinamica, in quanto questa viene ottenuta dalla dinamica microscopica attraverso operazioni di media sugli stati microscopici, pesati ad esempio con la misura di Gibbs.[5]

Sul problema dei parametri nascosti in meccanica quantistica pareva che una risposta definitiva (in senso negativo; non sarebbero possibili teorie a parametri nascosti per la meccanica quantistica) fosse stata data da von Neumann, con un argomento esposto nel suo celebre libro,[6].[7] Oggi l'argomento di von Neumann viene talvolta ritenuto irrilevante, a causa dell'opinione espressa da Bell nel suo secondo lavoro sull'argomento,[8] in cui, dopo avere indicato l'obbiettivo dicendo *"An attempt will be made to clarify what von Neumann and his successors actually demonstrated"*, conclude: *"It will be urged that these analyses leave the total question untouched"*, dicendo addirittura che egli *"can restate the position with such a clarity and simplicity that all previous discussions will be eclipsed"*! [9] Come abbiamo già detto, non siamo sicuri che Bell abbia ragione, e ci ripromettiamo di tornare su questo argomento in un'altra occasione.

15.2 Einstein, Podolski e Rosen (EPR)

Ma soprattutto le argomentazioni di von Neumann vennero ignorate da Einstein, Podolsky e Rosen.[10] Questi autori, come se niente fosse, se ne escono nel 1935 con un lavoretto di quattro pagine sul Physical Review, in cui riaprono il problema sul "realismo", ovvero sulla possibilità di una teoria, logicamente consistente e allo stesso tempo compatibile con la MQ, in cui le osservabili abbiano

[5]Si potrebbe obiettare che un effetti si osserva un singolo sistema, che si dovrebbe trovare in uno stato ben determinato, e quindi obiettare sul signifucato di prendere una media sui dati iniziali. La risposta dovrebbe essere che sotto condizioni molto generali, per sistemi macroscopici il valore medio praticamente coincide con il valore concreto che corrisponde a tutte i singoli stati iniziali "tipici". Comunque, questo è in effetti un problema di fondo che ha molto aspetti sottili.

[6]J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik*, Springer–Verlag (Berlin, 1932, 1981, 1996), trad, italiana a cura di G. Boniolo. Il poligrafo (Padova, 1998), Cap. IV, Sex. 1, 2.

[7]Il lettore può leggere ad esempio la versione della dimostrazione di von Neumann datane sull'American Journal of Physics nel 1961. Si veda J. Albertson, *Am. J. Phys.* **29**, 478 (1961).

[8]J.S. Bell, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 447 (1966).

[9]Si veda anche quanto viene detto a questo proposito nel libro di S. Weinberg, *Dreams of a final theory*, Pantheon Books (New York, 1992), (pagg. 78 e seguenti) che non abbiamo ancora avuto il tempo di studiare.

[10]A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can quantum–mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777–780 (1935).

un valore anche se non vengono osservate (o misurate). L'aspetto caratteristico del loro approccio, è che essi pretenderebbero di compiere questa discussione dall'interno, ovvero muovendosi nell'ambito stesso degli assiomi della meccanica quantistica che erano da tutti accettati.

Ad esempio, come vedreno fra poco, EPR considerano un sistema di due oarticele ed argomentano che si possano assegnare posizione e momento ad una particella (particella II) senza bisogno di osservarla. Il cuore del loro argomento è che, almeno per degli stati particolari, l'informazione sulla particella II viene compiuta compiendo i misurazioni su un'altra particella (particella I), così lontana dalla seconda da potersi ritenere che la misurazione compiuta sulla prima non perturbi la seconda.

Si vede dunque che nell'argomentazione di EPR si presenta un intreccio profondo tra meccanica quantistica e relatività (si tratta del cosiddetto "*problema della località*"), riguardante il modo in cui si possono "influenzare" oggetti lontani, tramire segnali che si propagano al più alla velocità della luce. Il punto delicato è che gli assiomi della meccanica quantistica posti in discussione sono formulati in un ambito nonrelativistico.

Il lavoro EPR, di quatto pagine, consta di due paragrafi. Nel primo, non facilissimo a leggersi, gli autori si dilungano a dichiarare, a parole, che cosa vogliono fare. In effetti, a nostro parere questo (cosa vogliano fare) si capisce benissimo leggendo il paragrafo 2, nel quale danno delle formule concrete su cui si può appoggiare l'attenzione.

15.2.1 Descrizione dettagliata del lavoro

Cuore del primo paragrafo

Lasciamo al lettore il piacere di leggere il primo paragrafo, e qui ne tratteniamo soltanto la conclusione che gli autori traggono rispetto al decidere se una proprietà sia reale o no. Nelle loro parole:

"We shall be satisfied with the following criterion, which we regard as reasonable. If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity." Ovvero: Se possiamo predire con certezza il valore di una osservabile senza osservarla, allora possiamo dire che quella osservabile possiede "realmente" quel valore.

Secondo paragrafo, prima parte

Veniamo dunque al secondo paragrafo di EPR, che si legge benissimo. Ne diamo qui un riassunto volutamente non troppo dettagliato, per stimolare il lettore a passare alla lettura diretta.

Gli autori considerano un sistema composto da due sottosistemi I e II che interagiscono al tempo 0 e poi si separano. Si pensi tipicamente a due particelle prodotte da una disintegrazione nucleare, che dopo un tempo brevissimo si allontanino in direzioni opposte, avendo momenti opposti, *come particelle libere, senza alcune mutua interazione*. Allora l'osservazione viene compiuta sul sistema I (osservando una di due osservabili non commutanti A e B di I), dopo un tempo tanto grande che i due sistemi si siano talmente allontanati da potersi supporre che la misurazione compiuta su I non influenzi in alcun modo lo stato del sistema do interesse (sistema II). Diciamo che il sistema delle due particelle è inizialmente a Milano, e che le due particelle a un certo tempo successivo si trovano una a Tokyo e l'altra a New York. Per questo motivo, il paradosso EPR è intrinsecamente legato alla proprietà di *località*: si fanno delle osservazioni locali sul primo sistema, ammettendo che non influenzino il sistema II, che è quello di cui ci occupiamo.

Gli autori anzitutto richiamano un fatto generale ben noto, riguardante un sistema composto di due sottosistemi, che costituisce il cuore di tutto il lavoro. Si tratta del fatto che una osservabile, diciamo A, di I è anche una osservabile del sistema totale: dunque, se misuriamo l'osservabile A di I facciamo precipitare lo stato totale, e pertanto si ottiene un ben definito stato anche per II, anche se questo'ultimo è lontano. Analogamente, osservando una osservabile B, sempre di I, si ottiene un diverso ben definito stato di II. Siano $u_k(x_1)$ gli autostati di A e $v_s(x_1)$ quelli di B.

Sia $\Psi(x_1, x_2)$ lo stato del sistema completo al momento in cui si compie l'osservazione sul primo sistema. Ovviamente consideriamo uno stato generico, ovvero che non sia fattorizzato nella forma $\Psi(x_1, x_2) = \Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)$ (uno stato non fattorizzato viene detto, con terminologia dovuta a un successivo lavoro di Schroedinger, *entangled*, ovvero "intrecciato").[11] Allora possiamo sviluppare Ψ su una base o sull'altra, con coefficienti dipendenti parametricamente da x_2, e si avrà[12]

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2) &= \sum_k \psi_k(x_2) u_k(x_1) \\ \Psi(x_1, x_2) &= \sum_s \varphi_s(x_2) v_s(x_1)\,. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Pertanto, se misurando l'osservabile A del sistema I trovo il valore a_k, allora lo stato Ψ precipita (o collassa) sullo stato $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$, il che vuol dire che il secondo sistema si trova nello stato $\psi_k(x_2)$. Se invece misuro B e trovo b_s, allora "faccio precipitare" sistema II su un altro stato, ovvero $\varphi_s(x_2)$.

Nelle parole di EPR, "*We see therefore that, as a consequence of two different measurements performed upon the first system, the second system may be left in states with two different wave functions.*"

Ma... "*On the other hand, since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system*[13]. *Thus* it is possible to assign two different wave functions

[11] Si veda E. Schroedinger, ...

[12] Si fissi x_2. Allora $\Psi(x_1, x_2)$ definisce una funzione di x_1, che potrà essere sviluppata sulla base $\{u_k(x_1)\}$ con certi coefficienti c_k. Ma tali coefficienti dipendono dal valore fissato di x_2, ovvero sono funzioni di x_2, che potremo chiamare $\psi_k(x_2)$, cioè corrispondono a una funzione d'onda (uno stato) del sottosistema I.

[13] "This is, of course, merely a statement of what is meant by the absence of an interaction between the two systems".

(in our example ψ_k and φ_r) to the same reality (the second system after the interaction with the first).”

A questo punto ci si potrebbe fermare, perché questo è sostanzialmente il cuore di tutto il lavoro EPR, e concerne già anche il caso di una singola osservazione di un sistema composto da due sottosistemi che si siano allontanati l’uno dall’altro. Se compio una misurazione della osservabile A di I, evidentemente perturbandolo in qualche modo, determino anche lo stato di II, *“without in any way perturbing it”*.

Secondo paragrafo, seconda parte

Veniamo comunque alla seconda parte del paragrafo 2, in cui gli autori danno un esempio concreto[14]. A prima vista, questo esempio sembrerebbe non aggiungere nulla di sostanziale. Vi è però un punto significativo, che riguarda la connessione di tale esempio con la successiva osservazione critica di Bohr. Vale dunque la pena di soffermarsi anche su questa parte.

L’ esempio riguarda il caso in cui si ha un sistema di due particelle su una retta, e le osservabili A, B sono la posizione Q e il momento P della prima particella. Gli autori assumono che lo stato del sistema totale (nel momento in cui si compie la misurazione su I) sia quello dato dalla “funzione impropria”

$$\Psi(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x_1-x_2+x_0)p/\hbar}\mathrm{d}p$$

dove x_0 è una costante. Ricordando $\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ipx}\mathrm{d}p$, si vede subito che questa è proprio la funzione

$$\Psi(x_1,x_2)=2\pi\delta(x_1-x_2+x_0)\ .$$

Si tratta dunque di uno stato in cui la distanza tra le due particelle è uguale ad x_0:

$$x_2-x_1=x_0\ .$$

Si constata poi immediatamente che in questo stato si ha anche

$$p_1+p_2=0\ ,$$

dove p_j è il momento della particlella $j=1,2$. In effetti si constata subito che il sistema di due particelle libere su una retta ha due costanti del moto, momento totale e differenza tra le posizioni delle due particelle, e che si tratta di due osservabili che commutano.[15]

[14]Essi usano formalmente le autofunzioni improprie alla Dirac, ma questo non è per noi un problema.

[15]Infatti, ricordando le regole di commutazione canoniche $[p_j,x_k]=-i\hbar\delta_{jk}$, si ha

$$[p_1+p_2,x_1-x_2]=[p_1,x_1]-[p_2,x_2]=0\ .$$

Invece, ovviamente, si ha $[p_1+p_2,x_1+x_2]\neq 0$, corrispondentemente al fatto che momento totale e centro di massa di un sistema composto si comportano come momento e posizione di una particella singola, e quindi hanno commutatore uguale a $-i\hbar$.

