

Capitolo 2

Introduzione alla Teoria delle Perturbazioni

§1. Introduzione. Spesso siamo in grado di “risolvere” delle equazioni differenziali del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

ma vorremmo in realtà sapere cosa siamo in grado di dire circa il problema “vicino”

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad \varepsilon \ll 1, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Allo studio di questo problema sono stati dedicati gli sforzi dei migliori matematici per almeno tre secoli a partire da Newton, tanto da far dire a Poincaré che si tratta del problema fondamentale della dinamica. In effetti il problema ebbe, almeno fino agli inizi del '900, un carattere non solo di tipo pratico, ma piuttosto di carattere fondamentale per la scienza.

In effetti Newton aveva mostrato che il moto dei pianeti poteva essere “spiegato” in prima approssimazione, introducendo una forza di gravitazione universale tra i pianeti, che però risultava di origine misteriosa (a Newton stesso). Ma se la forza di gravità tra Sole e pianeta rende conto perfettamente del fatto che il moto di quest'ultimo sia conforme alle leggi di Keplero, l'interazione mutua tra i pianeti (è questa la piccola perturbazione) farà sì che il moto sia difforme da quello predetto dalle leggi di Keplero. D'altra parte gli astronomi, accumulando i dati osservativi lungo l'arco di decenni (o di secoli nel caso di Giove e Saturno), venivano scoprendo discrepanze nel moto reale dei pianeti dalle leggi di Keplero. Quindi la visione deterministico-meccanicistica della natura si poteva imporre solo se la Meccanica newtoniana fosse stata in grado di rendere conto di tali per-

turbazioni del moto planetario¹. Si spiega in questo modo il fatto che ben tre premi furono banditi nel '700 dalla accademia delle scienze francesi per la spiegazione del moto di Giove e Saturno, ed ancora a fine '800 come mai il re di Svezia bandisse un premio (vinto da Poincaré) sul problema dei tre corpi (cioé ancora il moto di Giove e Saturno).

Fu solo all'inizio dell'ottocento che Laplace riuscí ad introdurre dei metodi matematici in grado di trattare il problema delle perturbazioni planetarie, ed a mostrare che il moto osservato di Giove e Saturno poteva essere spiegato mediante l'attrazione reciproca dei due pianeti. I metodi progredirono nell'ottocento a tal punto che il pianeta Nettuno venne "scoperto" mediante le perturbazioni che questo provocava sul moto di Urano, prima ancora di essere effettivamente osservato. Fu questo l'apoteosi massima della teoria newtoniana della gravitazione, che precedette di pochissimo il naufragio della stessa: infatti ci si rese conto, subito dopo la scoperta di Nettuno, che viceversa, la teoria delle perturbazioni non poteva spiegare in modo soddisfacente il moto di Mercurio. Questo fatto, assieme alla mai sopita avversione verso la misteriosa forza di gravità, prepararono la comunità scientifica all'accettazione della teoria della Relatività Generale formulata nel 1916 da Einstein, in cui la concezione di una misteriosa influenza a distanza tra i pianeti venne rimpiazzata dal concetto di campo "gravitazionale", un ente cioè le cui modificazioni in un punto si propagano per contiguitá ai punti vicini con una velocità finita. Si affermó così la visione moderna della fisica, in cui gli unici enti ammessi sono i campi (quantistici) che si propagano con velocità finita, anche se il compito della costruzione di una corretta teoria matematica é lasciata in ereditá alle generazioni future.

In questo capitolo cercheremo di illustrare il piú semplice dei metodi usati per studiare i sistemi perturbati, il cosiddetto metodo della media, e di mostrare alcune applicazioni a semplici problemi di fisica.

§2. La perturbazione del moto.

Il problema della perturbazione del moto dovuto ad una "perturbazione" delle equazioni di moto può essere formalizzato nel modo seguente. Si considerano la soluzioni $\mathbf{x}(t)$ dell'equazione 1 e la soluzione $\mathbf{y}(t)$ dell'equazione perturbata 2, corrispondenti al medesimo dato iniziale, cioè con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0)$, e si vuole studiare come evolve la differenza $\mathbf{d}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)$ (o anche soltanto il suo modulo $d(t)$). In generale, anche se si risolvono sistemi molto vicini tra loro, si trova che le soluzioni rimarranno vicine non per tempi proporzionali ad $1/\varepsilon$ (come si potrebbe essere indotti a pensare),² ma solamente per tempi proporzionali a $\log(1/\varepsilon)$; equivalentemente si trova che la loro distanza cresce come $\varepsilon \exp Kt$, con un K opportuno, invece che come εt (vedi avanti).

¹A questo proposito, é interessante la feroce polemica anti newtoniana di Hegel in *Enciclopedia delle scienze filosofiche*, ¶270, riguardo appunto l'origine delle perturbazioni del moto planetario

²Consideriamo il caso piú semplice possibile, quello con $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$. Allora, finché la soluzione $\mathbf{y}(t)$ resta in un dominio limitato D , si ha $\dot{d} < \varepsilon G$, ovvero $d(t) = \varepsilon G|t|$, dove $G = \sup_D |g|$. Dunque, avendo fissato un valore δ di tolleranza per la distanza tra le due soluzioni, si ha $d(t) < \delta$ per tutti i tempi t tali che $\varepsilon G|t| < \delta$, ovvero per $|t| < G\delta/\varepsilon$.

In effetti, ci si rende subito conto del fatto che la crescita della differenza è dovuta a due meccanismi in qualche modo indipendenti, di cui quello più importante riguarda le proprietà dei movimenti del sistema imperturbato stesso. Questo meccanismo è la possibile divergenza esponenziale delle orbite del sistema imperturbato (proprietà che viene solitamente associata alla cosiddetta proprietà di *caoticità*). Per comprendere questo fatto, consideriamo il caso più semplice possibile, quello di un sistema monodimensionale, con equazione

$$\dot{x} = Kx$$

le cui soluzioni sono $x(t) = x_0 e^{Kt}$. Per tale sistema, la distanza $d(t)$ di due soluzioni corrispondenti a due dati iniziali diversi con distanza iniziale d_0 è data evidentemente da

$$d(t) = d_0 e^{Kt},$$

e dunque cresce non linearmente, ma esponenzialmente, col tempo se $K > 0$. Questo è il primo meccanismo cui si accennava, che concerne una possibile “instabilità” del sistema imperturbato. Se ora consideriamo il confronto fra le soluzioni dei due sistemi in studio, quello perturbato e quello imperturbato, con dati iniziali coincidenti, allora è chiaro cosa accade. Il piccolo termine perturbativo produce una deviazione tra le due orbite, e questo effetto è piccolo. Ma a questo punto il primo meccanismo intrinseco al sistema imperturbato (ammettendo che tale meccanismo sia presente), ovvero quello di divergenza esponenziale di orbite inizialmente vicine, ha un ruolo preponderante, e determina la divergenza esponenziale anche delle orbite relative ai due diversi sistemi. Riassumendo ciò che accade può essere descritto così:

1. il termine $\varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{y})$ allontana leggermente le due orbite;
2. il campo imperturbato $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (qualora presenti moti iperbolici come nel caso $\dot{d} = Kd$ con $K > 0$) determina l'evoluzione divergente di un'orbita rispetto all'altra.

§3. Stima della crescita dell'errore.

