

Andrea Carati – Luigi Galgani

Appunti di Meccanica Razionale 1

Anno Accademico 2008–2009



Università degli Studi
di Milano

Indice

1	Le equazioni di Lagrange	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Brevissimi richiami sulle equazioni di Newton	2
1.3	Passaggio alle equazioni di Lagrange: esempi significativi . . .	35
1.4	Prime nozioni della teoria locale delle superfici (o varietà) . .	51
1.5	Le equazioni di Lagrange	60
1.6	Il teorema dell'energia generalizzata (o di Jacobi)	70
1.7	I punti di equilibrio	74
1.8	Alcuni esempi	76
1.9	Complementi: Il principio dei lavori virtuali	87
1.10	Complementi: Energia cinetica e metrica	91
1.11	Complementi: La particella libera relativistica	93
2	Le equazioni di Hamilton e lo spazio delle fasi	99
2.1	Introduzione	99
2.2	Deduzione delle equazioni di Hamilton. Cenno alle applicazioni	100
2.2.1	Il problema	100
2.2.2	Deduzione delle equazioni di Hamilton	103
2.2.3	Hamiltoniana ed energia: esempio della particella in coordinate cartesiane.	106
2.2.4	Una riscrittura compatta delle equazioni di Hamilton: la matrice "simplettica standard". Analogia tra le coordinate canoniche e le coordinate cartesiane	107
2.2.5	Sulla geometria dello spazio delle fasi (cenno). Le tra- sformazioni puntuali estese e le trasformazioni cano- niche.	110
2.2.6	Le variabili dinamiche e le costanti del moto	113
2.2.7	Il teorema di Liouville e la relazione con la meccanica statistica (cenno).	115
2.3	Le parentesi di Poisson e le regole di quantizzazione	117
2.3.1	Integrali del moto e parentesi di Poisson	117
2.3.2	Proprietà della parentesi di Poisson	119
2.3.3	Esempi	119

2.3.4	Parentesi di Poisson e regole di quantizzazione	121
2.4	Le trasformazioni canoniche	126
2.4.1	Il problema	126
2.4.2	La tecnica delle funzioni generatrici	131
2.5	Simmetrie e costanti del moto: il teorema di Noether. Gruppi di trasformazioni nello spazio delle fasi e loro generatori . . .	139
2.5.1	Motivazione	139
2.5.2	Gruppi (a un parametro) di trasformazioni nello spazio delle fasi e loro generatori	141
2.5.3	Simmetrie e leggi di conservazione	143
2.5.4	I generatori come operatori differenziali	144
2.5.5	Costanti del moto e simmetrie in ambito lagrangiano: il teorema di Noether	145
2.6	Lo spazio delle fasi e la meccanica statistica. L'equazione di continuità come condizione di compatibilità tra dinamica e probabilità. Il teorema di Liouville	147
2.6.1	La nozione di stato statistico, ovvero gli insiemi (<i>ingl. ensembles</i>) statistici	147
2.6.2	Il problema della compatibilità tra probabilità e dinamica: la probabilità come invariante integrale.	150
2.6.3	L'equazione di continuità e l'equazione di Liouville	152
2.6.4	Gli insiemi di equilibrio e la termodinamica statistica	156
2.6.5	Il problema del raggiungimento dell'equilibrio (legge zero della termodinamica). I paradossi della reversibilità e della ricorrenza	160
A.1	Esempi di hamiltoniane	161
A.2	La parentesi di Poisson come operatore differenziale del primo ordine, e dimostrazione dell'identità di Jacobi	164
3	I principi variazionali	167
3.1	Introduzione	167
3.2	Formulazione del problema	169
3.3	Cenni di calcolo delle variazioni: i punti stazionari (o estremali o critici) di un funzionale, e le equazioni di Eulero–Lagrange.	181
3.4	L'azione ridotta e il principio di Maupertuis–Jacobi	195
3.5	Il principio variazionale per le equazioni di Hamilton	198
3.6	La caratterizzazione delle trasformazioni canoniche, e la forma di Poincaré–Cartan nello spazio delle fasi esteso.	201
3.7	Il flusso hamiltoniano come famiglia di trasformazioni canoniche, e l'azione come corrispondente funzione generatrice	205
3.8	Il principio di Hamilton per l'equazione di d'Alembert, come tipico esempio di una teoria di campo.	211