Gli autori considerano le osservabili $A = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}$, momento $\hat{p}_1$ della particella 1, e $B = \hat{x}_1$, posizione della particella 1, che hanno autofunzioni improprie rispettivamente

$$\begin{aligned} u_p(x_1) &= e^{i p x_1} \\ v_x(x_1) &= \delta(x - x_1)\,, \end{aligned} \tag{15.2}$$

e mostrano che, nello stato Ψ considerato, se si osserva il momento della prima particella e si trova p, allora la seconda viene ad avere momento $-p$. Se invece, nello stesso stato, si osserva la posizione della prima particella e si trova x, allora risulta che la posizione della seconda particella ha un valore definito, esattamente $x + x_0$.

Sulla base di tale esempio, gli autori concludono: *"Then, by measuring either A (cioè p_1) or B (cioè x_1) we are in a position to predict with certainty, and without in any way disturbing the second system, either the value of the quantity P (cioè p_2) ... or the value of the quantity Q (cioè x_2)"* Quindi, secondo il criterio di "realtà" introdotto nel primo paragrafo (*if, without in any way perturbing, ...*) la seconda particella, descritta dallo stato quantistico Ψ del sistema totale, avrebbe realmente un valore della posizione, sia un valore del momento. E questo, si noti bene, come conseguenza degli assiomi della teoria "ortodossa".

Alcuni commenti.

- Effettivamente non sembra chiarissimo cosa questo argomento di EPR implichi. Infatti da una parte, poiché è a piacimento del primo ooservatore fare in modo che la seconda particella abbia un definito valore della posizione oppure un valore del momento (a seconda che il primo misuri posizione oppure momento), e allora sembrerebbe ragionevole concludere che tali valori debbano realmente esistere indipendentemente dal fatto che avvenga o non avvenga la misura del primo osservatore (perché questi non influenza il secondo): la particella II ha "realmente" sia una posizione sia un momento. D'altra parte i due corrispondenti valori dipendono dal risultato della misurazione compiuta su I (perché lo stato su cui precipita la seconda dipende dallo stato su cui è precipitatata la prima). Quindi la particella II non "ha" dei valori definiti di posizione e momento. Dunque, al minimo resta ancora qualcosa in più da capire.

- Facciamo notare per inciso che, mediante la misurazione di x_1 determiniamo non la coordinata x_2 della seconda particella , ma più propriamente la differenza $x_2 - x_1$, ovvero la distanza della seconda particella dalla prima. Questa osservazione è il cuore della critica di Bohr ad EPR, che qui anticipiamo: *"Se si conosce la posizione della seconda particella rispetto alla prima, allora ci deve essere un unico sistema di riferimento inerziale per entrambe, diciamo costituito di connessioni rigide. Quindi una misurazione sulla prima particella, che sappiamo disturbare il sistema di riferimento, attraverso la connessione rigida finisce col disturbare anche la misurazione della seconda particella"*. In conclusione (è questa l'osservazione di Bohr), non è vero quanto affermato da Einstein e compagni, ovvero che la misurazione sulla prima particella non perturba la seconda.

- Facciamo anche osservare che questo tipo di informazione sulla particella 2, che si ottiene mediante osservazioni sulla particella 1 in virtù dell'esistenza di una costante del moto ($x_2 - x_1 - x_0$ oppure $p_1 + p_2$), potrebbe apparire per certi aspetti del tutto familiare. Si pensi a due amici che partono da Milano per andare uno a New York e l'altro a Tokyo, e prima di partire abbiano preso ciascuno un guanto o una scarpa da uno stesso paio di guanti e da uno stesso paio di scarpe. Dunque, se il primo amico a Tokyo guarda il guanto che ha in tasca e vede ad esempio che è destro, egli saprà, senza disturbare l'amico a New York, che l'amico ha il guanto sinistro. Oppure, se guarda la scarpa che ha nel sacco e trova che è sinistra saprà, senza disturbare l'amico a New York, che l'amico ha la scarpa destra.

- Tuttavia, relativamente alla precedente osservazione, nel nostro caso si ha un elemento nuovo. Perché secondo il postulato di precipitazione non si tratta solo di venire a sapere quale è la scarpa dell'amico a New York, ma del fatto che la scarpa dell'amico a New York *assume* quella proprietà (essere destra o sinistra) solo quando l'amico a Tokyo guarda la propria scarpa. Questo sembra essere il motivo per cui, nella conclusione dell'articolo, gli autori commentano come il loro argomento indichi che la meccanica quantistica sia una teoria non completa, secondo la definizione che essi avevano dato nel paragrafo 1: *"We are thus forced to conclude that the quantum–mechanical description of physical reality given by the wave function is not complete"*. E infine: *"While we have thus shown that the wave function does not provide a complete description of physical reality, we left open the problem whether or not such a descripton exists. We believe, however, that such a theory is possible."*

15.2.2 La risposta di Bohr. I commenti di Einstein e la sua "profonda solitudine" a Princeton

All'articolo di EPR venne fornita una risposta da Bohr, con un articolo dal medesimo titolo, pubblicato pochi mesi dopo nella medesima rivista.[16]

La risposta di Bohr

Rimandiamo ad una futura nuova versione di queste note una discussione più dettagliata di tale lavoro. Qui basti ricordare che Bohr contesta la affermazione centrale di EPR, ovvero che l'osservazione fatta sul sistema I non influenzi in alcun modo il sistema II. Si ricordi quanto avevamo anticipato poco sopra, cioè che il primo osservatore ha una informzione su $x_2 - x_1$ e non sulla coordinata x_2. Ebbene, Bohr fa notare che, affinché si possa affermare che la seconda particella ha una precisa posizione rispetto alla prima, è necessario che l'apparato di misura della posizione della seconda particella sia rigidamente connesso con l'apparato di misura della posizione della prima. D'altra parte ben sappiamo (come ci ha insegnato Heisenberg) che l'osservazione della posizione della prima particella comporta necessariamente un (incontrollato) trasferimento di momento

[16]N. Bohr, *Can quantum–mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **48**, 696–702 (1935).

dalla particella all'apparato di misurazione[17], e quindi, a causa della connessione rigida, anche all'apparato di misura della seconda particella. Si avrebbe quindi una perturbazione anche sulla seconda particella, come se essa fosse osservata direttamente. Come vedremo nel prossimo capitolo, una perturbazione del tipo di quella indicata da Bohr si produce in effetti negli esperimenti del tipo di Aspect, che furono condotti negli anni settanta per verificare la disuguaglianza di Bell. Tuttavia la perturbazione si origina in un modo diverso da quallo concepito da Bohr, e risulta non essere in contrasto con il principio di causalità.

Tra l'altro, nell'articolo Bohr sembra prendersi in qualche modo gioco di Einstein, perché nella nota a pag. 701 egli commenta come la necessità di fare ricorso al principio di complementarità (che dovrebbe essere, nella terminologia di Bohr, il cuore stesso della sua obiezione ad EPR) provenga proprio dalla teoria della relatività, e quindi da Einstein stesso: *"Just this circumstance ... ensures the compatibility between the argumentation outlined in the present article and all exigencies of relativity theory ... The writer will discuss a very interesting paradox suggested by Einstein concerning the application of gravitation theory to energy measurements, and the solution of which offers an especially instructive illustration of the generality of the argument of complementarity."*

L' "Einstein Festschrift"

La discussione tra Bohr e Einstein che, ancor prima de3l 1935 aveva avuto inizio alla conferenza Solvay del 1927, ebbe un seguito nel contributo che Bohr scrisse per l'*Einstein Festschrift*, una serie di articoli che diversi autori scrissero in occasione del settantesimo compleanno di Einstein, nel 1949 (sei anni prima della sua morte, avvenuta nel 1955).[18] A ciascuno di tali contributi Einstein diede una risposta nella interessantissima *Reply to authors*. Di speciale interesse è poi la **autobiografia scientifica** di Einstein, che apre il volume. Ma nell'articolo di Bohr non si trova nulla di sostazialmente nuovo. L'unico punto rilevante è che, nella sua risposta, Einstein ammette che Niels Bohr è l'autore *"that seems to me to have come nearest to doing justice to the problem"*.

Vale la pena di riportare tutto il commento, peraltro breve, di Einstein (pag. 682). Anzitutto c'è l'inizio, interessante, dove dice cosa intende per "ortodosso".

"And now just a remark concerning the discussion about the Einstein–Podolsky–Rosen Paradox. I do not think that Margenau's defense of the "orthodox" quantum position ("orthodox" refers to the thesis that the ψ–function characterizes the individual *system* exhaustively[19]*) hits the essential aspects. Of the"orthodox" quantum theoreticians whose position I know, Niels Bohr seems to me to come nearest to doing justice to the problem."*

Poi continua

[17] Abbiamo già osservato che era questo un cavallo di battaglia di Heisenberg, il quale ne deduceva qualitativamente la necessità del principio di indeterminazione.

[18] P.A. Schilpp, *Albert Einstein: philosopher–scientist*, Tutor (New York, 1951). Traduzione italiana Einaudi (Torino, 1958).

[19] Se ci sono parametri nascosti, le informazioni che si ottengono riguardano un *ensemble* di sistemi, come in meccanica statistica, e non un singolo sistema.

"Translated into my own way of putting it, he argues as follows: If the partial systems A and B form a total system[20] *which is described by its ψ-function $\psi(AB)$, there is no reason why any mutual independent existence (state of reality) should be ascribed to the partial systems A and B viewed separately, not even if the partial systems are spatially separated from each other at the particular time under consideration. The assertion that, in this latter case, the real situation of B could not be (directly) influenced by any measurement taken on A is, therefore, within the framework of quantum theory, unfounded and (as the paradox shows) unacceptable.*

Qui dunque Einstein sembra proprio dare ragione a Bohr: secondo la meccanica quantistica, una ossrevazione sulla particella 1 influisce sulla particella 2. In effetti, le cose sono un poco più complicate, perché subito dopo aggiunge:

"By this way of looking at the matter it becomes evident that the paradox forces us to relinquish one of the two following assertions:

1. *the description by means of the ψ-function is complete*
2. *the real states of spatially separated objects are independent of each other.*

On the other hand, it is possible to adhere to (2), if one regards the ψ-function as the description of a (statistical) ensemble[21] *of systems (and therefore relinquishes (1)). However, this view blasts the framework of the "orthodox quantum theory".*

Osservazione. Critica di Bohr e località. Si noti che la seconda proprietà indicata da Einstein (particelle in posizione mutua di tipo spaziale non si influenzano) viene comunemente denotata con il nome di **località**. Dunque Einstein afferma che sarebbe possibile una teoria locale a variabili nascoste. Vedremo che il contributo di Bell consisterà proprio nel dimostrare che invece dovrebbe essere impossibile una teoria locale a parametri nascosti. Ma, come anche vedremo, forse le cose sono ancora più complicate.

La "profonda solitudine" di Einstein

Dunque Einstein sembrò dare in qualche modo ragione a Bohr, anche se non appariva completamente convinto. Egli "sentiva" che "c'era ancora qualcosa da capire", ma non era in grado di portare questa sensazione fino a concepire qualche proposta di teoria che portasse a delle formule concrete. Come abbiamo ripetutamente sottolineato in queste note, in fisica, al di là delle affermazioni di principio, sono le formule quelle che "fanno una teoria".

In ogni caso, in qualche modo la comunità scientifica (una entità sociologica difficile a definirsi, ma avente una realtà ben corposa – non dice Einstein stesso che esistono i fisici "ortodossi" ?) si convinse che Einstein avesse sostanzialmente torto. Questo è ben testimoniato dal lavoro che Heisenberg scrisse nel 1955 in occasione del convegno organizzato per il settantesimo compleanno di Bohr.[22] In

[20] Qui la notazione non è più quella du EPR. Qui A e B stanno per I e II.