Tornando al caso generale, vogliamo valutare quale sia la tipica evoluzione nel tempo della distanza tra la soluzione dell'equazione imperturbata e quella dell'equazione perturbata, o, in altri termini, vogliamo sapere come evolve l'errore che si commette se si approssima il sistema completo con quello imperturbato. L'idea è quella di introdurre come variabile la quantità $\mathbf{d}(t)$, differenza tra la soluzione $\mathbf{y}(t)$ di (2) (che spesso chiameremo *soluzione vera*) e la soluzione $\mathbf{x}(t)$ del sistema imperturbato (1) e di scrivere l'equazione differenziale cui essa soddisfa. Poniamo cioè $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, sicché si ottiene

$$\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}). \quad (3)$$

Il problema è quindi diventato quello di ottenere una stima circa la crescita (del modulo) di \mathbf{d} usando l'equazione (3). Per tempi non troppo grandi, per cui sia garantito che \mathbf{y} rimanga in un dominio limitato D (o comunque per forze limitate) posso maggiorare l'ultimo termine del membro di destra con un'opportuna costante G (ad esempio $G = \sup_D |\mathbf{g}|$). Inoltre, se assumo che la perturbazione f sia regolare, vale

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| < K|\mathbf{y} - \mathbf{x}| ,$$

dove K è la costante di Lipshitz per \mathbf{f} (ad esempio K può essere stimata dal sup dei valori assoluti delle derivate di \mathbf{f}). Trovo dunque

$$|\mathbf{y}'(t) - \mathbf{x}'(t)| < K|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)| + \varepsilon G .$$

Notiamo che

$$d = \frac{(\mathbf{y}'(t) - \mathbf{x}'(t)) \cdot (\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t))}{|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)|} \leq |\mathbf{y}'(t) - \mathbf{x}'(t)| ,$$

per, dalla disuguaglianza precedente otteniamo

$$\dot{\delta} - K\delta \leq \varepsilon Gt .$$

La forma del primo membro suggerisce di moltiplicare la disequazione per il fattore e^{-Kt} , perché allora trovo immediatamente

$$\frac{d}{dt}(e^{-Kt}\delta) \leq \varepsilon G e^{-Kt} ,$$

e questa può essere integrata a dare (essendo $\delta(0) = 0$)

$$\delta \leq \varepsilon e^{Kt} G \int_0^t ds e^{-Ks} .$$

Poiché l'integrale a secondo membro converge per $t \rightarrow +\infty$ (ed è funzione crescente di t), possiamo maggiorarlo con la costante $1/K$ (il valore limite) e scrivere più semplicemente

$$d \leq \varepsilon C e^{Kt} , \quad (C = G/K) , \quad (4)$$

Quella che abbiamo ottenuto è una maggiorazione, la quale risulta tuttavia, per molti sistemi, una stima accurata, nel senso che si ha realmente

$$d(t) \simeq \varepsilon C e^{Kt} .$$

Questo fatto, se davvero si realizza, segnala il presentarsi di un regime di tipo caotico, perché due orbite che partono vicine rimangono vicine solo per un tempo proporzionale a $\log(1/\varepsilon)$ e non per un tempo proporzionale a $1/\varepsilon$. Infatti, poiché la distanza evolve approssimativamente come $\varepsilon C e^{Kt}$, allora il tempo per

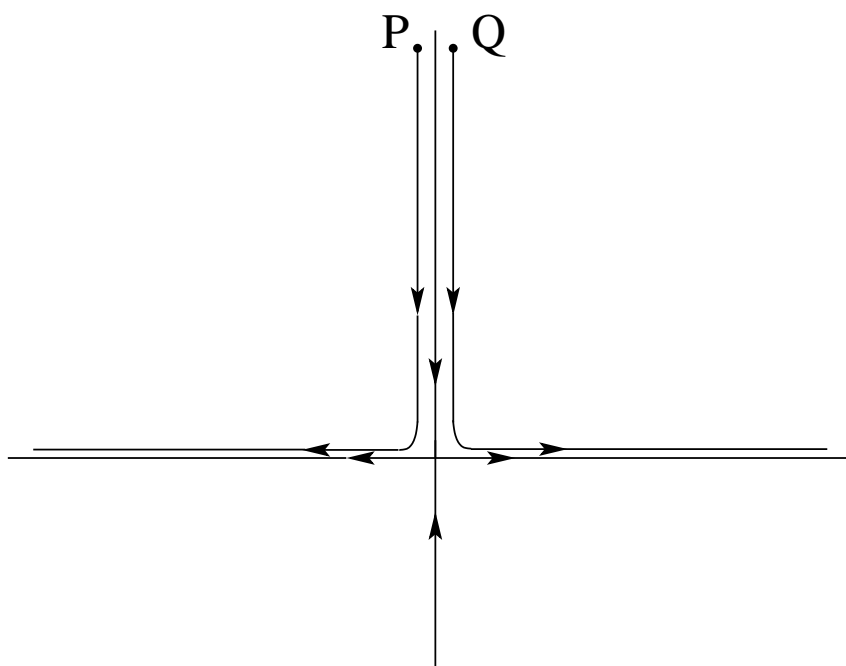


Figura 2.1: Illustrazione della separazione esponenziale.

il quale due traiettorie restano ad una distanza minore di un valore prefissato (valore di tolleranza) δ può essere valutato come $t < \frac{1}{K} \log \frac{\delta/C}{\epsilon}$. Si può anche dire che due orbite restano vicine di ordine ϵ soltanto per un tempo $t \simeq \frac{1}{K}$, mentre quando $t \simeq \frac{1}{K} \log(1/\epsilon)$ la loro distanza è già diventata di ordine 1, cioè le due traiettorie hanno perso ogni relazione l'una con l'altra. In altri termini, al di là di tale tempo la conoscenza della traiettoria del sistema imperturbato non dà nessuna informazione sulla traiettoria del sistema "vero". Esistono naturalmente dei casi in cui la stima (4) è realmente pessimistica: un esempio è dato dai sistemi con "attrito", in cui tutte le traiettorie tendono ad un medesimo punto di equilibrio, e quindi la distanza tra le soluzioni non solo non cresce, ma addirittura decresce. Un altro esempio importante è quello relativo al comportamento in prossimità dei punti ellittici.

Nello studio del moto attorno ai punti di equilibrio conviene prendere come sistema imperturbato quello linearizzato nel punto di equilibrio (che può sempre essere pensato situato nell'origine). Si prende dunque $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}$ dove \mathcal{A} è una matrice costante. Per la variabile $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ si ha allora l'equazione

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathcal{A}\mathbf{d} + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}).$$

Questo sistema può essere riscritto in forma integrale nel modo seguente

$$\mathbf{d} = \epsilon \int_0^t e^{\mathcal{A} \cdot (t-s)} \mathbf{g}(\mathbf{x}(s) + \mathbf{d}(s)) ds,$$

dove $e^{\mathcal{A}(t-s)}$ è la matrice esponenziale di $\mathcal{A}(t-s)$. Il carattere delle soluzioni dipenderà da come è fatta \mathcal{A} . Quando è presente almeno un autovalore λ di \mathcal{A} con parte reale positiva si ha

$$|e^{\mathcal{A}(t-s)}\mathbf{g}| \sim e^{\lambda(t-s)}|\mathbf{g}| \longrightarrow |\mathbf{d}| \sim \varepsilon(e^{\lambda t}).$$

Quando invece tutti gli autovalori sono immaginari, come nel caso dei punti di equilibrio ellittici, allora la matrice $e^{\mathcal{A}}$ è unitaria, per cui si ha

$$|e^{\mathcal{A}(t-s)}\mathbf{g}| \sim |\mathbf{g}| \longrightarrow |\mathbf{d}| \sim \varepsilon t,$$

e la crescita è soltanto lineare nel tempo. In questo caso le soluzioni del problema imperturbato e del problema lineare rimarranno vicine per tempi che crescono con l'inverso di ε , e non solamente logaritmicamente. È precisamente in questo caso che si riesce a sviluppare una teoria efficace delle perturbazioni.

§4. Principio della Media. In questo paragrafo ci proponiamo di illustrare uno degli strumenti più semplici (ed allo stesso tempo più utili) della teoria delle perturbazioni, il cosiddetto *principio della media*. La trattazione si riferirà ad un sistema posto nella forma standard

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= 0 + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{r}, \theta) \\ \dot{\theta} &= \omega + \varepsilon g(\mathbf{r}, \theta), \end{aligned} \tag{5}$$

dove \mathbf{f} e g sono entrambe funzioni periodiche (di periodo 2π) dell'angolo θ , mentre $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$. Nel prossimo paragrafo mostreremo come molti sistemi hamiltoniani possano ricondursi a questo caso standard, facendo ricorso alle cosiddette variabili azione-angolo.

Notiamo che nel caso in cui r è monodimensionale (e $r > 0$), il sistema imperturbato si riduce all'analogo continuo del twist-map, in quanto le soluzioni per $\varepsilon = 0$ si riducono a

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 \\ \theta(t) &= \omega(r_0)t + \theta_0. \end{aligned}$$

dove r_0 e θ_0 sono opportune costanti (vedi avanti). Si noti anche che nel caso imperturbato r è una costante del moto, mentre l'angolo θ si muove (gira) con una velocità finita ω .