A.1	Complementi geometrici: il sistema di equazioni differenziali associato ad una generica 1–forma; la derivata esterna (o rotore) di una 1–forma; covarianza e contravarianza	215
A.1.1	Le equazioni di Hamilton in coordinate generiche	215
A.1.2	La matrice $a_{\mu\nu}$ come “covariante bilineare”. Covarianza e contravarianza.	218
A.2	Il teorema di Stokes e la circuitazione della forma di Poincaré–Cartan	221
A.2.1	Derivata (o rotore) di una forma differenziale e Teorema di Stokes	221
A.2.2	Linee di rotore, equazioni di Hamilton e teorema di Helmholtz	227
4	L’equazione di d’Alembert per la corda vibrante come prototipo di teoria di campo	231
4.1	Introduzione	231
4.2	Generalità sulle equazioni alle derivate parziali	233
4.3	Digressione matematica: funzioni come vettori in spazi di dimensione infinita	235
4.4	Il modello del filo perfetto per le piccole oscillazioni trasversali di una corda	238
4.5	L’equazione di d’Alembert: “deduzione” alla Lagrange, mediante discretizzazione spaziale	241
4.6	Soluzione dell’equazione di d’Alembert: metodo di d’Alembert e fenomeni di propagazione	249
4.7	Soluzione dell’equazione di d’Alembert: metodo della separazione delle variabili (o di Fourier) per la corda con estremi fissi; il problema dello spettro	255
5	Teoria della relatività (ristretta o speciale)	269
	PARTE PRIMA	269
5.1	Introduzione	269
5.2	I sistemi inerziali e il principio di costanza della velocità della luce: le trasformazioni di Lorentz	270
5.2.1	Gli assiomi della teoria della relatività, confrontati con quelli galileiani	270
5.2.2	Le trasformazioni di Galileo e quelle di Lorentz	276
5.2.3	Sulla deduzione delle trasformazioni di Lorentz	281
5.3	Lo spaziotempo (o spazio–tempo)	283
5.4	Deduzione delle trasformazioni di Lorentz e dell’invarianza della metrica pseudoeuclidea	293
5.4.1	Premessa: proprietà generali delle trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali	293