[21] Questo è il punto cruciale delle consioderazioni di Einstein. La funzione ψ desriverebbe le proprietà statistiche di un insieme di sistemi, come si fa in meccanica statistica, e non un singolo sistema.

[22] W. Heisenberg, *The development of the interpretation of the quantum theory*, in *Niels Bohr and the development of Physics*, edited by W, Pauli, L. Rosenfeld e V. Weisskopf, Pergamon Press (New York, 1955).

tale lavoro, dedicato proprio a questioni di fondamento (si osservi il titolo: *"The development of the interpretation of the quantum theory"*), Heisenberg neppure menziona il lavoro EPR, come se per delicatezza non volesse infierire su Einstein, approfittando di una sua "bufala", potremmo dire o, se vogliamo, di una sua "svista". Si capisce così, per inciso, come sia potuto accadere che Einstein, in una sua celebre lettera a Schroedinger in cui discute brevemente il "paradosso del gatto", confessasse di trovarsi a Princeton *"in prodonda solitudine"*.[23]

Born vs Einstein. Molto interessante, per quanto riguarda i rapporti della comunità scientifica con Einstein, è anche l'atteggiamento di Born, che si trova illustrato particolarmente in tre articoli raccolti nel volumetto M. Born, *Physics in my generation*, Springer Verlag (New York, 1969). Born cita il lavoro EPR (aderendo al giudizio di Bohr) nel suo contributo al volume per i settanta anni di Einstein (pag. 53 del citato volumetto *Physics in my generation*). Ma poi non lo cita più, né nella sua *"Nobel Lecture"* del 1955 dal titolo *"Statistical interpretation of quantum mechanics"* (pag. 89 del citato libretto), né nel lavoro *"In memory of Einstein"* (pag. 155). Nel primo di questi tre lavori, dopo avere descritto i grandi contributi di Einstein dell'inizio secolo dice: *"That is the core of the young Einstein, thirty years ago... The Einstein of today is* changed..." (pag. 62). E nell'ultimo dei tre lavori, a pag. 163, dopo avere ricordato una corrispondenza con Einstein a proposito delle relazioni tra dinamica e probabilità, dicendo che *"the resulting correspondence is a jumble of misunderstandings, and some of his letters reveal a little irritation"*, a pag. 164 dice addirittura *"This is a way of thinking diametrically opposed to Einstein's own, and it is not surprising that he looked upon me as a* renegade". Testimonianze analoghe si trovano ripetutamente nelle lettere tra Einstein e Born, pubblicate e commentate da Born stesso.[24]

15.3 The classical program, primo febbraio 1949

Abbiamo poco sopra parlato dell'*Einstein Festschrift*, la celebrazione organizzata per i settantanni di Einstein, con la raccolta di articoli di molti autori. C'erano tutti i grandi, tranne tre *"da tre nazioni diverse"*, cui si fa riferimento nella prefazione, presumibilmente Heisenberg, Dirac e Schroedinger. Dopo gli articoli dei vari autori, l'ultima parte del libro (da pag. 664 fino alla fine, pag. 687) contiene la *Reply to criticisms*, in cui Einstein risponde ai vari autori, con uno scritto datato primo febbraio 1949 (vi è inoltre anche l'altro interessantissimo contributo di Einstein che abbiamo già avuto occasione di citare, ovvero l'autobiografia scientifica, nell'originale tedesco con versione inglese, presentata come inizio del volume).

Quasi tutta la *Reply* è sostanzialmente dedicata a una difesa della sua posizione critica verso l'interpretazione corrente (chiamata nel testo "ortodossa") della meccanica quantistica, sostenuta da quelli che Einstein chiama i *"quantum theoreticians"*. Riproduciamo qui anzitutto alcuni passi di questa difesa. Ci ripromettiamo di aggiungerne in futuro altre citazioni prese da altri contributi di

[23] *Letters between Einstein and Schrödinger* Przbaum ed.

[24] *Einstein–Born correspondance, 1916–1955*, Editions du Seuil (Paris, 1969).

Einstein Per inciso, vogliamo anche ricordare che per questa sua posizione Einstein si sentiva, a Princeton, *in profonda solitudine*", come testimoniato da una lettera a Schroedinger in cui discuteva del celebre gatto.[25].

Anzitutto c'è l'affermazione della sua posizione di principio (pag. 666 in alto)

"I reject the basic idea of contemporary statistical quantum theory, insofar as I do not believe that this fundamental concept will provide a useful basis for the whole of physics."
cui si aggiunge subito dopo il riconoscimento del fatto che la teoria quantitica debba essere ritenuta giusta (stessa pagina, in basso)

"Above all, however, the reader should be convinced that I fully recognize the very important progress which the statistical quantum theory has brought to theoretical physics. In the field of mechanical problems, ... the theory even now presents a system which, in its closed character, correctly describes the empirical relations between statable phenomena as they were theoretically to be expected. .... The formal relations which are given in this theory – i.e., its entire mathematical formalism – will probably have to be contained, in the form of logical inferences, in every useful future theory."

Ma subito aggiunge:

"What does not satisfy me in that theory, from the standpoint of principle, is its attitude towards that which appears to me to be the programmatic aim of all physics: the complete description of any (individual) real situation (as it supposedly exists irrespective of any act of observation or substantiation)."

Un pietoso sorrriso... Pazienza!

E ascoltate ora il bellissimo seguito:

"Whenever the positivistically inclined modern physycist hears such a formulation his reaction is that of a pitying smile (un pietoso sorriso). He says to himself: "there we have the naked formulation of a metaphysical prejudice, empty of content, a prejudice, moreover, the conquest of which constitutes the major episthemological achievement of physicists within the last quarter–century. Has any man ever perceived a 'real physical situation'? How is it possible that a reasonable person could today still believe that he can refute our essential knowledge and understanding by drawing up such a bloodless ghost?" Patience (Pazienza)!"

E continua:*"The above laconic characterization was not meant to concince anyone. It was merely to indicate the point of view around which the following elementary considerations freely group themselves."* Dice poi che comincerà con l'indicare quello che gli sembra essenziale, considerando alcuni semplici casi, per giungere poi a fare *"a few remarks about some more general ideas which are involved."*

Egli considera dunque l'esempio del decadimento radioattivo, che è simile all'esempio del gatto di Schroedinger (citato a pag. 670). La conclusione di

[25]Lettere tra Einstein e Schroedinger, Przbaum editor

tutti questi discorsi è tratta a pag. 671–672, dove dice che secondo lui la teoria quantistica non è completa. Il modo in cui si esprime è il seguente:

> "Roughly stated the conclusion is this. Within the framework of statistical quantum theory there is no such thing as a complete description of the individual system. More cautiously it might be put as follows: *The attempt to conceive the quantum theoretical description as the complete description of the individual system leads to unnatural theoretical interpretations, which become immediately unnecessary if one accepts that the interpretation refers to ensembles of systems and not to individual systems.* In that case the whole 'egg–walking' (camminare sulle uova) performed in order to avoid the 'physically real' becomes superfluous."

Dunque questo è il punto cruciale: se la meccanca quantistica descriva un singolo sistema, o un *ensemble* di sistemi, nel senso consueto della meccanica statistica. [26]

Ma la strada sarà lunga e difficile.

Dopo la frase appena citata, Einstein aggiunge poi una interessante considerazione (pag. 672): " *There exists, however, a simple psycological reason for the fact that this most nearly obvious interpretation is being shunned (evitata). For if the statistical quantum theory does not pretend to describe the individual system (and its development in time) completely, it appears unavoidable to look elsewhere for a complete description of the individual system; in doing so it would be clear from the very beginnings that the elements of such a description are not contained in the conceptual scheme of the statistical quantum theory. With this one would admit that, in principle, the scheme could not serve as the basis of theeoretical physics. Assuming the success of efforts to accomplish a complete physical description, the statistical quantum theory would, within the framework of future physics, take an approximately analogous position to the statistical mechanics within the framework of classical mechanics. I am rather firmly convinced that the development of theoretical physics will be of this type: but the path will be lengthy and difficult.*"

E continua " *I now imagine a quantum theoretician who may even admit ...*", ma lasciamo al lettore il piacere della lettura dell'originale, a pag. 672–674, e veniamo alla pag. 674 (e ultima riga di pag. 673), dove Einstein dà una traccia, una flebile indicazione, di come intende il programma che gli piacerebbe perseguire. Questo egli spiega rispondendo ad una amichevole accusa.

[26] Nel caso tipico della legge di Planck per un *risonatore materiale*, il problema è se stiamo discutendo dell'energia di un singolo risonatore, oppure dell'energia *per* risonatore, ovvero *dell'energia specifica*, cioè l'energia totale di un sistema di N risonatori divisa per il numero N di risonatori (supposto grandissimo, dell'ordine del mumero di Avogadro). In un altro tipico esempio, è proprio vero, come dice Dirac all'inizio del suo libro, che un fotone interferisce con se stesso?

Risposta ad una amichevole accusa: Rigid adherence to classical theory

Anzitutto dice: *“The above mentioned essays by Bohr and Pauli contain a historical appreciation of my efforts in the area of physical statistics and quanta and, in addition, an accusation, which is brought forward in the friendliest of fashion. In briefiest formulation the latter runs as follows:“Rigid adherence to classical theory”.*

E aggiunge:

“This accusation demands either a defense or the confession of guilt. The one or the other is, however, being rendered much more difficult because it is by no means immediately clear what is meant by “classical theory”. Newton’s theory deserves the name of a classical theory. It has nevertheless been abandoned since Maxwell and Hertz have shown that the idea of forces at a distance has to be relinquished and that one cannot manage without the idea of continuous “fields”. The opinion that continuous fields are to be viewed as the only acceptable basic concepts, which must also be assumed to underly the theory of the material particles, soon was cut. Now this conception became, so to speak, “classical”; but a proper, and in principle complete, theory has not grown out of it. Maxwell’s theory of the electric field remained a torso, ***because it was unable to set up laws for the behavior of electric density****, without which there can, of course, be no such thing as an electro–magnetic field. Analogously the general theory of relativity furnished then a field theory of gravitation, but no theory of the field–creating masses. (These remarks presuppose it as self–evident that a field–theory may not contain any singularities, i.e., any positions or parts in space in which the field–laws are not valid.”)*

“Consequently there is, strictly speaking, today no such thing as a classical field–theory; one can, therefore, also not rigidly adhere to it. ***Nevertheless, field–theory does exist as a program:*** *continuous functions in the four–dimensional continuum.* ***Rigid adherence to this program can rightfully be asserted of me.****”*

Osservazione. Questo è un punto cruciale per la possibilità di implementare il programma classico di Einstein nel modo seguito dai presenti autori. Einstein dice che amerebbe considerare come modello classico un modello newtoniano, con particelle descritte da traiettorie soddisfacenti equazioni di Newton, ovviamente in versione ralativistica. Ma questo non sarebbe possibile quando si considerano le forze elettromagnetiche. Riteniamo che egli si riferisca al classico problema della divergenza del campo prodotto da una particella quando lo si valuti nella posizione della particella stessa (problema della self–force) e a casi analoghi di divergenza.[27] Per questo egli pensa allora che si debba ricorrere ad una teoria fondamentale in cui esistono solo i campi, e le particelle apparirebbere come manifestazioni del campo, tipicamente come avviene nella teoria dei solitoni. Naturalmente, questa è una via perseguibile, che però non è stata ancora sviluppata.