Così anche nel caso perturbato, se ε è piccolo, l'evoluzione della variabile θ procede (θ *gira*) a velocità ancora sostanzialmente uguale ω , mentre r varia lentamente con velocità di ordine ε . Questo fatto viene descritto dicendo che abbiamo una variabile *veloce*, θ , ed una variabile *lenta*, r .

Poiché \mathbf{f} è periodica in θ , e inoltre θ è una variabile veloce, le varie armoniche delle componenti di \mathbf{f} cambieranno velocemente di segno, per cui il loro contributo all'evoluzione di \mathbf{r} tenderà ad annullarsi in media su un periodo fondamentale. Questo suggerisce di passare ad un *sistema mediato*, definito da

$$\dot{\mathbf{z}} = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{6}$$

dove

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{z}, \theta) d\theta$$

è il valore medio di \mathbf{f} rispetto all'angolo θ . Il principio della media afferma che questo sistema mediato approssima bene il sistema di partenza. Che cosa voglia dire "bene" è specificato dal seguente

Teorema 1 (Teorema della media) *Siano $\mathbf{r}(t)$ una soluzione dell'equazione (5) e $\mathbf{z}(t)$ una soluzione di (6) con il medesimo dato iniziale, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{z}(0)$. Se \mathbf{f} e g sono sufficientemente regolari, allora esiste una costante C tale che*

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{z}(t)| < C\varepsilon \quad \text{nell'intervallo temporale} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Osservazione. Dalle considerazioni fatte in precedenza, nel caso in cui $K = 0$, avevamo trovato

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_\varepsilon| \sim \varepsilon t,$$

cioè che la distanza diventava di ordine $O(1)$ dopo un tempo dell'ordine $t \sim 1/\varepsilon$. Invece il teorema della media ci dice che dopo tale tempo si ha ancora

$$|\mathbf{z} - \mathbf{r}_\varepsilon| \sim \varepsilon$$

cioè le soluzioni sono ancora vicine. Questo mi dice che lo studiare $\dot{\mathbf{z}} = \varepsilon \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$ anche su tempi così lunghi ha un gran valore, perché la soluzione vera è ancora vicina alla soluzione del sistema mediato.

Una trattazione a parte meriterebbero i sistemi hamiltoniani. Mentre nel caso generale qui considerato si ha $|\mathbf{z} - \mathbf{r}_\varepsilon| \sim \varepsilon^2 t$, nel caso dei sistemi hamiltoniani è possibile dimostrare che, per ogni t fissato, $|\mathbf{z} - \mathbf{r}_\varepsilon|$ è un infinitesimo di ordine superiore ad ogni potenza di ε .

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sull'idea di effettuare un cambiamento di variabili $(\mathbf{r}, \theta) \rightarrow (\mathbf{y}, \psi)$ del tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}, \psi) \\ \theta &= \psi + \varepsilon G(\mathbf{y}, \psi) \end{aligned} \tag{8}$$

scegliendo la funzione \mathbf{F} in maniera tale che il sistema (5) scritto nelle nuove variabili diventi

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \varepsilon \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon)\end{aligned}\quad (9)$$

Si noti che idealmente vorrei che questo cambio di variabili portasse a nuove equazioni in cui scomparissero tutti i termini dipendenti linearmente da ε , e rimanessero solo termini con potenze superiori. In tal caso avrei un sistema della forma di quello di partenza, ma con una perturbazione molto più piccola, di ordine ε^2 invece che ε . Purtroppo in generale questo non è possibile, poiché la media non può essere eliminata (mentre la media può essere eliminata nel caso speciale dei sistemi hamiltoniani).

Dalle stima (4) effettuata nella sezione precedente, è allora evidente che varrà

$$|\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq \varepsilon^2 C_0 e^{\varepsilon K t}, \quad (10)$$

dove la costante K è la costante di Lipschitz di $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y})$, e C_0 una opportuna costante. Questo mostra che \mathbf{z} e \mathbf{y} rimarranno vicini (ordine ε^2) fino a tempi $t \simeq 1/\varepsilon K$, ma non a tempi maggiori, perché comunque la divergenza esponenziale delle orbite è ancora presente, anche se con un tasso molto minore rispetto al caso generale considerato nel paragrafo precedente.

Come usare la disuguaglianza (10) per dimostrare il teorema verrà illustrato in seguito. Ci concentriamo adesso su come determinare la funzione $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi})$. Per semplicità scegliamo $G \equiv 0$, ovvero $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta}$ (siamo liberi nella scelta della trasformazione, e poiché non trarremo vantaggio dalla libertà su $\boldsymbol{\psi}$, la fissiamo così). Quindi, introducendo il cambiamento di variabile

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\theta},\end{aligned}\quad (11)$$

si ha

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{y}} + \varepsilon \dot{\mathbf{y}} \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{F} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{\theta}} \partial_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{F} = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{F}, \boldsymbol{\theta}) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{F}) + \varepsilon g = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) + \varepsilon \dots\end{aligned}$$

Nell'espressione per $\dot{\mathbf{r}}$ l'ultima eguaglianza deriva semplicemente dalla definizione del sistema iniziale, dove si è sostituito \mathbf{r} con $\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{F}$. Notando che $\varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{F}, \boldsymbol{\theta}) = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) + O(\varepsilon^2)$, posso riscrivere la prima equazione riordinandone i termini e sostituendo a $\boldsymbol{\theta}$ il valore dato dalla seconda equazione, valutata al prim'ordine, ottenendo infine

$$(\mathbb{I} + \varepsilon \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{F}) \dot{\mathbf{y}} = -\varepsilon \boldsymbol{\omega} \partial_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{F} + \varepsilon \mathbf{f} + O(\varepsilon^2). \quad (12)$$

Perché in questa espressione la perturbazione sia di ordine ε^2 deve valere

$$-\varepsilon\omega\partial_\theta\mathbf{F} + \varepsilon\mathbf{f} = 0$$

ovvero, deve essere soddisfatta la seguente equazione (alle derivate parziali), detta *equazione omologica*,

$$\omega(\mathbf{y})\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\theta} - \mathbf{f}(\mathbf{y},\theta) = 0. \quad (13)$$

Se fossero presenti più angoli veloci, allora l'equazione omologica avrebbe la forma $\sum_i \omega_i \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\theta_i} - \mathbf{f} = 0$.

Vediamo ora quali sono le condizioni di risolubilità della equazione omologica. Innanzitutto notiamo che possiamo trattare \mathbf{y} come un parametro, perché nell'equazione l'unica derivata che entra è quella rispetto a θ . Poi si nota che poiché per funzioni periodiche la media della derivata è uguale a zero, allora integrando la (13) su di un periodo si trova che deve essere $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) = 0$. Se questa condizione non è soddisfatta non vi può essere soluzione. Ci è lo si dimostra anche con un calcolo diretto. Infatti da (13) (se $\omega \neq 0$ come si è supposto) si trova

$$\partial_\theta\mathbf{F} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y},\theta)}{\omega(\mathbf{y})},$$

da cui integrando segue (notando che $\omega(\mathbf{y})$ non dipende da θ)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\omega(\mathbf{y})} \int_0^\theta \mathbf{f}(\mathbf{y},\theta')d\theta'.$$

Poiché \mathbf{F} deve essere periodica (altrimenti il cambiamento di variabili non è ben definito), devono essere uguali $\mathbf{F}(\theta + 2\pi) = \int_0^{\theta+2\pi} \mathbf{f}/\omega$ e $\mathbf{F}(\theta) = \int_0^\theta \mathbf{f}/\omega$, deve essere cioè

$$\frac{1}{\omega(\mathbf{y})} \int_\theta^{\theta+2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{y},\theta')d\theta' = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{y},\theta)d\theta = 0.$$

In generale la precedente condizione non è soddisfatta. Siamo così indotti a considerare l'equazione

$$\omega\partial_\theta\mathbf{F} - (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}) = 0,$$

per la quale la condizione espressa dall'equazione omologica è sicuramente soddisfatta, e che porge come soluzione

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\omega(\mathbf{y})} \int_0^\theta (\mathbf{f}(\mathbf{y},\theta') - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}))d\theta'. \quad (14)$$

Ne segue allora che $-\omega\partial_\theta\mathbf{F} + \mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}$, e sostituendo nella (12) otteniamo l'equazione

$$(\mathbb{I} + \varepsilon\partial_y\mathbf{F})\dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{f}} + O(\varepsilon^2),$$

che infine da (moltiplicando per $(\mathbb{I} + \varepsilon\partial_y\mathbf{F})^{-1}$ ed espandendo in serie di ε)

$$\dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{f}} + O(\varepsilon^2).$$

Dunque la trasformazione di coordinate porta il sistema effettivamente nella forma (9).