5.4.2	“Deduzione” elementare delle trasformazioni di Lorentz secondo la “esposizione divulgativa” di Einstein . . .	296
5.4.3	Invarianza della metrica per trasformazioni di Lorentz.	301
5.4.4	Deduzione delle trasformazioni di Lorentz (e delle loro generalizzazioni) dall’invarianza della metrica	303
5.5	Come si comportano orologi e regoli in movimento.	307
5.5.1	Contrazione delle lunghezze.	307
5.5.2	Dilatazione dei tempi	310
5.6	Interpretazione geometrica: la metrica pseudoeuclidea nello spaziotempo, e i sistemi inerziali come corrispondenti sistemi cartesiani ortogonali; la pseudolunghezza come tempo proprio.	311
5.7	Applicazione fisica: la lagrangiana della particella libera e la relazione $E = mc^2$ (o piuttosto $E = m\gamma c^2$).	326
5.7.1	Forma covariante del principio di azione per la particella libera	337
PARTE SECONDA		341
5.8	Scopo di questa seconda parte	341
5.9	Le equazioni di Maxwell e i potenziali elettromagnetici	342
5.9.1	Le equazioni di Maxwell (con sorgenti assegnate) . . .	342
5.9.2	I potenziali elettromagnetici	347
5.10	Trasformazioni dei campi: trattazione elementare	350
5.11	Equazioni di moto di una particella in campo elettromagnetico; lagrangiana, hamiltoniana ed azione. Trattazione elementare in forma tridimensionale	355
6	Calcolo tensoriale: introduzione elementare ed applicazione alla relatività speciale	363
6.1	Contravarianza: dalla misura delle grandezze fisiche alle componenti dei vettori	365
6.2	Un approccio più generale: i campi vettoriali su varietà. Una notazione più conveniente: <i>divertissement</i> sulla <i>chain rule</i> . .	368
6.3	Covarianza e campi covettoriali. I funzionali lineari e le 1-forme differenziali	373
6.4	Il prodotto scalare come funzionale bilineare. L’isomorfismo da esso indotto tra vettori e covettori; abbassamento e innalzamento gli indici.	378
6.5	Definizione generale dei campi tensoriali	382
6.6	Gli operatori differenziali e il problema della derivata covariante	384
6.7	Applicazione: L’elettromagnetismo in forma covariante (o tensoriale)	388
6.7.1	Forma covariante della relazione tra potenziali e campi: il tensore di Faraday.	388
6.7.2	Le equazioni di Maxwell in termini del tensore di Faraday F	390

6.7.3	Particella in campo elettromagnetico: Equazioni di moto in forma covariante	391
7	Esempi classici di Sistemi Integrabili	395
7.1	Il problema di Keplero	395
7.1.1	Moti ellittici ed equazione di Keplero	402
7.1.2	Scattering di Rutherford	405
7.2	Piccole Oscillazioni	410
7.2.1	Punti di equilibrio	411
7.2.2	Alcuni esempi tratti dalla statica	413
7.2.3	Classificazione dei punti di equilibrio	413
7.2.4	Catena lineare di punti	423
7.2.5	Studio dei Modi normali	427

Prefazione

Dare alle stampe un nuovo libro, su un argomento come la meccanica razionale (o la meccanica classica come primo corso di fisica teorica), per il quale esistono nel mondo moltissimi manuali, e particolarmente "classici" grandiosi come quelli di Levi-Civita Amaldi, di Whittaker e di Appell (sul quale studiò Fermi), è un atto che richiede una giustificazione.

Cominciamo con il dichiarare che a nostro parere, tra i libri moderni che possono essere presi in considerazione per un corso dei primi anni universitari, ne esistono soltanto due che sono veramente eccezionali: si tratta del primo volume del classico manuale di Landau e Lifhsitz, e del libro di Arnold. Il manuale di Landau e Lifhsitz è semplicemente magnifico, e noi stessi lo conosciamo quasi a memoria. L'unica difficoltà è che, ai fini didattici, esso parte un po' troppo avanzato, prendendo le mosse dai principi variazionali, e quindi non può essere utilizzato come manuale per un primo corso. Per quanto riguarda il libro di Arnold, che si caratterizza per una utilizzazione sistematica dei metodi geometrici, esso è stato il prototipo di una nuova presentazione della meccanica classica, che ha costituito il punto di riferimento o di confronto per tutti i libri successivi. In particolare, il più anziano dei presenti autori è particolarmente affezionato a quel libro, avendone tradotto personalmente le prime cento pagine da una copia manoscritta, e avendole fatte circolare in Italia, prima ancora che apparisse il libro in Russia. Per gli studenti molto bravi non c'è più nulla da dire. Prendano il libro di Arnold e lo studino. Conosciamo studiosi affermati che nei primi corsi universitari hanno fatto proprio così, non hanno avuto alcun problema e hanno poi proseguito con grande profitto nella loro carriera scientifica.