Noi facciamo presente che la teoria di Wheeler e Feynman (avamzata in maniera euristica nel 1945 e proposta in maniera formale nel 1948, poco prima della

[27]Si veda il capitolo 28 delle lezioni universitarie di Feynman sul campo elettromagnetico.

morte di Einstein), sia una via d'uscita che permette di formulare in maniera consistente una teoria coinvolgente soltanto particelle, con le loro traiettorie.. I campi scomparirebbero e costituirebbero solo un espediente per calcolare le forse (rirardate ed avanzate) agenti tra le particelle.

Capitolo 16

BELL, 1964

16.1 Il contributo di Bell

Nonostante la solitudine di Einstein, il problema sollevato da EPR tornò in auge nel 1964 con un lavoro di Bell.[1] Tale autore, pur confessando di essere con il cuore dalla parte di Einstein, portò un contributo che apparentemente andava in direzione contraria.

Egli infatti stabilì una disuguaglianza che deve essere soddisfatta da certe *correlazioni*[2], se queste sono calcolate nell'ipotesi che esistano parametri nascosti, e mostrò che tale disuguaglianza non è soddisfatta dai valori di aspettazione calcolati secondo le prescrizioni della meccanica quantistica.

In ogni caso, Bell ebbe il merito di contribuire alla discussione conferendole un carattere nuovo, portandola cioè al livello delle consuete discussioni scientifiche, che coinvolgono dimostrazioni di formule basate su ipotesi, che possono addirittura essere sottoposte anche a verifica sperimentale.

Seguirono infatti lavori sperimentali, di cui i più noti sono quelli di Aspect, [3] [4] che sono comunemente interpretati come evidenza contro l'esistenza di parametri nascosti.

Ma soprattutto la dimostrazione mette chiaramente in luce il ruolo svolto dalle ipotesi esplicitamente introdotte per dimostrare la disuguaglianza, par-

[1] J.S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964), in J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Collected Papers*, Cambridge U.P. (Cambridge, 1987).

[2] Nel caso di due variabili casuali, o *random variables*, la correlazione é definita come il valor medio del prodotto, meno il prodotto dei valori medi. Nel caso di Bell, i valori medi delle singole variabili (o osservabili) è nullo, e quindi la correlazione si riduce al valor medio del prodotto.

[3] A. Aspect, J, Dalibard, G. Roger, *Experimental test of Bell's inequalities using time–varying analyzers*, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804–1807 (1982); A. Aspect, Phys. Lett. **54**A, 117 (1975); Phys. Rev. D **14**, 1944 (1976); A. Aspect, P. Granger, G. Roger, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981); **49**, 91 (1982).

[4] Si veda anche J.F. Clauser, A. Shimony, Rep. Progr. Phys. **41**, 1981 (1978); J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969); J.F. Clauser, M.A. Horne, Phys. Rev. D**10**, 526 (1974); G. Bertolini, E. Diana e A. Scotti, Nuovo Cimento **63**B, No. 2 (1981).

ticolarmente il ruolo della cosiddetta *"vital assumption"*, che sostanzialmente ammonta a richiedere che la misurazione su una particella non abbia alcuna influenza su quella lontana. Si tratta della cosiddetta *"ipotesi di località"*, che sembrerebbe richiesta dalle prescrizioni della teoria della relatività.

Questo in effetti è il cuore dell'osservazione di Bohr, il quale aveva proprio obbiettato che, in virtù del principio di indeterminazione, si ha invece una perturbazione sulla particella "non osservata". Qui in certo senso continua il dialogo tra sordi.[5] Da una parte Bohr dice che c'è una influenza lontana, dovuta al principio di indeterminazione, e i suoi amici sembrano non citare Einstein per delicatezza. Dall'altra parte si insiste su fatto che questo sembra contraddire la relatività.

E in effetti, nella nota 2 del suo lavoro Bell riporta la seguente frase di Einstein, che egli ritiene centrale. *"But on one supposition we should, in my opinion, absolutely hold fast: the real factual situation of the system S_2 is independent of what is done with the system S_1, which is spatially separated from the former"* (pag. 85 del colume per il settantesimo compleanno di Einstein).

La situazione sembra dunque essere piuttosto intricata. Come si vedrà, i presenti autori ritengono di potere mostrare, nell'esempio dell'eletrodinamica classica di Dirac, che hanno ragione entrambi i gruppi di persone, anzi più di tutti avrebbe ragione Einstein, che riconosceva le ragioni di Bohr, ma manteneva tuttavia una riserva. Come vedremo, la soluzione a questo complicato intreccio di problemi, che viene fornito dalla elettrodinamica classica di Dirac, è davvero di un tipo molto speciale. Si ha una sorta di interazione lontana che viene imposta dalla condizione asintotica di Dirac, che abbiamo discusso nel Capitolo (14).

A prima vista ciò apparirebbe essere contro la causalità, ma d'altra parte (come dice Dirac stesso) sembrerebbe invece essere compatibile, perché si ha a che fare con una teoria relativistica. La situazione sembra essere simile a quella che si ha nel caso di WF, in cui si ha una proprietà di causalità microscopica che a prima vista sembrerebbe incompatibile con una forma ingenua di causalità. Si ha qui anche una analogia con il problema della irreversibilità macroscopica in meccanica statistica, peché abbiamo mostrato, nella prima parte delle note, come questa é una conseguenza della reversibilità microscopica.

In ogni caso, il lavoro di Bell aprì nuovi orizzonti, aprendo la via a *teleportation*, *crittografia quantistica* ed altro, di cui comunque qui non ci occuperemo

La disuguaglianza di Bell

Nella introduzione al suo lavoro,[6] Bell enuncia il problema nella maniera seguente. *"The EPR paradox was advanced as an argument that quantum mechanics could*

[5]Queste parole "dialogo rea sordi" si trovano proprio in un commento di Born nell'epistolario tra lui ed Einstein.

[6]J.S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964), in J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Collected Papers*, Cambridge U.P. (Cambridge, 1987).

not be a complete theory, but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. *It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty."*

Si noti per inciso che qui Bell sembra completamente ignorare la critica di Bohr, ovvero che l'osservazione sulla prima particella perturba anche la seconda. Anzi, non cita mai Bohr.

Poi, nel secondo paragrafo, Bell formula il problema riferendosi alla versione dell'argomento EPR che era stata data pochi anni prima da Bohm, e particolarmente da Bohm e Aharonov[7]. Si considerano ancora due particelle che hanno interagito, si separano e vengono osservate quando sono lontane, con la sola differenza che le osservabili incompatibili che si misurano sono, invece di posizione e momento, le componenti dello spin (si considerano particelle di spin 1/2) in tre direzioni diverse (ricordiamo che le relazioni di commutazione per le componenti dello spin sono le medesime che valgono in generale per le componenti del momento angolare). Il sistema viene preparato inizialmente in uno stato di singoletto. Questo comporta che se si osservano le componenti degli spin delle due particelle lungo una medesima direzione, allora certamente le due misurazioni devono dare risultati opposti. *"Consider a pair of spin one-half particles formed somehow in the singlet spin state and moving freely in opposite directions. Measurements can be made, say by Stern–Gerlach magnets, on selected components of the spins*[8] $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$. *If* [nello stato di sngoletto] *measurement of the component* $S^1_{\mathbf{a}} = \mathbf{S}^1 \cdot \mathbf{a}$, *where* $\mathbf{a}$ *is some unit vector, yields the value* $+1$ *(in unità* $\hbar/2$*) then, according to quantum mechanics, measurement of* $S^2_{\mathbf{a}}$ *yields the value* -1 *and vice versa."*

La condizione di singoletto verrà utilizzata nel seguente modo. Intendiamo occuparci delle misurazioni che si compiono per la componente dello spin di uno dei due sottosistemi, diciamo il primo (Bell scambia tra loro il primo e il secondo sottosistema, rispetto ad EPR), in direzioni diverse, diciamo due direzioni $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, mentre evidentemente su ogni singolo sottosistema è possibile eseguire misurazioni ogni volta solo in una direzione, diciamo $\mathbf{a}$. A questo rimediamo, preparando il sistema totale nello stato di singoletto e misurando il sottosistema che ci interessa (il primo) nella direzione $\mathbf{a}$ e il secondo nella direzione $\mathbf{b}$. Dunque il risultato osservato sul secondo assicura che il primo, se fosse stato osservato nella medesima direzione $\mathbf{b}$, avrebbe dato un risultato ben preciso, opposto a quello effettivamente osservato sul secondo: nello stato di singoletto si è garantiti che

[7] D. Bohm, Y. Aharonov, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957).

[8] Bell denota $\mathbf{S}^j$, $j = 1, 2$, con la lettera σ_j.

vale

$$S^1_{\mathbf{b}} = -S^2_{\mathbf{b}}\ . \tag{16.1}$$

Questo è l'analogo di quanto avveniva per il momento nell'esempio considerato da EPR: se osservo che una particella ha momento p, allora l'altra ha momento $-p$. (si ricordino i guanti destro e sinistro dei due amici).

Poi Bell aggiunge: *"Now we make the hypothesis, and it seems one at least worth considering, that if the two measurements are made at places remote from one another the orientation of one magnet does not influence the result obtained with the other. Since we can predict in advance the result of measuring any chosen component of* $\mathbf{S}^2$*, by previoulsy measuring the same component of* $\mathbf{S}^1$*, it follows that the result of any such measurement must actually be predetermind. Since the initial quantum mechanical wave function does not determine the result of an individual measurement, this predetermination implies the possibility of a more complete specification of the state."*

Dunque, Bell introduce l'ipotesi dei parametri nascosti, cioè che le osservabili abbiano effettivamente dei valori, i quali sono individuati dall'assegnazione di variabili, che egli denota con λ, non accessibili alle osservazioni. Si ammette allora che i valori effettivamente osservati in una successiva misurazione corrispondano ai valori medi (o valori di aspettazione) rispetto a una distribuzione di probabilità assegnata per i parametri nascosti, come avviene im meccanica statistica classica quando si assegna una densità di probabillità ρ nello spazio delle fasi del sistema considerato.

Nel nostro caso avremo allora due osservabili $S^1_{\mathbf{a}}$, $S^2_{\mathbf{b}}$, spin della particella 1 nella direzione **a** e spin della particella 2 nella direzione **b** (si tratta di direzioni arbitrarie, considerate come parametri), ciascuna con valori possibili ± 1 (il valore dello spin in unità $\hbar/2$). E Bell aggiunge:

"The vital assumption is that the result $S^2_{\mathbf{b}}$ *for particle 2 does not depend on the setting* **a** *of the magnet for particle 1, nor* $S^1_{\mathbf{a}}$ *on* **b***".*

Abbiamo già fatto osservare che questa ipotesi è proprio quella criticata da Bohr, il quale affermava che l'osservazione della posizione di una particella perturba il valore del momento dell'altra. D'altra parte, osservatori in posizione mutua *spacelike* non dovrebbero influenzarsi, dice Bell.

In ogni caso, Bell continua:*"If* $\rho(\lambda)$ *is the probability density of* λ*, then the expectation value of the product of the two components is*[9]

$$E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) = \int \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda)\, S^1_{\mathbf{a}}(\lambda) S^2_{\mathbf{b}}(\lambda)\ . \tag{16.2}$$

[9]Diversamente da Bell, denotiamo con E invece che con P il valore medio, o valore di aspettazione. Inoltre Bell usa la notazione $P(\mathbf{a},\mathbf{b})$ invece di $P(S^1_{\mathbf{a}}, S^2_{\mathbf{b}})$. Questa notazione è un po' infelice, perché in seguito le due notazioni **a**, **b** si riferiranno a due direzioni diverse della medesima particella.