Pertanto, dalla stima (10) segue che la soluzione di

$$\dot{\mathbf{z}} = \varepsilon\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}),$$

resta vicina alla soluzione di

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^2),$$

di una quantità ordine $O(\varepsilon^2)$ per tempi di ordine $O(\varepsilon^{-1})$. Per completare la dimostrazione del teorema della media non resta che valutare quanto distano \mathbf{r} e \mathbf{y} . Però si osserva che il contributo alla differenza tra \mathbf{r} e \mathbf{y} costituisce soltanto una (piccola) distorsione delle coordinate che abbiamo introdotto tramite la (11), in quanto si ha

$$|\mathbf{r} - \mathbf{y}| = \varepsilon|\mathbf{F}(\mathbf{y}, \theta)| \leq \varepsilon C', \quad (15)$$

dove la costante C' , cioè il $\sup|\mathbf{F}|$, è legata ai valore di ω e di $|\mathbf{f}|$ (vedi la (14)). Questa distanza tra \mathbf{r} ed \mathbf{y} dovuta solo al cambiamento di coordinate viene comunemente detta *deformazione*, mentre l'allontanamento (sistematico) tra \mathbf{y} e \mathbf{z} dovuto al fatto che essi evolvono secondo equazioni differenziali leggermente diverse viene chiamato *drift*.

La tesi del teorema alla fine è provata usando la disuguaglianza triangolare

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{r} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|;$$

si usano inoltre la (10) per $t = 1/\varepsilon$ per stimare $|\mathbf{y} - \mathbf{z}|$ e la (15) per stimare $|\mathbf{r} - \mathbf{y}|$. Si ottiene infine

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}| \leq \varepsilon C' + \varepsilon^2 C_0 e^K,$$

cioè la tesi.

Q.E.D.

§5. L'azione come invariante adiabatico: sistemi monodimensionali.

Abbiamo visto che il Teorema della Media si applica ad un sistema di forma particolare, in cui una delle variabili sia un angolo veloce, e le altre variabili siano lente. In realtà, si dimostra che, almeno se mi limito a considerare sistemi

hamiltoniani, in tutti i casi "interessanti" (moto dei pianeti, moti in prossimità dei punti di equilibrio, etc.) si possono introdurre delle coordinate di cui metà siano angoli (veloci) e l'altra metà variabili lente: sono le cosiddette variabili azione-angolo. In questo paragrafo ci limitiamo a trattare il caso di sistemi con un solo grado di libertà, perché il caso generale presenta alcune sottigliezze di tipo geometrico che per adesso vogliamo tralasciare.

Cominciamo dunque a considerare un'hamiltoniana "imperturbata" del tipo

$$H_0(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2. \quad (16)$$

Nel caso imperturbato, sappiamo che vi è almeno una quantità che non evolve, quindi una quantità "lenta": l'energia $E = H(p, q)$. Possiamo dunque pensare di usare come nuove variabili l'energia stessa ed una sua variabile coniugata, che però non sappiamo ancora se sia un angolo o meno. Se guardiamo ad esempio al ritratto in fase del pendolo (vedi la figura del capitolo 1), quello che stiamo tentando di fare è di usare una specie di coordinate polari, dove le circonferenze $\rho = \text{const.}$, divengano le linee di livello $H(p, q) = \text{const}$ dell'energia, e di trovare qualcosa di simile all'angolo θ . Il problema aggiuntivo consiste nel fare tutto questo mediante una trasformazione canonica³, di modo che il sistema di equazioni del moto rimanga hamiltoniano (cosa che, come vedremo, procurerà alcuni vantaggi). Si tratta dunque di "completare la trasformazione", cioè di individuare una coordinata angolare tale che la trasformazione sia canonica.

Per determinare la coordinata angolare ci si può ricondurre a trovare la funzione generatrice della trasformazione. Ricordo che se ho una funzione $F(q, P)$, la trasformazione $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ definita implicitamente dal sistema

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial F}{\partial P}, \end{aligned}$$

risulta canonica. Nel nostro caso, dalla conservazione dell'energia abbiamo l'espressione esplicita di p in funzione di q ed E data da

$$p = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}, \quad (17)$$

per cui, per determinare una funzione $F = F(q, E)$ che mi permetta di completare la trasformazione, devo risolvere l'equazione differenziale (sulla scelta del segno + vedi sotto)

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \sqrt{2m(E - V(q))}.$$

³Una breve introduzione sulle trasformazioni canoniche si può trovare in rete sulle dispense di Meccanica Razionale 1 dei medesimi autori.

Una soluzione di questa equazione, permette, tramite $Q = \frac{\partial F}{\partial E}$, di trovare la coordinata coniugata all'energia. Una soluzione di questa equazione è semplicemente la seguente

$$F(q) = \int_0^q \sqrt{2m(E - V(q'))} dq' . \quad (18)$$

In questa espressione abbiamo scelto il segno positivo della radice, cioè stiamo considerando solo i momenti positivi, per cui la trasformazione potrà coinvolgere solo il semipiano $p > 0$. Come la possiamo estendere a tutto il piano? Cominciamo notando che la funzione $F(q)$ definita sopra (si pensi ad E come a un parametro) si può anche scrivere come

$$F(q, E) = \int_{\gamma} p dq , \quad (19)$$

dove ora l'integrale è inteso come integrale curvilineo, e la curva γ è la superficie di livello $H_0(p, q) = E$. Per convincersene basta parametrizzare la curva γ mediante q : in questo caso riottengo l'espressione (18). Però tale parametrizzazione mediante q non è valida per l'intera curva, fallisce nei punti dove γ interseca l'asse delle q (cioè dove $p = 0$). D'altra parte sappiamo che l'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione: il valore di $F(q, E)$ risulta essere il medesimo indipendentemente dalla parametrizzazione che si adotte per la curva. In particolare si possono adottare parametrizzazioni (ad esempio mediante la lunghezza) che siano valide per tutta la curva, ed estendere così la trasformazione anche al semipiano $p < 0$. Il prezzo da pagare è quello di ottenere una funzione $F(q, E)$ multivoca (a più valori), il medesimo fenomeno che presenta la radice quadrata nel piano complesso. Ciò è evidente dal fatto che per fissati q ed E la relazione $\frac{\partial F}{\partial q}$ deve fornirmi due valori di p (di segno opposto), cioè la funzione F deve avere (almeno) due valori. Naturalmente questo riguarda la funzione F , che si presenta un po' come uno strumento ausiliario. La trasformazione trovata sarà invece ben definita.⁴

Avendo trovato F , la variabile coniugata all'energia sarà data da

$$Q = \frac{\partial F}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \int_{\gamma} p dq = \int_0^q \frac{mdq'}{\sqrt{2m(E - V(q'))}} . \quad (20)$$

Ne segue che Q coincide con il *tempo* impiegato dalla soluzione per andare dal punto $q = 0$ al punto q .⁵ Dunque, a meno che il sistema non sia isocrono (cioè con periodo indipendente da E), Q non può essere un angolo, perché quando il punto (p, q) torna in se stesso dopo aver percorso la curva di livello γ , ci si

⁴Almeno in regioni aperte del piano (p, q) , che si capirà in seguito come caratterizzare.