L'esperienza didattica ci ha mostrato però che questa via, studio diretto del manuale di Landau e Lifshitz e/o del libro di Arnold, non è praticabile per una gran parte degli studenti che si incontrano nei corsi di laurea in fisica o in matematica, ed occorre una mediazione. A questo punto ci si può rivolgere a qualcuno dei manuali disponibili. Ma, francamente, ciascuno di questi manuali ha i suoi pregi e i suoi difetti, e nessuno di essi è per noi completamente soddisfacente. Il libro che qui proponiamo non pretende di essere migliore di nessuno di quelli. È semplicemente quello che corrisponde al modo di presentare le cose che l'esperienza ci ha suggerito. Se a qualcuno può essere utile, ne saremo ben lieti.

Aggiungiamo qualche parola di commento sullo stile cui ci siamo attenuti.

Nella didattica, nella situazione concreta in cui ci si trova nelle nostre università per insegnare un corso di meccanica classica al secondo anno, non si incontrano particolari problemi per quanto riguarda gli elementi di analisi matematica, perché è sufficiente conoscere le nozioni più semplici riguardanti il calcolo differenziale, e queste sono in generale note agli studenti. I problemi grossi si presentano con la geometria, per quanto riguarda ad esempio la

struttura dello spazio delle fasi nell'ambito della meccanica hamiltoniana, e per quanto riguarda la teoria dei gruppi e il calcolo tensoriale, in relazione alla teoria della relatività speciale.

Qui la situazione ideale si avrebbe se gli studenti disponessero di una buona parte degli argomenti discussi in quel bellissimo libro che è il primo volume dell'opera *Geometria contemporanea* di Dubrovin, Novikov e Fomenko, che raccomandiamo vivissimamente agli studenti. Ma questa situazione è ben lungi dal verificarsi. La scelta che abbiamo compiuto è di presentare gli strumenti strettamente necessari, ed al livello più semplice possibile, man mano che se ne presentava l'occasione. In tal modo ne viene fuori una presentazione non propriamente sistematica dal punto di vista delle premesse matematiche. Si è lasciato piuttosto che i problemi stessi della meccanica, man mano che si presentavano, forzassero in qualche modo la mano allo studente, nella speranza di invogliarlo poi ad un riesame sistematico delle nozioni richieste. Nella nostra esperienza didattica concreta questo modo di procedere non ci ha deluso.

Due parole ancora sullo stile. Nei manuali si corre talvolta il rischio di dare una esposizione in qualche modo *senz'anima*, in cui, essendo l'attenzione rivolta prevalentemente alla coerenza dell'esposizione, si finisce involontariamente col nascondere il fatto che ogni proposizione ha costituito una scoperta, e l'esposizione procede in maniera un poco piatta. Non si tratta di fare della storia della fisica o della matematica, ma si tratta di avere coscienza concreta del fatto che si sta ripercorrendo, umilmente, una strada che dei grandi hanno tracciato. Bach ha trascritto Vivaldi e poi lo ha superato, e così via. Naturalmente anche in fisica o in matematica la sensazione di seguire umilmente i grandi si coglie soprattutto quando si impara a leggere i classici. Questo è detto in maniera mirabile da Maxwell nella prefazione alla prima edizione del "*Treatise*", dove dice "*It is of great advantage to the student of any subject to read the original memoirs on that subject, for science is always most completely assimilated when it is in the nascent state.*" Effettivamente, non sarebbe impensabile una presentazione che ripercorresse i passi dei classici. Qui, speriamo almeno di avere dato la sensazione, attraverso diversi spunti sparsi nel testo, che la storia della scienza non debba essere relegata a materia propria a dei tecnici, ma possa essere vissuta come storia viva.

Ringraziamenti. Desideriamo ringraziare Giacomo Rossi che, avendo seguito le lezioni di Meccanica Razionale nella primavera dell'anno 2003, è stato così gentile da dedicare una parte non trascurabile del suo tempo a trascrivere su calcolatore una prima versione manoscritta del capitolo sulle equazioni di Lagrange. Questo fatto ci ha fortemente incoraggiato a continuare la stesura di queste note.