This should equal the quantum mechanical expectation value, which for the singlet state is[10]

$$E^q(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\ . \tag{16.3}$$

But it will be shown that this is not possible."

Dunque abbiamo a che fare con delle *correlazioni*. Ricordiamo che nella teoria delle probabilità viene chiamata correlazione di due variabili casuali A, B il valor medio (o aspettazione) del prodotto meno il prodotto dei valori medi. Nel nostro caso, le due variabili casuali hanno (nello stato di singoletto) valor medio nullo, e quindi la correlazione è semplicemente il valor medio del prodotto.

La impossibilità di riprodurre la correlazione quantistica (16.3) con una teoria a parametri nascosti, almeno nelle ipotesi formulate da Bell, viene da lui provata nel paragrafo 4 (dal titolo *Contradiction*), come immediata conseguenza della seguente disuguaglianza (di Bell, per l'appunto)

$$|E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) - E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{c}})| \leq 1 + E(S^1_{\mathbf{b}}\, S^2_{\mathbf{c}}))\ , \tag{16.4}$$

che dimostreremo poco più sotto.

Che questa disuguaglianza non sia soddisfatta in MQ, si vede immediatamente dalla (16.3). Infatti se la correlazione $E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}})$ coincidesse con quella quantistica data dalla (16.3), la disuguaglianza di Bell prenderebbe la forma

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}| \leq 1 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \tag{16.5}$$

per ogni terna di versori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Se ora prendiamo i tre versori complanari, con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ortogonali, diciamo con $\mathbf{b}$ che forma un angolo $\pi/2$ con $\mathbf{a}$, e inoltre $\mathbf{c}$ compreso tra di loro formando un angolo ϑ con $\mathbf{a}$, avremmo

$$\cos\vartheta + \sin\vartheta \leq 1\ , \quad 0 < \vartheta < \pi/2\ .$$

Ma questa è ovviamente non soddisfatta.[11] [12]

Riconduzione a una forma più semplice attraverso la proprietà di singoletto

Per la dimostrazione, conviene trasformare la disuguaglianza in un'altra, che coinvolge solo tre osservabili (anziché quattro). Ciò si ottiene subito usando

[10]Questo risultato, che Bell dà per noto, dovrebbe esere qui dimostrato in una Appendice, non ancora scritta. La dimostrazione si può trovare nella Appendice B alla tesi di Chiara Passoni, reperibile nella home page di Luigi Galgani, alla voce Archivio.

[11]Basta prendere il quadrato di ambo i membri e si resta con la disuguaglianza $\sin(2\vartheta) < 0$ nel dominio $0 < \vartheta < \pi/2$.

[12]Nel suo lavoro Bell mostra questa incompatibilità dando prima un argomento generale, relativo a quello che avviene nella formula (16.5) quando $\mathbf{c}$ è prossimo a $\mathbf{b}$. Infatti il secondo membro raggiunge il minimo proprio per $\mathbf{b} - \mathbf{c} = 0$, ed è quindi quadratico in $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ in un intorno dello 0, mentre il primo membro è lineare. Nelle sue parole: *"Unless E is constant, the left hand side is in general of order* $|\mathbf{b}-\mathbf{c}|$ *for small* $|\mathbf{b}-\mathbf{c}|$. *Thus* $E(S^1_{\mathbf{b}}\, S^2_{\mathbf{c}})$ *cannot be stationary at the minimum value* (-1) *at* $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, *and cannot equal the quantum mechanical value (16.3).".* Poi riporta una dimostrazione della incompatibilità alquanto più complicata di quella data qui.

la proprietà di singoletto, ad esempio nella forma $S^1_{\mathbf{b}} = -S^2_{\mathbf{b}}$ (e la linearità dell'aspettazione), sicché si tocca il secondo membro e la la disuguaglianza prende la forma

$$|E(S^1_{\mathbf{a}} S^2_{\mathbf{b}}) - E(S^1_{\mathbf{a}} S^2_{\mathbf{c}})| \leq 1 - E(S^2_{\mathbf{b}} S^2_{\mathbf{c}}) \,. \tag{16.6}$$

Nella dimostrazione della disuguaglianza di Bell, mescoleremo le notazioni di Bell con quelle di Accardi,[13] e quindi riformuliamo prima la disuguaglianza in queste ultime notazioni. Si considerano tre variabili casuali (*random variables*) A, B, C. Nel caso di Bell si tratta delle componenti dello spin in unità $\hbar/2$ della particella 1 o della particella 2 in una delle tre direzione $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, precisamente usiamo le notazioni

$$A = S^1_{\mathbf{a}} \,, \quad B = S^2_{\mathbf{b}} \,, \quad C = S^2_{\mathbf{c}} \,.$$

Comunque, questo è irrilevante, e l'unica cosa di cui si fa uso è che si tratta di variabili casuali che possono assumere solo i valori ± 1.

Ci occupiamo ora delle correlazioni di tali osservabili, ovvero delle aspettazioni di prodotti di due tali variabili (che hanno media nulla), ad esempio $E(AB)$, dove il valor medio o di aspettazione è definito come in ogni teoria probabilistica, tipicamente nella forma $E(A) = \int_D A(\lambda)\rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, dove D è un dominio assegnato (è questo punto, riguardante il dominio, il punto delicato della dimostrazione). Allora si ha

Disuguaglianza di Bell. Si considerino tre variabili casuali (*random variables*) A, B, C che possono assumere solo i valori ± 1 (*"variabili dicotomiche"*), e si denoti con E il valore di aspettazione rispetto ad una assegnata distribuzione di probabilità. Allora vale la disugaglianza

$$|E(AB) - E(AC)| \leq 1 - E(BC) \,, \tag{16.7}$$

ovvero: *la differenza delle correlazioni relative a due coppie di variabili casuali, in valore assoluto, è maggiorata da 1 meno la correlazione relativa alla terza coppia*.

Dimostrazione. Si osserva anzitutto che si ha

$$E(AB) - E(AC) = E(AB - AC) = E\Big(AB\,(1 - BC)\Big) \,,$$

Abbiamo usato nel primo passaggio la linearità del valore di aspettazione (fatto che sembrerebbe banale,[14] ma che è il punto cruciale della futura critica che faremo) e, nell'ultimo passaggio, il fatto che $B^2 = 1$ (questo è veramente banale, perché abbiamo assunto $B = \pm 1$). Si ha allora (dato che il modulo di un integrale è minore o uguale all'integrale del modulo, e che $|AB| = 1$)

$$|E(AB) - E(AC)| \leq E(|1 - BC|) \,.$$

Si osserva infine che vale

$$1 - BC \geq 0$$

[13] L. Accardi, *Urne e camaleonti*, Il Saggiatore (Milano, 1997).

[14] Si ricordi $E(A) = \int \rho(\lambda) A(\lambda) \mathrm{d}\lambda$.

ancora perché $B, C = \pm 1$, sicché il prodotto BC assume solo i valori ± 1, e quindi $1 - BC$ assume solo i valori 0 e 2. Dunque

$$E(|1-BC|) = E(1-BC) = 1 - E(BC)\,.$$

Osservazione Sul ruolo della "vital assumption". Vogliamo qui mettere in rilievo quale è il punto della dimostrazione in cui svolge un ruolo essenziale la "vital assumption". Se cade la "vital assumption", si deve ammettere che l'atto di misurazione del sistema, che si compie fissando l'assetto o *setting* degli strumenti di misura, ad esempio a Tokyo, disturbi la misurazione del sistema lontano, a New York. Allora i valori di aspettazione dovranno essere calcolati rispetto a distribuzioni di probabilità che sono diverse per ogni coppia di assetti o *setting*. Si ha ad esempio una densità di probabilità $\rho_{\mathbf{ab}}$ quando ci si riferisce a un setting con la direzione **a** per l'osservazione a Tokyo, e **b** per l'osservazione del sistema a New York. In teoria delle probabilità questo si esprime dicendo che si tratta di *probabilità condizionate* in maniera diversa, e l'aspettazione condizionata viene denotata esplicitamente in maniera corrispondente. Invece di $E(\cdot)$, la si denota ad esempio con $E(\cdot|\mathbf{a},\mathbf{b})$.

In conclusione, se cade la "vital assumption" la disuguaglianza di Bell non dovrebbe essere scritta nella forma (16.4), ma piuttosto nella forma

$$|E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}|\mathbf{ab}) - E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{c}}|\mathbf{ac})| \le 1 + E(S^1_{\mathbf{b}}\, S^2_{\mathbf{c}}|\mathbf{bc})\,. \tag{16.8}$$

Ma allora, se si cercasse di ripercorrere la dimostrazione data sopra, ci si arresterebbe addirittura al primo passaggio, perché evidentemente, quando si hanno condizionamenti diversi, non vale più la linearità dell'aspettazione (l'integrale, su un certo dominio, di $f + g$ è in generale diverso dalla somma degli integrali di f e di g, calcolati su due domini diversi dal dominio dato). Abbiamo già visto nel Capitolo (14) come una trattazione dell'elettrone classico di Dirac conduca in maniera naturale ad avere parametri nascosti ambientati in spazi di probabilità, che sono diversi, a seconda dei diversi setting. In tal modo, ad ogni coppia di setting corrisponde uno spazio di probabilità diverso, e quindi la vital assumption (un unico spazio di probabilità, qualunque sia la coppia di setting) viene a cadere automaticamente, senza alcuna forzatura sul modello.

Osservazione Il ruolo del test di coincidenza, rilettura dell'osservazione di Bohr. Aggiungiamo qui un altro elemento che si deve tenere presente nella discussione. Ringraziamo L. Accardi ed A. Scotti per le lunghe conversazioni avute con loro a questo proposito.

Fin dal lavoro di EPR, si resta con l'impressione che si discuta di situazioni sperimentali in cui si compie una osservazione sul sistema I, diciamo a New York, e indipendentemente un'altra osservazione sul sistema II, ad esempio a Tokyo. Ma non è affatto così, perché in tutti gli esperimenti che di solito si eseguono, a partire da quello già citato di Aspect, i due rivelatori devono comunicare con un comune osservatore, ad esempio a Milano, dove era stato prodotto il sistema globale I + II, che poi si disintegra mandando le due particelle in direzioni opposte. Si tratta del fatto che non si manda una sola coppia di particelle, ma tutto un fascio di particelle, e allora bisogna garantirsi che le due particelle effettivamente osservate sono gemelle, cioè provengono da una ben definita coppia iniziale, ovvero siano state create insieme in uno stato *entangled*. Negli esperimenti questo fatto viene controllato con un **test di coincidenza**. In altri termini, i due rivelatori (a New York e a Tokyo) ricevono moltissimi segnali, e poi l'osservatore che di fatto compie l'esperimento (a Milano) raccogliendo le registrazioni dei due apparati di misura, seleziona tra tutti i segnali le coppie che hanno superato il test di coincidenza, e compie la statistica solo su tale campione, selezionato a partire dalle informazioni brute. Si compie in tal modo, come si dice, una *analisi condizionata dei segnali*, e quindi diremmo in ambito probabilistico che stiamo considerando *valori di aspettazione condizionati*. Il condizionamento avviene in effetti non solo attraverso il test di coincidenza, ma anche controllando che i due rivelatori si trovino ad avere degli assetti (*setting*), o direzioni $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, ben definiti, come ad esempio la coppia $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{b}$, oppure la coppia $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{c}$, ed ogni coppia di segnali accettati corrisponde ad una ben definita coppia si setting (assetti). Inoltre i possibili setting devono essere *i medesimi* per i due osservatori lontani.