⁵Si tratta di una cosa ben nota. Nella (17) si sostituisce $p = m\dot{q}$, si ricorda $\frac{dt}{dq} = 1/\dot{q}$, e si calcola $t - t_0 = \int_0^t \frac{dt}{dq} dq$.

aspetta che la coordinata angolare sia variata di 2π , mentre l'incremento di Q è pari al periodo $T = T(E)$ dell'orbita, che dipende dall'orbita considerata e non è in generale costante. Per vedere ciò, notiamo che il periodo si può scrivere nel modo espressivo seguente

$$\Delta Q = \frac{\partial}{\partial E} \oint_{\gamma} p dq ,$$

e che $\oint_{\gamma} p dq$ è l'area racchiusa dalla curva di livello.

Quindi l'unico caso in cui il periodo della soluzione non dipende dall'energia è quello in cui questa area sia proporzionale all'energia stessa. In tal caso il sistema si dice isocrono, ed effettivamente la coordinata Q (a meno di riscalamenti) è un vero angolo. Però questo caso si verifica solamente per l'oscillatore armonico (come verificheremo più sotto). Nei sistemi generici (ad esempio il pendolo), l'area dipende non linearmente dall'energia e quindi Q non è una buona coordinata angolare.

L'idea consiste allora nel cercare di usare come coordinata, non l'energia E ma una sua funzione I (detta *azione*), di modo che le curve $I = \text{const}$, rimangano sempre le medesime linee di livello $H_0(p, q) = \text{const}$, ma la variabile coniugata φ sia invece un angolo, cioè si incrementi di 2π quando si compia un giro lungo la linea di livello. Poiché vale $\varphi = \frac{\partial F}{\partial I}$, la giusta funzione I deve essere tale che

$$\Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial I} \oint_{\gamma} p dq = 2\pi ,$$

per cui segue che $\oint_{\gamma} p dq$ deve dipendere linearmente da I . Quindi l'unico modo possibile di scegliere I (a parte costanti additive), è quello di porre

$$I \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} p dq . \tag{21}$$

Detto in altri termini, l'azione coincide, a meno del fattore 2π , con l'area racchiusa dalla curva $H_0(p, q) = E$.

Notiamo che quanto detto finora si applica non solo ad hamiltoniane naturali (cioè della forma (16)), ma si applica a generiche hamiltoniane le cui curve di livello siano (almeno in una certa regione dello spazio delle fasi) chiuse. Quindi l'azione viene *definita* dalla (21) per tutti i sistemi di questo tipo. Naturalmente, nel caso di sistemi come il pendolo, in cui la topologia delle curve di livello cambia, allora il cambiamento di variabili che porta alle variabili azione-angolo presenterà delle singolarità, tipicamente lungo le separatrici.⁶

Con questa scelta, l'hamiltoniana riscritta nelle nuove variabili dipenderà solo da I , avrà cioè

$$H_0 = H_0(I) .$$

⁶Ed infatti il comportamento del sistema in vicinanza delle separatrici sfugge usualmente alla teoria delle perturbazioni, perchè i fenomeni sono esponenzialmente piccoli, cioè più piccoli di ogni potenza di ϵ .

Le equazioni del moto diverranno quindi

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \varphi} = 0 \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H_0}{\partial I} = \omega(I), \end{aligned}$$

che sono nella forma (5) con $\varepsilon = 0$.

Consideriamo ora una perturbazione del nostro problema, cioè una hamiltoniana del tipo $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, t)$, con una perturbazione dipendente del tempo.⁷ Affinché possa applicare il teorema della media però, le equazioni di moto devono essere equazioni autonome (non dipendenti dal tempo). Ciò può essere ottenuto, nel presente caso, passando allo spazio delle fasi esteso, aggiungendo cioè un'equazione di moto per il tempo t nella forma $\dot{t} = 1$. Si ottengono così le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1 \\ \dot{I} &= 0 - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \end{aligned}$$

che sono esattamente della forma (5) considerata nel teorema della media. Vediamo dunque che l'azione è una variabile lenta, mentre l'angolo è una variabile veloce, almeno nelle regioni in cui ω non si annulla. Ora se calcoliamo la media della perturbazione, questa si annulla, in quanto si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} d\varphi = H_1(I, 2\pi, t) - H_1(I, 0, t) \equiv 0,$$

essendo la funzione H_1 periodica in φ . Questo è il punto dove entra l'aspetto hamiltoniano delle nostre equazioni di moto: la media della perturbazione si annulla sempre, perché la perturbazione è la derivata dell'hamiltoniana rispetto ad un'angolo e dunque ha sempre media nulla. Pertanto il sistema mediato si riduce al seguente

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1 \\ \dot{J} &= 0. \end{aligned}$$

Dunque la J è una costante del moto, e quindi, applicando il teorema della media (cioè usando la (7)), si ottiene che neppure l'azione I varierà, a meno di termini ordine ε , per tempi di ordine $1/\varepsilon$. Quindi l'azione per tempi *lunghi* si sposterà al

⁷Se la perturbazione non dipendesse dal tempo, otterrei di nuovo un sistema integrabile che sono in grado di studiare. Per questo il primo esempio di sistema non banale che abbiamo studiato nel Capitolo 1 era il pendolo forzato, con forzante esterna dipendente dal tempo.

più di quantità di ordine ε rispetto al suo valore iniziale. Sarà una *quasi* costante del moto, o equivalentemente si dirà, con un termine tratto dalla terminologia fisica, che l'azione è un *un invariante adiabatico*.

§6. Il caso dell'oscillatore armonico.

Il passaggio alle variabili azione angolo, nel caso dell'oscillatore armonico

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2},$$

si effettua agevolmente tramite la definizione (21) dell'azione. Infatti le linee di livello

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E,$$

sono ellissi di semiassi $a = \sqrt{2mE}$ e $b = \sqrt{2E/k}$; ora usando la formula per l'area dell'ellisse $A = \pi ab$, troviamo

$$I = \sqrt{\frac{m}{k}} E,$$

cioè, in termini della frequenza $\omega = \sqrt{k/m}$, troviamo

$$E = \omega I.$$

D'altra parte, se introduciamo l'angolo φ tramite la consueta relazione $\tan \varphi = p/q$ la parametrizzazione dell'ellisse è data da

$$\begin{aligned} q &= b \cos \varphi = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \cos \varphi \\ p &= a \sin \varphi = \sqrt{2m\omega I} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (22)$$

che in modo naturale induce a ritenere che la coppia (I, φ) sia la corretta coppia di variabili coniugate. Questo si verifica direttamente, perché un calcolo esplicito fornisce

$$pdq = Id\varphi + d(I \sin \varphi \cos \varphi),$$

che mostra che la condizione di Lie è verificata.⁸ Naturalmente il calcolo diretto passa attraverso la valutazione esplicita dell'integrale che fornisce la funzione generatrice (che scriviamo esplicitamente perché ci servirà subito)

$$F(I, q) = \int_0^q \sqrt{2m} \sqrt{\omega I - \frac{m\omega^2}{2} x^2} dx, \quad (23)$$

⁸Ricordiamo che per una trasformazione $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ indipendente dal tempo la condizione di Lie richiede che la forma differenziale $pdq - PdQ$ sia un differenziale esatto, ovvero esista F tale che sia $pdq - PdQ = dF$.

e attraverso l'uso della relazione

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial I} .$$

Consideriamo ora il caso in cui il parametro k della molla vari lentamente nel tempo. Ciò può essere realizzato fisicamente ad esempio se la lunghezza di un pendolo viene variata lentamente; allora nell'approssimazione delle piccole oscillazioni questo processo si descrive matematicamente introducendo una dipendenza esplicita di k dal tempo. Alla medesima schematizzazione si riconduce la descrizione della corda di violino, quando la sua lunghezza venga fatta variare lentamente spostando opportunamente il dito con cui si schiaccia la corda. In questo caso la trasformazione (22) dipende esplicitamente dal tempo, in quanto dipende esplicitamente dal tempo la frequenza ω per cui l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate diverrà

$$K(I, \varphi) = \omega I + \frac{\partial F}{\partial t} (\omega = \omega(t)) .$$

La perturbazione, in questo caso, sarà data allora dal termine $\frac{\partial F}{\partial t}$, che risulta piccolo in quanto abbiamo ammesso che i parametri varino lentamente nel tempo, cioè le sue derivate temporali sono piccole. Per capire però con precisione quale sia il parametro perturbativo, conviene calcolare esplicitamente la perturbazione, che in questo caso ha una espressione semplice. Infatti si ha

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} \int_0^q \sqrt{2m} \frac{\omega I - m\omega^2 x^2}{\sqrt{\omega I - \frac{m\omega^2}{2} x^2}} dx ,$$

e se si passa alle coordinate azione-angolo, sicché $x = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \cos \varphi$ e $dx = -\sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin \varphi d\varphi$, si trova

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} I \int_{\varphi}^{\pi} (1 - 2 \cos^2 \varphi') d\varphi' ,$$

che fornisce (usando l'identità trigonometrica $1 - 2 \cos^2 \varphi = -\cos 2\varphi$)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} I \sin 2\varphi .$$

Il termine di perturbazione, sarà piccolo rispetto al termine imperturbato ωI , se la quantità adimensionale $\dot{\omega}/\omega^2$ risulta piccola. In termini del periodo di oscillazione $T = 2\pi/\omega$ la condizione diventa molto espressiva. Infatti si ha $\dot{\omega}/\omega^2 = 2\pi\dot{T}$, da cui segue che la perturbazione è piccola se

$$\dot{T} \ll 1 ,$$

che può essere espressa a parole dicendo che la variazione dei parametri deve essere lenta rispetto al periodo di oscillazione.

Il teorema della media implica dunque che I rimane pressoché costante, ma questo implica allora che *l'energia del sistema non rimane costante, ma varia proporzionalmente alla variazione di ω* . Se la frequenza aumenta, l'energia dell'oscillatore aumenta, per cui è necessario compiere lavoro dall'esterno per effettuare la variazione. Però, nonostante l'energia aumenti, la relazione (22) mi dice che l'ampiezza massima di oscillazione diminuirà in modo inversamente proporzionale alla radice della frequenza, e viceversa la velocità massima aumenterà. Le cose variano in modo esattamente opposto, se la frequenza viene diminuita.

§7. Il momento magnetico come invariante adiabatico, e lo specchio magnetico. Un'altra notevole applicazione del teorema della media riguarda il cosiddetto "specchio magnetico", cioè l'effetto per cui una particella carica rimane intrappolata da un campo magnetico in una certa regione dello spazio.

Cominciamo a considerare il caso semplice di una particella carica in un campo magnetico \mathbf{B} costante (nel tempo e nello spazio), e limitiamoci a considerare il moto in un piano perpendicolare al campo. Se il campo è costante, il potenziale vettore è dato da $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{x}$, per cui l'hamiltoniana è data da

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{2c} \mathbf{B} \wedge \mathbf{x} \right)^2 ,$$

dove e è la carica della particella e c la velocità della luce, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ è la posizione della particella nel piano, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ il momento coniugato. Una comprensione maggiore del problema la si ha se si sviluppa il quadrato, e si utilizza la proprietà che, nel nostro caso, vale $(\mathbf{B} \wedge \mathbf{x})^2 = B^2 |\mathbf{x}|^2$. Si ottiene in tal modo

$$H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} - \frac{e}{2mc} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{x}) + \frac{e^2}{8mc^2} B^2 |\mathbf{x}|^2 .$$

In questa forma l'hamiltoniana assomiglia moltissimo a quella di un oscillatore armonico bidimensionale, fatta eccezione per il termine $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{x})$. Questo termine (formalmente) è simile al termine che genera la forza di Coriolis quando ci si ponga in un sistema ruotante, per cui nasce l'idea che lo si possa eliminare se passo ad un sistema ruotante opportunamente. In effetti questa è l'origine della cosiddetta *precessione di Larmor*.

Come si effettua un cambiamento di coordinate ad un sistema rotante in ambito hamiltoniano? In effetti la cosa è abbastanza semplice. Innanzitutto le nuove coordinate \mathbf{x}' nel sistema ruotante saranno legate alle coordinate vecchie \mathbf{x} mediante una trasformazione lineare del tipo

$$\mathbf{x}' = \mathcal{R}(t) \mathbf{x} ,$$

dove $\mathcal{R}(t)$ è una matrice ortogonale. Per determinare come si trasformano i momenti conviene determinare la funzione generatrice che è evidentemente data da $F = \mathbf{p}' \cdot \mathcal{R}(t) \mathbf{x}$. Ottengo allora, derivando F rispetto ad \mathbf{x} ,

$$\mathbf{p} = \mathcal{R}^\dagger(t) \mathbf{p}' ,$$

ma poichè per le matrici ortogonali la matrice trasposta coincide con l'inversa, ottengo alla fine

$$\mathbf{p}' = \mathcal{R}(t)\mathbf{p} .$$

In questo caso (ed è in effetti l'unico), i momenti si trasformano come le coordinate. Poichè la trasformazione dipende dal tempo, nelle nuove coordinate l'hamiltoniana diverrà

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} ,$$

dove H è la medesima in quanto ogni termine dell'hamiltoniana di partenza è invariante per rotazione.

L'idea è ora quella di scegliere la matrice \mathcal{R} in modo tale da eliminare il termine $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{x})$. La scelta si effettua in questo modo. Vale ovviamente

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mathbf{p}' \cdot \dot{\mathcal{R}}(t)\mathbf{x} = \mathbf{p}' \cdot \dot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}^\dagger(t)\mathbf{x}' ;$$

l'osservazione cruciale è ora che la matrice $\mathcal{A} = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\dagger$ risulta antisimmetrica⁹, per cui esiste un vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che

$$\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\dagger\mathbf{x}' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}' .$$

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ non è altro che la velocità angolare della nostra rotazione. Allora se prendiamo un sistema rotante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{2mc}\mathbf{B}$, il termine $\frac{\partial F}{\partial t}$ elimina esattamente il termine $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{x})$. Con questa scelta l'hamiltoniana diventa, sopprimendo gli apici, la seguente

$$K = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{e^2}{8mc^2}B^2|\mathbf{x}|^2 .$$

Questa allora è diventata formalmente l'equazione di un oscillatore armonico in un piano, con la frequenza che dipende dal campo magnetico B secondo la legge

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e\mathbf{B}}{2mc} .$$

Posso allora passare alle coordinate azione ed angolo mediante la trasformazione (22)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2I_1}{m\boldsymbol{\omega}}} \cos \varphi_1 & p_x &= \sqrt{2m\boldsymbol{\omega}I_1} \sin \varphi_1 \\ y &= \sqrt{\frac{2I_2}{m\boldsymbol{\omega}}} \cos \varphi_2 & p_y &= \sqrt{2m\boldsymbol{\omega}I_2} \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (24)$$

⁹Basta derivare la relazione $\mathcal{R}\mathcal{R}^\dagger = \mathbb{I}$ per ottenere $\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\dagger + \mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^\dagger = 0$, cioè l'antisimmetria della matrice.

ed ottengo l'hamiltoniana

$$K(I_1, I_2) = \omega(I_1 + I_2) .$$

Questa hamiltoniana mostra un fenomeno interessante, e cioè che le frequenze di rotazione dei due angoli φ_1 e φ_2 sono le medesime. Siamo in quello che si chiama *caso di risonanza 1-1* (uno a uno). In particolare esistono *tre* costanti del moto indipendenti: le due azioni I_1 e I_2 , ma anche lo sfasamento $\varphi_1 - \varphi_2$ tra i due oscillatori. Corrispondentemente mostreremo che tutte queste tre quantità varieranno di poco nel caso in cui si farà variare B lentamente. Questo ha come conseguenza che il *momento magnetico* è un invariante adiabatico. Infatti il momento magnetico M di una carica è proporzionale al momento angolare, essendo dato dall'espressione

$$M = \frac{e}{m} (p_x y - p_y x) .$$

Espresso in coordinate azione-angolo troviamo la seguente espressione

$$M = \frac{2e}{m} \sqrt{I_1 I_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) ,$$

che mostra come anche *il momento magnetico è un invariante adiabatico*, se lo sono le azioni e lo sfasamento.