Questi condizionamenti sembrerebbero costituire l'influenza che secondo Bohr un osservatore esercita sull'altro, apparentemente contro il principio di causalità. Invece il tipo di condizonamento qui descritto, che si produce attraverso i test di coincidenza condotto dall'osservatore "neutro", sembrerebbe rispettare il principio di causalità.

16.2 Un "divertissement". L'analogo delle disuguaglianza di Bell in un gioco del tipo gratta e vinci

Esiste una dimostrazione di una disuguaglianza di tipo di Bell facilissimamente comprensibile. Questa è dovuta a Mermin[15] e si trova discussa in un celebre libro di Edward Nelson.[16]

Si tratta di un gioco del tipo "gratta e vinci", la cui analogia con l'esperimento dell'osservazione dello spin di due particelle lungo tre possibili direzioni di polarizzazione (essendo le particelle create in uno stato di singoletto) apparirà evidente.

Ricordiamo che, come abbiamo illustrato in questo capitolo, la discussione di Bell viene compiuta seguendo una tipologia leggermente diversa da quella di EPR. Infatti Bell segue una tipologia proposta di Bohm. Si hanno due particelle "create" in coppie, diciamo a Milano, e le particelle di una coppia vengono osservate entrambe (e non una sola), una

[15] N.D. Mermin, Am. J. Phys. **49**, 940 (1981); *Physics Today*, April 1985, pag. 38-47.

[16] E. Nelson, *Quantum fluctuations*, Princeton U.P. (Princeton, 1985), sec. 23, specialmente pag. 120.

a New York e l'altra a Tokyo. Le particelle sono dotate di spin 1/2. Ciò significa che si osserva la la proiezione dello spin di una particella lungo una definita direzione, allora il risultato della misurazione può essere uno di due valori opposti, che in unità opportune sono ± 1 (si dice che in tal caso lo spin è una "variabile dicotomica"). Nell'esperimento, la misurazione viene compiuta (da ogni osservatore sulla corrispondente particella), lungo una di tre possibili direzioni (le medesime per i due osservatori; questo è un punto delicato[17]). Infine, si ammette che le particelle di una coppia siano state create (a Milano) in uno "stato si singoletto". Questo per noi significa semplicemente che se le due particelle vengono osservate nella medesima direzione, allora i due risultati devono essere opposti. Se per la prima si trova $+1$, allora per la seconda si trova certamente -1, e così via.

Avendo presente questa tipologia di esperimento alla Bohm–Bell, apparirà chiaro il ruolo del gioco di tipo gratta–vinci, che ora descriviamo. Vi sono due giocatori che giocano contro il banco. Il banco prende una scheda, la divide in due tagliandola orizzontalmente, e le due metà vengono date, una ciascuno, ai due compagni di gioco. Ognuna delle due metà contiene tre quadratini argentati, ad esempio posti in fila orizzontalmente, un quadratino a sinistra, uno al centro, uno a destra. Nel caso di Bell, il banco è la sorgente di coppie di fotoni che escono in direzioni opposte, i due giocatori sono i due rivelatori, le tre posizioni dei quadratini (sinistra, centro, destra) sono le tre orientazioni **a**, **b**, **c** (cioè i setting) in cui si misura lo spin dell'elettrone.

I due giocatori non possono comunicare tra di loro. Ognuno dei giocatori gratta un quadratino sulla sua mezza scheda, e ne vede uscire un colore, che può essere R (rosso) oppure V (verde). Una prima regola (analoga alla condizione di singoletto) è che se i due giocatori grattano il quadratino con la medesima posizione (entrambi il primo, o il secondo o il terzo), allora necessariamente escono due colori diversi, e la giocata non è valida, ovvero il banco ritira la scheda (questo è l'analogo della *condizione di singoletto* nel caso di Bell: se le due direzioni coincidono, allora il risultato è già prestabilito) e ne dà un'altra. Nel gioco, **il banco perde se risulta che i due quadratini (necessariamente in posizioni diverse) grattati dai due giocatori hanno colori diversi**. Se i due colori sono uguali vince il banco.

Ci poniamo il problema: quale deve essere la vincita rispetto alla posta, affinché il gioco sia equo?

Bisogna dunque calcolare la probabilità di vincita. **Se ammettiamo che i colori esistano prima di osservarli**, possiamo fare il conteggio secondo le consuete regole del calcolo delle probabilità, calcolando il numero dei casi favorevoli, diviso per il numero di casi possibili. Facciamo dunque questo calcolo. Si trova che i possibili schemi di colorazione di ciascuna scheda – che poi verrà tagliata orizzontalmente, dandone quella superiore ad un giocatore e quella inferiore all'altro – sono otto, ovvero (escludiamo, secondo la regola assegnata, gli schemi

[17] I due osservatori devono comunicare per essere sicuri cle le due direzioni siano uguali.

in cui compaiono colori uguali in quadratini corrispondenti)

$$\begin{array}{cc} R\,R\,R & V\,V\,V \\ V\,V\,V & R\,R\,R \end{array} \tag{16.9}$$

poi

$$\begin{array}{ccc} V\,R\,R & R\,V\,R & R\,R\,V \\ R\,V\,V & V\,R\,V & V\,V\,R \end{array} \tag{16.10}$$

e infine

$$\begin{array}{ccc} R\,V\,V & V\,R\,V & V\,V\,R \\ V\,R\,R & R\,V\,R & R\,R\,V \end{array} \ . \tag{16.11}$$

Dobbiamo contare, in ognuna delle schede, quanti sono i casi favorevoli. Ricordiamo che una giocata corrisponde a una scelta di un quadratino in alto e un quadratino in basso, in posizioni diverse.

Nella prima scheda, in tutti i casi possibilli (sei) i giocatori vincono. Lo stesso avviene nella seconda scheda. Nella terza, si hanno due casi su sei in cui vincono i giocatori, cioè i giocatori vincono in un terzo dei casi, e lo stesso si controlla che vale in tutte le rimanenti schede. Concludiamo che, se si ammette che i colori dei quadratini esistano, siano dati, indipendentemente dal fatto che li si gratti o no, la probabilità di vincita dei giocatori è

$$P > 1/3 \ ,$$

e quindi si deduce che è conveniente giocare se il banco paga almeno tre volte la posta.

D'altra parte, se il colore non esiste prima di grattare la carta, ma si crea ad esempio proprio attraverso l'atto di grattare,[18] allora il conteggio sopra illustrato non ha più ragione di essere, e dunque cade il vincolo sulle probabilità.

Infatti esiste un esperimento, quello compiuto di Aspect, che risproduce una situazione sperimentale analoga a quella del gioco tipo gratta e vinci appena descritto, in cui però si trova che la probabilità di vincita è[19]

$$P = 1/4$$

anziché $P > 1/3$. Sembrerebbe dunque doversi concludere che nell'esperimento di Aspect gli oggetti in gioco non hanno delle proprietà (l'analogo del colore verde o rosso), indipendentemente dal fatto che si compia l'osservazione, cioè si

[18]Ad esempio, si può pensare che il croupier fornisca, per grattare, una monetina che possa essere acida o basica e la carta sia ad esempio una cartina al tornasole.

[19]La dimostrazione di questa formula dovrebbe trovarsi in una appendice, che non è ancora stata scritta.

avrebbe una dimostrazione sperimentale del fatto che in quella situazione non è valido il criterio di realtà di EPR.[20]

Oppure non è valida almeno una delle condizioni richieste nel teorema di Bell, presumibilmente la *vital assumption*.

In altri termini, le cose obbiettive sono le osservazioni, qui il colore della carta quando la si osserva. Poi si possono fare delle ipotesi su quello che non si osserva. Ad esempio si può fare l'ipotesi che il colore esista prima di compiere l'osservazione. Oppure si può fare l'ipotesi che il croupier abbia predisposto un certo ben definito meccanismo con cui venga creato il colore all'atto dell'osservazione. Ognuna di tali ipotesi comporta sulle frequenze un ben definito vincolo, ad esempio quello che abbiamo calcolato nell'ipotesi che i colori esistano prima dell'osservazione. Abbiamo visto che le osservazioni di Aspect indicano una ben precisa serie di frequenze. Abbismo anche visto, nel Capitolo (14), come i risultati dell'elettrodinamica classica di Dirac potrebbero fornire un meccanismo adeguato alle osservazioni di Aspect.

[20]Si veda anche pag. 445 di E. Nelson, *Field theory and the future of stochastic mechanics*, in S. Albeverio et al. eds., *Stochastic processes in classical and quantum systems*, pag. 438-469, Lecture Notes in Phyics n. 262, Springer (Berlino, 1986).

Capitolo 17

Problemi di carattere generale

Naturalmente il risultato teorico di Bell e quello sperimantale di Aspect e dgli altri hanno suscitato numerosissime discussioni. Qui ci limitiamo a illustrare il punto di vista di Acardi, oltre a poche altre osservazioni.

17.1 Il punto di vista di Accardi. Ruolo delle probabilità condizionate

Luigi Accardi è un matematico italiano che ha studiato probabilità a Mosca negli anni 1970, quando Mosca era il centro della matematica mondiale. Il più anziano dei presenti autori ha assistito personalmente alla discussione della sua tesi di dottorato, alla Università di Mosca nel 1974, davanti a una commissione presieduta da Kolmogorov, con interventi di celebri studiosi, tra i quali Gelfand. Accardi ha un profondo interesse per il problema dei fondamenti della Meccanica Quantistica, e i suoi studi su questo argomento lo hanno portato a fondare un filone della matematica che va sotto il nome di *Probabilità Quantistica*. Sul problema delle disuguaglianze di Bell egli ha un punto di vista originale, che si trova esposto in forma divulgativa in un suo libro,[1] in una forma dialogica che vorrebbe ispirarsi a quella dei Dialoghi galileiani. Ciò rende l'esposizione interessante letterariamente, ma un poco di difficile lettura. Inoltre l'autore si concede il lusso di prendere un po' in giro diversi autori, più o meno celebri, e questo gli ha procurato non poche difficoltà nella comunità scientifica.

Noi riteniamo che il suo punto di vista sia interessante e colga un aspetto molto profondo del problema, sicché sia utile cercare di esporlo. Per fare ciò nella maniera più semplice e concisa, faremo riferimento ad un esempio che a lui è particolarmente caro. Si tratta del classico problema delle due fenditure, che risulta illuminante per comprendere il ruolo della disuguaglianza di Bell.

[1] L. Accardi, *Urne e camaleonti*, Il Saggiatore (Milano, 1997).

Sul ruolo delle probabilità condizionate

Il problema che discutiamo ha un aspetto generale, che riguarda le **condizioni di compatibilità di probabilità condizionate**. Cominciamo a consideare un esempio, che riguarda il *Problema dell'esistenza della misura di Gibbs*. Si abbia un sistema di spin sui siti di un reticolo infinito, anche semplicemente monodimensionale. Formalmente si può assegnare una energia a ogni configurazione degli spin, e quindi si potrebbe ingenuamente pensare di potere definire la ben nota e familiare misura di Gibbs, proporzionale ad $\exp(-\beta H)$, dove H è l'hamiltoniana del sistema. Ma si vede facilmente che non è facile dare senso preciso alle serie che si devono sommare nel compiere tale procedimento, e dunque si comincia a definire la misura su segmenti finiti del reticolo. Poi bisogna accertarsi che tali "misure parziali" siano compatibili tra di loro, perché solo in tal caso si può estendere la misura a tutto il reticolo infinito (mostrare l'esistenza della misura di Gibbs, come si dice).

Ora, quelle che abbiamo chiamato "misure parziali" sono in effetti delle "misure condizionate". Il problema consiste allora nel garantirsi che tali "probabilità condizionate" siano mutualmente compatibili, perché questo garantisce allora l'esistenza della misura di Gibbs.[2] Ma ancor di più. Questi risultati sull'esistenza della misura di Gibbs, iniziati a Mosca da Dobrushin, e ben noti ad Accardi, costituiscono in effetti una estensione, al caso di sistemi interagenti, del primo fondamentale risultato ottenuto da Kolmogorov nel suo celebre lavoro del 1933, in cui egli formulò matematicamente la moderna teoria delle probabilità.[3] Anche in tale lavoro si aveva il problema di definire una misura di probabilità, quando erano assegnate delle "misure parziali", cioè delle probabilità condizionate, su certi insiemi che erano detti *insiemi cilindrici*, e Kolmogorov mostrò come la misura globale esiste quando le probabilità condizionate soddisfano certe precise condizioni di compatibiltà.

In effetti, si ha qui un problema alquanto più generale, che riguarda la teoria delle probabilità. Si osserva anzitutto che in natura ci si imbatte in una fenomenologia in cui i dati empirici si presentano come delle frequenze relative, come tipicamente avviene nell'esperimento del lancio di N dadi, quando si osservano, al crescere del numero di lanci, le frequenze relative con cui escono i numeri $1,2,\ldots,6$. Si presenta allora il problema generale du stabilire se queste serie empiriche siano descrivibili in termini probabilistici, cioè mediante una misura di

[2] Un proprietà cruciale che debbono avere le probabilità condizionate è che le corrispondenti correlazioni spaziali tra due segmenti disgiunti decada a zero abbastanza rapidamente all'aumentare della distanza tra i segmenti. Problemi di questo tipo sono stati studiati in Italia, con singnificativi risultati, dalla scuola di Fisica Matematica di Roma. Recentemente, una applicazione significativa di tali metodi è stata data a Milano nella dimostrazione di proprietà di stabilità, nel senso della teoria delle perturbazioni, per sistemi di tipo Fermi Pasta Ulam al limite termodinamico, metre i risultati noti in precendenza non erano estendibili al limite di infinite particelle a temperatura non nulla. Si veda A. Carati, L. Maiocchi, preprint.

[3] Una traduzione italiana è stata resa disponibile da Accardi, e cercheramo di procurarcela e metterla in rete.

probabilità in un opportuno "spazio di eventi". È questo un problema classico, che nel caso delle probabilità discrete (come quello dei dadi) fu risolto già da Boole in un suo fondamentale lavoro del 1862. [4] Nel caso consideraato da Boole esiste uno spazio degli eventi elementari, sul quale si possono assegnare diverse probabilità a priori. ed egli mostra come il fatto che esista una tale probabilità a priori induce un certo numero di disuguaglolianze che devono essere soddisfatte dalle frequenze empiriche. Il passo successivo fu di considerare il caso in cui lo spazio degli eventi elementari è un insieme infinito con la potenza del continuo (come gli spazi $\mathbb{R}^n$) o superiore (come uno spazio funzionale, ad esempio lo spazio delle curve in $\mathbb{R}^n$), sicché non è neppure noto se sia possibile introdurre delle probababilità a priori sulla spazio degli eventi elementari. Qui, com si è detto, il contributo fondamentale fu dato da Kolmogorov.

Si noti che il problema di trovarsi di fronte a certi dati, analoghi a probabilità condizionate, e di cercare di interpretarli come corrispondenti ad "eventi" entro un ben definito ambito probabilistico, è un problema comunissimo della statistica matematica. Gli statistici sanno benissimo che i dati empirici debbono soddisfare ad opportune condizioni di consistenza o di coerenza affinché questo sia possibile. Si tratta di un problema concreto che interessa particolarmente le scienze sociali e la medicina (test di compatibilità per i campioni per gli exit poll, test di efficacia dei farmaci).

Probabilità congiunta e probabilità condizionata. Rilettura della legge di Bayes

Dopo le osservazioni generali fatte sopra, riordiamo ora il modo in dui sono abitualmente definite le probabilità congiunte e le probabilità condizionate. Faremo riferimento alla situazione più semplice possibile, quella con un numero finito di eventi, come il gioco dei dadi. Ci sono sei eventi elementari: esce 1, oppure 2, ..., oppure 6. Sappiamo fare l'unione e l'intersezione di eventi, e quindi abbiamo a che fare con insiemi, con la loro algebra rispetto alle operazioni di unione e intersezione che conosciamo, e infine abbiamo una misura, cioè una legge che assegna ad ogni insieme un numero positivo (o nullo), con la condizione che l'insieme totale (evento certo) ha misura 1. La probabilità $P(A)$ di un evento A è semplicemente definita come la misura del corrispondente insieme. Nel caso dei dadi, la misura di un insieme proviene da una misura assegnata agli eventi elementari, ad esempio 1/6 a ciascuno di essi nel caso di dadi non truccati. Due concetti fondamentali sono quelli di *probabilità congiunta* e *probabilità condizionata*, che denoteremo rispettivamente con

$$P(A \cap B)\,, \qquad P(A|B)\,.$$

L'evento "avviene A e anche B" corrisponde all'insieme intersezione degli insiemi corrispondenti rispettivamente ad A e a B, e la sua probabilità è semplicemente

[4] G. Boole, *On the theory of probabilities* Phil. Ttrans. R. Soc, London **152**, 225 (1862).

la misura di quella intersezione: questa è la probabilità congiunta di A e B, denotata con $P(A \cap B)$. Quando si parla di probabilità condizionata di A "dato B", denotata con $P(A|B)$, ci si riferisce invece alla probabilità di A se abbiamo l'informazione che è avvenuto B. Allora si fa una cosa semplicissima e ragionevole: ci si restringe a considerare l'insieme B (di cui sappiamo che è avvenuto) e anche tutti i suoi sottoinsiemi; invece, tutto quanto riguarda quello che è fuori di B (fuori dell'insieme corrispondente) lo rimuoviamo dalla nostra mente. Naturalmente ora dovremo rinormalizzare la misura di B, perché è B l'evento certo, ovvero il suo insieme rappresentativo è l'insieme "totale", che dunque deve ora avere misura 1. Formalmente questo si ottiene definendo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \, . \tag{17.1}$$

Si tratta della celebre *legge di Bayes*.

Questa definizione di probabilità condizionata viene data riferendosi alla precedente nozione di probabilità congiunta, definita facendo riferimento alla misura a priori assegnata sull'insieme totale. Ma il punto sottile è che in tutte le situazioni che si incontrano è invece la probabilità condizionata che svolge un ruolo fondante. Infatti, ogni volta che vogliamo ragionevolmente introdurre la probabilità di un evento, ci troviamo sempre nel caso in cui ci attendiamo di osservare quell'evento in una certa definita situazione. Ad esempio mi chiedo la probabilità di incontrare mio fratello a Milano sapendo che abita a Torino e non avendo nessuna altra notizia su di lui (primo caso), oppure sapendo anche (secondo caso) che questa sera lui ha programmato di venire a Milano per andare a sentire un'opera alla Scala. Dunque tutte le probabilità sono condizionate, e di solito lasciamo sottintese le informazioni che abbiamo a priori sui possibili eventi. Ma la cosa è profonda. Ad esempio, il celebre Keynes, premio Nobel per l'economia, che faceva parte del famoso circolo di Cambridge insieme con Russell e diversi altri, scrisse un noto libro sulla probabilità,[5] e lungo tutto il libro, *sempre*, fino quasi alla noia, quando parla della probabilità di un evento, la denota come una probabilità conidizionata, con un simbolo simile a quello che abbiamo usato sopra. Per questo motivo, si preferisce considerare le probabilità condizionate come enti primitivi, come dati sperimentali, e porsi il problema se sia poi possibile trovare un comume spazio di probabilità (con una sua algebra di eventi su cui sia definita una misura di probabilità), nel quale le probabilità condizionate si possano poi esprimere in termini di quelle composte mediante una inversione della relazione (17.1), ovvero come

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \, . \tag{17.2}$$

Questo però richiede che le probablità condizionate siano mutuamente compatibili.

[5] J.M. Keynes, *A treatise on probability*, Mcmillan (Londra, 1948).

17.2 L'esempio delle due fenditure come visto da Accardi

A questo punto, quanto qui richiamato dovrebbe essere sufficiente per venire all'esempio della due fenditure, in cui viene bene illustrato il ruolo delle condizioni di compatibiltà, che si esprimono mediante una semplice disuguaglianza, analoga alla disuguaglianza di Bell.

La discussione viene svolta da Accardi nel capitolo VI del suo libro, e il cuore è esposto alle pagine 278, 279. Egli ricorda anzitutto come il problema viene trattato da Feynman, in un modo che (come vedremo più avanti) già Koopman aveva giudicato non soddisfacente. Accardi invece lo riformula nel modo seguente. Consideriamo un fascio di particelle che incidono su uno schermo in cui sono praticati due fori o due fenditure, 1 e 2, e vengono poi raccolte ed osservate su un secondo schermo. Si considerano i seguenti eventi, tutti relativi al caso in cui entrambe le fenditure sono aperte:[6]

1. X : la particella arriva nella regione X del secondo schermo
2. 1 : la particella passa per il foro 1 (e arriva poi in qualche punto del secondo schermo)
3. 2 : la particella passa per il foro 2 (e arriva poi in qualche punto del secondo schermo)
4. $X\cap 1$: la particella arriva in X e passa per il foro 1
5. $X\cap 2$: la particella arriva in X e passa per il foro 2 .

Accardi introduce poi le probabilità condizionate $P(X|1)$, probabilità che la particella arrivi nella regione X quando solo il foro 1 è aperto, e $P(X|2)$, probabilità che la particella arrivi nella regione X quando solo il foro 2 è aperto, e le considera come quantità empiriche, date dalle osservazioni. Si pone allora il problema se sia possibile senza contraddizione, mediante le familiari relazioni (17.1) tra probabilità composta e probabilità condizionata, ottenere delle probabilità congiunte (oggetti matematici incogniti), a partire dalle probabilità condizionate (quantità empiriche). Nelle sue parole: (pag. 276): Quando vuoi fare ciò, *"non stai semplicemente applicando le leggi della probabilità classica, ma stai introducendo l'ipotesi che esistano quattro numeri*

$$x=P(1)\,,\quad y=P(2)\,,\quad z=P(X\cap 1)\,,\quad t=P(X\cap 2)$$

[6]Nei punti 4 e 5, invece di dire che "la particella passa per il foro 2" oppure "passa per il foro 2", sarebbe più appropriato dire "la particella arriva nella regione X essendo uscita dal foro 1" oppure "dal foro 2" (e analogamente nei punti 2 e 3). Infatti la particella potrebbe girare tra i due fori e infine, provenendo da uno di loro, giungere in X. Una situazione di questo tipo si verifica nell'analogo classico dell'effetto tunnel nell'ambito dell'elettrodiamica di Dirac, che illustreremo nel prossimo paragrafo. Comunque, in una prima lettura è forse meglio trascurare questa precisazione, concentrandosi sull'aspetto centrale in discussione.

che non possono corrispondere a nessuna grandezza valutabile sperimentalmente. cioè non sono confrontabili con nessuna frequenza relativa effettivamente misurabile". Questo è un punto cruciale. Infatti, se compio una misurazione per constatare se la particella passa per 1 o per 2, perturbo il sistema e sto considerando un altro esperimento. Dunque x, y, z, t sono incognite e non corrispondono a dei dati empirici. Invece sono dati empirici $P(X|1)$ e $P(X|2)$ oltre, naturalmente, a $P(X)$ che rappresenta il risultato stesso dell'esperimento, corrispondente ad entrambe le fenditure aperte.