Ora per mostrare che, nel caso in cui il campo magnetico B vari lentamente nel tempo, esistono tre invariati adiabatici, operiamo in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo precedente. Passando alle coordinate azione-angolo, l'hamiltoniana acquista un termine perturbativo dovuto al fatto che il cambiamento di coordinate dipende dal tempo, per cui otteniamo

$$K = \omega(I_1 + I_2) + \frac{\dot{\omega}}{\omega} (I_1 \sin 2\varphi_1 + I_2 \sin 2\varphi_2) .$$

Le equazioni del moto divengono quindi

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\frac{2\dot{\omega}}{\omega} I_1 \cos 2\varphi_1 \\ \dot{I}_2 &= -\frac{2\dot{\omega}}{\omega} I_2 \cos 2\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega + \frac{2\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\varphi_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega + \frac{2\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\varphi_2 , \end{aligned}$$

che però non sono ancora adatte ad applicare il teorema della media, se non altro perché vi sono due angoli veloci invece di uno solo. Mostreremo nel paragrafo seguente che la presenza di più angoli veloci ha conseguenze qualitative importanti. In questo caso però si può operare in modo semplice, introducendo due

nuovi angoli $\theta_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ e $\theta_2 = \varphi_1 + \varphi_2$, e riscrivendo le equazioni del moto usando questi due angoli. Si ottiene allora

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= -\frac{2\dot{\omega}}{\omega} I_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{I}_2 &= -\frac{2\dot{\omega}}{\omega} I_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{4\dot{\omega}}{\omega} \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 &= 2\omega + \frac{4\dot{\omega}}{\omega} \sin\theta_1 \cos\theta_2 .\end{aligned}$$

In questo modo si vede esplicitamente che l'angolo veloce è uno solo, cioè l'angolo θ_1 , mentre l'angolo $\theta_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ risulta "lento", in quanto la sua derivata $\dot{\theta}_2$ è proporzionale a $\dot{\omega}$ che abbiamo ammesso essere piccolo. Ne segue che anche lo sfasamento è un invariante adiabatico. Infatti il sistema mediato (rispetto al solo angolo θ_1) diventa

$$\begin{aligned}J_1 &= 0 \\ J_2 &= 0 \\ \Psi_2 &= 0 ,\end{aligned}$$

che mostra appunto che esistono tre invarianti adiabatici: le due azioni ed anche l'angolo "lento" $\varphi_1 - \varphi_2$, cioè lo sfasamento tra gli oscillatori. Come detto più sopra questo ha la conseguenza fisicamente rilevante che il momento magnetico risulta (quasi) costante.

Come si può spiegare allora l'effetto di specchio magnetico? Bisogna ricordare che il moto vero della carica è un moto tridimensionale. e lo si può decomporre in un moto di deriva lungo le linee di forza di \mathbf{B} , ed in un moto (di rotazione) in un piano perpendicolare a queste. Se pensiamo che il campo magnetico sia costante nel tempo (cioè statico), ma spazialmente non uniforme, allora per quanto riguarda il moto perpendicolare a \mathbf{B} , l'intensità del campo magnetico appare lentamente variabile dovuto al fatto che il moto di deriva porta la particella in zone differenti dello spazio. Se la deriva è sufficientemente lenta (o se analogamente il campo varia lentamente), le azioni del moto perpendicolari rimangono costanti, e dunque l'energia del moto perpendicolare aumenterà se la particella si sposta verso zone dove il campo è più intenso. Ora però, se il campo magnetico non dipende dal tempo, l'energia cinetica totale della particella è costante (il campo magnetico non compie lavoro), per cui se cresce l'energia del moto perpendicolare, deve diminuire l'energia cinetica del moto di deriva, cioè la particella deve rallentare, fino al punto che, per campi sufficientemente intensi, tutta l'energia diventa energia del moto perpendicolare. In questo caso avviene la riflessione, la particella invertirà il moto di deriva, dirigendosi verso zone dove l'intensità del campo diminuisce, e corrispondentemente diminuisce l'energia del moto perpendicolare. In questo modo, le zone dove l'intensità del campo magnetico è troppo alta risultano inaccessibili alla particella.

§8. Il teorema della media per sistemi con piú angoli veloci.

Vogliamo mostrare ora come il teorema della media debba essere modificato se esistono piú angoli veloci. Il cambiamento è di tipo qualitativo, perchè gli invarianti adiabatici vengono conservati non piú a meno di errori di ordine ε , ma solamente a meno di errori di ordine $\sqrt{\varepsilon}$. Questo vuol dire che anche perturbazioni piccolissime possono produrre effetti visibili, perché per piccoli ε una variazione di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ è molto piú grande di una variazione di ordine ε . Per convincersene basta considerare $\varepsilon = 10^{-6}$, per cui mentre per apprezzare variazioni di ordine $\varepsilon = 10^{-6}$ è necessaria una precisione di misura di una parte su un milione (precisione generalmente irraggiungibile), una variazione di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ può essere misurata con strumenti che hanno una precisione di solo una parte su mille, che è una precisione ragionevole.¹⁰

La differenza tra i due casi può essere compresa ad un livello euristico nel modo seguente. Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= 0 + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2) \\ \dot{\theta}_1 &= \omega_1(\mathbf{r}) + \varepsilon g_1(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2) \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2(\mathbf{r}) + \varepsilon g_2(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2) , \end{aligned} \tag{25}$$

dove le funzioni \mathbf{f} , g_1 e g_2 sono funzioni periodiche in θ_1 e θ_2 . La constatazione base nel caso di un singolo angolo, era che la funzione \mathbf{g} fluttuava rapidamente tra valori positivi e valori negativi e l'effetto era quello di "mediarsi" al valore $\bar{\mathbf{f}}$. In questo caso succede il medesimo fenomeno?

Per risponderne bisogna introdurre lo strumento della serie di Fourier, cioè di analizzare le armoniche della funzione \mathbf{f} . Poichè \mathbf{f} è periodica, è noto che può essere sviluppata in serie (doppia) di Fourier, che, usando gli esponenziali complessi, si scrive nella forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2) = \sum_{n_1, n_2} \mathbf{f}_{n_1, n_2}(\mathbf{r}) e^{i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)} .$$

Ora, poichè essenzialmente abbiamo che $\theta_1 \simeq \omega_1 t$ e $\theta_2 \simeq \omega_2 t$, abbiamo che

$$\mathbf{f} = \sum_{n_1, n_2} \mathbf{f}_{n_1, n_2} e^{i(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) t} .$$

Dunque nella serie precedente non è chiaro che tutti i termini siano oscillanti, perchè non è detto che la quantità $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2$ sia grande rispetto ad ε (ricordo che nella sommatoria si prendono valori di n_1 ed n_2 sia positivi che negativi). Se prendiamo ad esempio il sistema solare e, come perturbazione, le mutue interazioni tra i pianeti, vi sono numerosi casi di questo tipo: ad esempio la durata del periodo di rotazione di Giove è di circa 12 anni, quella di Saturno circa 30 anni,

¹⁰Per gli autori: aggiungere le polemiche sulle leggi di Newton e le perturbazioni di Giove e Saturno.

per cui $5\omega_S - 2\omega_G \simeq 0$ (essendo ω_S la frequenza di rotazione di Saturno, ω_G la frequenza di rotazione di Giove). Evidentemente i termini non oscillanti danno un contributo all'evoluzione delle variabili lente di cui bisogna tenere conto.

Il modo piú semplice per fare questo, consiste nell'operare come nel caso di un solo angolo veloce, cercando un cambiamento di coordinate che elimini la perturbazione all'ordine ε nelle equazioni per le variabili lente. Poniamo dunque

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}, \theta_1, \theta_2),$$

dove la funzione incognita (periodica) \mathbf{F} deve essere determinata in modo da eliminare i termini di ordine ε nella prima di (25). Sostituendo in quest'ultima troveró

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{y}} + \varepsilon \dot{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{F} + \omega_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta_2} = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{y}, \theta_1, \theta_2) + O(\varepsilon^2),$$

da cui ottengo l'equazione omologica seguente

$$\omega_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta_2} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \theta_1, \theta_2), \quad (26)$$

per la determinazione della \mathbf{F} . Ricordo che il termine $\varepsilon \dot{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{F}$ dà invece solo un contributo di ordine ε^2 all'equazione. L'equazione omologica in questo caso è un'equazione lineare alle derivate parziali, la cui soluzione si può determinare determinando i coefficienti di Fourier della funzione \mathbf{F} . Se poniamo $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_{n_1, n_2} \exp i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)$, allora la (26) é equivalente ad

$$i(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) \mathbf{F}_{n_1, n_2} = \mathbf{f}_{n_1, n_2}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

che si ottiene moltiplicando ambo i membri della (26) per $\exp -i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)$ ed integrando quindi l'espressione risultante in $d\theta_1$ e $d\theta_2$ (si devono anche integrare per parti i termini contenenti le derivate di \mathbf{F}). Si ottiene quindi un sistema di infinite equazioni algebriche. Per semplificarne la discussione, ci riduciamo a discutere al caso in cui \mathbf{f} sia un polinomio trigonometrico; la discussione é tecnicamente piú difficile ma sostanzialmente analoga se la funzione \mathbf{f} é sufficientemente regolare.