Ora, Accardi osserva che queste quattro incognite non possono essere arbitrarie. Esse innanzitutto devone essere positive, e poi devono soddisfare le seguenti relazioni, in cui i dati empirici comppiaono a destra, come quantità assegnate:

$$\begin{aligned} P(1)+P(2) &= 1 \\ P(X\cap 1)+P(X\cap 2) &= P(X) \\ \frac{P(X\cap 1)}{P(1)} &= P(X|1) \\ \frac{P(X\cap 2)}{P(2)} &= P(X|2)\,. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Abbiamo già denotato con x,y,z,t le quattro incognite del problema. Introduciamo altre notazioni, a,b,c, per i parametri che entrano nel problema, come corrispondenti a dati di osservazione, ovvero:

$$a=P(X) \quad b=P(X|1)\,, \quad c=P(X|2)\,.$$

Allora le quattro equazioni prendono la forma

$$x+y=1\,, \quad z+t=a \quad z=bx \quad t=cy\,,$$

che costituisce un sistema lineare di quattro equazioni di primo grado in quattro incognitre con tre parametri. Il problema si risolve immediatamente per sostituzione, e ad esempio per l'incognita x si trova

$$x=\frac{a-c}{b-c}\,,$$

ovvero, ripristinando i nomi delle quantità in gioco,

$$P(1)=\frac{P(X)-P(X|2)}{P(X|1)-P(X|2)}\,. \tag{17.4}$$

Ma deve essere necessariamente $0\le P(1)\le 1$ e quindi, affinché si possano interpretare i "dati sperimentali" come consistenti con una interpretazione probabilistica in un comune spazio di probabilità, i dati devono soddisfare la condizione di compatibillità

$$0\le\frac{P(X)-P(X|2)}{P(X|1)-P(X|2)}\le 1\,. \tag{17.5}$$

Questa condizione non è soddisfatta. Infatti, se ad esempio si prende la regione X in posizione simmetrica rispetto ai due fori si può ritenere che $P(X|1)$ sia molto prossimo a $P(X|2)$, se non addirittura uguale, mentre evidentemente il numeratore sarà diverso da zero. Dunque la quantità che dovrebbe esere limitata tra 0 ed 1, in effetti diverge. Quindi concludiamo che il numero $P(1)$, una delle nostre incognite, non esiste, e quindi non è possibile interpretare i dati empirici (le probabilità condizionate) entro uno schema probabilistico con un unico spazio di probabilità.

Secondo Accardi, le disuguaglianze di Bell sono delle condizioni di questo tipo, e quindi, in particolare, non avrebbero nulla a che fare con problemi legati alla località (cioè se si abbia o no una influenza lontana).[7]

Nota: il problema delle due fenditure in MQ

Ora, tutte queste considerazioni sono certamente molto interessanti, ma non danno una risposta concreta su come compiere un calcolo che produca una figura di interfenza o diffrazione da confrontarsi con quella osservata sullo schermo. Invece la prescrizione della MQ è semplicicssima,

Il formalismo quantistico fornisce una soluzione che nel caso delle due fenditure è semplicissima.

Facendo riferimento ad un opportuno spazio di Hilbert, la situazione con il primo foro aperto viene descritta da una funzione ψ_1 che è nulla, sul primo schermo, nella regione fuori dal primo foro. Analogamente per la situazione con il secondo foro aperto, (ψ_2 nulla fuori dal secondo foro). Allora la funzione $\psi = \psi_1 + \psi_2$ risulta essere nulla nella regione del primo schermo fuori dai due fori, e quindi descrive bene una situazione con i due fori aperti. Inoltre, essa produce la corretta figura di interferenza con una intensità data da $|\psi_1 + \psi_2|^2$.

La magia del formalismo della MQ, che in maniera semplicissima, mediante la somma $\psi_1 + \psi_2$ delle due funzioni corrispondenti ad un solo foro aperto, riproduce i risultati corrispondenti ad entrambi i fori aperti (libro di Dirac, pag. 9), sfugge ancora alla comprensione (alla "spiegazione") che Einstein voleva ottenere nel suo classical program. D'altra parte è proprio Einstein che aveva detto che "la strada sarà lunga e difficile".[8]

---

[7] È interessante riconsiderare il punto di vista illustrato più sopra, relativo alla rilevanza delle probabilità condizionate nell'ambito dei fondamenti della teoria delle probabilità, alla luce della teoria di De Finetti: B. de Finetti, *Theory of probability: a critical iontroductoy treatment*, Wiley (London, 1874). Si veda anche F. Fagnola, M. Gregoratti, *Bell's Inequality Violations: Relation with de Finetti's Coherence Principle and Inferential Analysis of Experimental Data*, Politecnico di Milano, 2010. Si veda anche A. Khrennikov, *Beyond quantum*.

[8] Un punto cruciale non ancora utilizzato potrebbe essere legato al fatto che lo spazio delle fasi di un sistema di particelle presenta una struttura "a buchi" in virtú della condizione *nonrunawy* imposta dall'elettrodinamica classica di Dirac.

17.3 Il problema delle due fenditure come discusso da Feynman, e la critica di Koopman

NOTA DIDATTICA. Questo paragrafo non è ancora disponibile. Seguono delle note intese come appunti degli autori, che essi trovano comodo conservare qui.

Note varie

Si veda la conferenze di probabilità di Berkeley del 1964 con il contributo di Feynman e la critica di Koopman. Si vada anche Feynman, R. P. Leichton R. B. Sands, M. (1965) Lectures on physics. Quan- tum mechanics, Addison-Wesley P. C., Reading (Mass), e Koopman citato nel libro di Costantini vedere poi R.W. Garden, Modern logic and QM, Adam Hilger Ltd (Bristol, 1874). Discutere anche Haroche Rev Mod Phys 85, 1083 (2013) (Nobel lecture) e articolo successivo di Wineland, ricordando (esperimento dei bolognesi) il fatto che la figura di interferenza si costruisce mediante l'accumulo dell particelle sullo schermo – proprietà del sistema totale, alla Einstein, nonostante che passi una particella per volta, provenendo tuttavia da un sistema altamente correlato, alla Dicke. Dunque

$$P(A_1,A_2,\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1,A_2)\ldots P(A_n/A_1,A_2\ldots,A_{n-1}) \ .$$

Sul dualismo classico quantisitco entro la MQ

È ben noto che esiste un dualismo nei fondamenti della meccanica quantistica: da una parte la meccanica quantistica è ottima per dare le regole con cui descrivere la fisica microscopica; d'altra parte gli strumenti di misura, macroscopici, devono essere pensati classici, e non come costituiti da particelle quantistiche. Queste sono sostamzialente le parole di Landau, che dice: *"La possibilità di descrizione quantitativa del movimento di un elettrone richiede al tempo stesso l'esistenza di oggetti fisici che obbediscano con precisione sufficiente alla meccanica classica"* (Landau Lifshitz, Vol.3, Meccanica Quantistica non Relativistica, paragrafo 1 pag. 17). Sicuramente dicono così anche Bohr e von Neumann. Quindi si ha una situazione di dualismo.[9]

Questo fatto può anche essere accettato come corrispondente ad una impossibilità per l'uomo di "conoscere" il mondo: Heisenberg e Bohr interpretavano esplicitamente il principio di indeterminazione come un limite alla possibile conoscenza umana (cosa ci sia al di là, come dice Bohr, *"we willingly leave to speculative philosophy"*.) In questa forma la situazione poteva andare bene anche ad Einstein. Quello che in realtà Einstein non digeriva è che la meccanica quantistica parla di quello che possiamo conoscere del mondo, piuttosto che del mondo

[9]Le cose cambierebbero se fosse possibile dedurre il comportamento limite classico in un ambito puramente quantistico. Vi sono sono studiosi che cercano di compiere questa deduzione: si tratta del cosiddetto problema della *decoerenza*.

stesso. A lui sembrava impossibile che non si potesse dare una descrizione oggettiva che implichi la nostra conoscenza soggettiva del mondo (si ricordi *"esiste un elemento di realtà"* nell'articolo EPR). In ogni caso, sicuramente è almeno vero che, se si riuscisse ad "implementare" il programma di Einstein, potrebbe forse risultare eliminata la dicotomia sopra ricordata.

Statistica delle urne e statistica dei camaleonti. Sul ruolo attivo della misurazione

Accardi mette in luce un interessante aspetto che caratterizza la descrizione probabilistica della meccanica quantistica rispetto a quella della meccanica classica. Il problema roguarda il modo in cui un sistema osservato "risponde" al procedimento di misurazione. Nel caso classico si ha una situazione analoga a quella familiare che si incontra nella statistica delle urne: una urna contiene un ugual numero di palline nere e di palline bianche e, nell'atto di una misurazione (l'estrazione di una pallina), la pallina estratta esce come già era, bianca o nera. La pallina "è" o bianca o nera. Invece nel caso della meccanica quantistica si ha una situazione simile a quella che si incontra nella osservazione dei camaleonti, ammettendo che questi siano in possesso della proprietà che viene loro attribuita. Ovvero: se li si attira (per farli uscire dall'urna) con una foglia (di colore verde) essi escono verdi, mentre se li si attira con un pezzo di corteccia di sughero (marrone) essi escono marroni. Mentre ana pallina "è" o bianca o nera. un camaleonte "diventa" bianco o nero, all'atto della misurazione, a seconda del modo in cui lo si misura.

Questa concezione di un "ruolo attivo" svolto dal procedimento di misurazione è in qualche modo analogo alla concezione che Heisenberg e Born hanno del principio di indeterminazione: se voglio avere una incertezza Δx sulla posizione di una particella, sono costretto ad imprimerle un incremento di momento Δp tale che si abbia $\Delta x\, \Delta p \simeq h$. Si veda l'argomento di Heisenberg nelle sue lezioni a Chicago.

Consideriamo un'onda piana "monodimensionale" della forma $\cos(2\pi x/\lambda)$ di lunghezza d'onda λ, che naturalmente si estende su tutta la retta. Vogliamo ottenere invece un'onda che si si estenda solo per una lunghezza Δx da noi fissata; essa dunque contiene n lunghezze d'onda, dove $n = \Delta x/\lambda$. Per fare questo dobbiamo costruire un "pacchetto", sovrapposizione di onde di diverse lunghezze d'onda in maniera che si abbia interferenza distruttiva per lunghezze maggiori di Δx. Dobbiamo dunque calcolare quale deve essere il range $\Delta\lambda$ di lunghezze d'onda con cui costruire il pacchetto. Qualitativamente si capisce immediatamente che la lunghezza d'onda $\lambda - \Delta\lambda$ deve soddisfare la condizione $\Delta x/(\lambda - \Delta\lambda) = n - 1$, ovvero

$$\frac{\Delta x}{\lambda - \Delta\lambda} = \frac{\Delta x}{\lambda} - 1 \, .$$

Eseguendo gli elementarissimi calcoli e usando $\Delta\lambda \ll \lambda$ (sicché $\lambda^2 - \lambda\Delta\Lambda \simeq \lambda^2$), si ottiene allora

$$\frac{\Delta x\, \Delta\lambda}{\lambda^2} \simeq 1 \, ,$$

ovvero, in termini del numero d'onde $k = 2\pi/\lambda$,

$$\Delta x \, \Delta k \simeq 2\pi \ .$$

Con la relazione di de Broglie $p = \hbar k$ si ha infine

$$\Delta x \, \Delta p \simeq h \ .$$