Cominciamo col notare che l'equazione (27) non ha soluzione se $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0$, e in particolare ciò si verifica se $n_1 = n_2 = 0$. Quindi, analogamente al caso con un unico angolo veloce, il termine di media

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\theta_1 d\theta_2 \mathbf{f}(\mathbf{y}, \theta_1, \theta_2)$$

non può essere eliminato. Se ci ricordiamo che le frequenze $\omega_1 = \omega_1(\mathbf{y})$ e $\omega_2 = \omega_2(\mathbf{y})$ dipendono dalle variabili lente, le equazioni

$$n_1 \omega_1(\mathbf{y}) + n_2 \omega_2(\mathbf{y}) = 0$$

definiscono delle superfici che vengono dette *superfici risonanti*. Nel caso in cui ci siamo posti, queste superfici risultano in numero finito. Se considero l'aperto dei *punti non-risonanti*, cioè l'insieme dei punti \mathbf{y} per cui per tutte le risonanze si ha

$$|n_1\omega_1(\mathbf{y}) + n_2\omega_2(\mathbf{y})| > C_1$$

con una certa costante C_1 , allora la soluzione dell'equazione omologica é data da

$$\mathbf{F}_{n_1, n_2} = \frac{\mathbf{f}_{n_1, n_2}}{i(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}, \quad n_1, n_2 \neq 0.$$

Nelle variabili \mathbf{y} le equazioni del moto divengono

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^2),$$

che mostrano, non solo che vale il Teorema della Media, ma anche che traiettorie che partono dall'insieme non-risonante, rimangono in tale insieme (almeno) fino a tempi di ordine $1/\varepsilon$. Il caso hamiltoniano é di nuovo caratterizzato dal fatto che $\bar{\mathbf{f}} = 0$.

Al di fuori dell'insieme non-risonante la situazione è più complicata: vi sono punti che appartengono ad una sola superficie risonante, il cosiddetto caso di risonanza semplice, punti che appartengono all'intersezione tra due superfici (risonanza doppia), all'intersezione tra tre superfici (risonanza tripla), e così via. Naturalmente gli insiemi via via più risonanti avranno dimensioni sempre minori. Il problema di capire come sono disposte queste superfici, costituisce il problema della *geometria delle risonanze*. I termini risonanti non possono venire eliminati dalle equazioni del moto, e ci riconduciamo quindi al sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \varepsilon \mathbf{f}_{ris}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\theta}_1 &= \omega_1(\mathbf{r}) + O(\varepsilon) \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2(\mathbf{r}) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

dove \mathbf{f}_{ris} contiene solo le combinazioni risonanti di angoli. Di tale sistema non si può dire nulla nel caso generale, e esso va studiato caso per caso.

§9. Il caso hamiltoniano bidimensionale. Qualche conclusione generale può essere raggiunta nel caso importante di un sistema hamiltoniano. In questo caso le variabili coniugate ai due angoli θ_1 e θ_2 saranno le due azioni I_1 e I_2 . La conclusione principale é la seguente: **le azioni variano di una quantità di ordine $\sqrt{\varepsilon}$, per tempi $t \simeq 1/\varepsilon$.**

Per dimostrare questo risultato, iniziamo dalla hamiltoniana seguente

$$H = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2).$$

In questo caso la geometria delle risonanze si semplifica: le risonanze semplici sono delle curve nel piano (I_1, I_2) , e le risonanze doppie i punti di intersezione di quelle curve. Risonanze di ordine più elevato sono del tutto eccezionali: infatti

dovrebbero esserci tre curve che si incontrano in un unico punto, ma allora tre relazioni dovrebbero essere soddisfatte con solo due parametri liberi. Chiaramente è questa una situazione non generica.

Cominciamo dunque a considerare un punto che sia risonante semplicemente, supponiamo cioè che valga

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0 ,$$

con n_1, n_2 primi tra loro. Conviene passare a due nuovi angoli, di cui uno sia veloce ed uno lento, in modo analogo a quanto abbiamo fatto nel paragrafo precedente, trattando il problema dello specchio magnetico. Poniamo quindi

$$\begin{aligned}\psi_1 &= n_1\theta_1 + n_2\theta_2 \\ \psi_2 &= m_1\theta_1 + m_2\theta_2 ,\end{aligned}$$

dove m_1 ed m_2 sono due interi tali che $m_1n_2 - m_2n_1 = 1$. Questa scelta è necessaria affinché ψ_1, ψ_2 siano angoli. La trasformazione deve infatti essere biunivoca sul toro \mathbb{T}^2 , in modo analogo al “gatto di Arnold”, per cui deve avere determinante unitario. Che tali interi m_1, m_2 esistano discende dal teorema di rappresentazione del M.C.D. due numeri, e sarà mostrato in appendice. Evidentemente ψ_1 è l’angolo lento, mentre l’angolo ψ_2 è veloce. La trasformazione viene poi completata canonicamente mediante la

$$\begin{aligned}I_1 &= n_1J_1 + m_1J_2 \\ I_2 &= n_2J_1 + m_2J_2 .\end{aligned}$$

Corrispondentemente l’hamiltoniana diventa

$$H = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon H_1(J_1, J_2, \psi_1, \psi_2) ,$$

mentre le corrispondenti equazioni del moto diventano

$$\begin{aligned}\dot{J}_1 &= 0 + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \psi_1} \\ \dot{J}_2 &= 0 + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \psi_2} \\ \dot{\psi}_1 &= n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_1} \\ \dot{\psi}_2 &= m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_2} .\end{aligned}$$

Ora posso mediare sull’angolo veloce ψ_2 ed ottenere il sistema

$$\begin{aligned}\dot{J}_1 &= \varepsilon a(J_1, J_2) \cos \psi_1 \\ \dot{\psi}_1 &= n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \varepsilon \frac{\partial a}{\partial J_1} \sin \psi_1 \\ \dot{J}_2 &= 0 ,\end{aligned}$$

dove $a(J_1, J_2)$ è il coefficiente di $\cos \varphi_1$ nello sviluppo in serie di Fourier della perturbazione H_1 . Ricordiamo infatti che, nel caso di risonanza, non possono essere eliminati gli angoli risonanti, ovvero nel nostro caso l'angolo ψ_1 . Potrebbero anche esserci i suoi multipli, ma ci limitiamo a considerare solo l'armonica fondamentale. Il caso generale rende più difficile la discussione dal punto di vista tecnico, ma i risultati sono i medesimi.

Notiamo che l'ultima equazione mi dice che J_2 rimane costante, per cui sostituendo nelle prime due equazioni otteniamo che queste sono di nuovo in forma hamiltoniana con hamiltoniana

$$H = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon a(J_1, J_2) \cos \psi_1 ,$$

dove ora J_2 deve essere pensato come un parametro fissato. Questa hamiltoniana ha un solo grado di libertà e quindi è completamente integrabile. Per discuterne le linee di livello, si deve ricordare il fatto che stiamo partendo da dati iniziali J_1, J_2 risonanti, cioè vicino a dei valori J_1^*, J_2 (diciamo) per cui

$$\left. \frac{\partial H_1}{\partial J_1} \right|_{J_1^*, J_2} = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0 .$$

Pertanto, se considero nello spazio delle azioni come nuova origine il punto J_1^*, J_2 , allora in termini di $\mathcal{J} = J_1 - J_1^*$ l'hamiltoniana si scrive, espandendo in serie di Taylor all'ordine più basso, nella forma

$$H = h_0 + \frac{b}{2} \mathcal{J}^2 + \varepsilon a_0 \cos \psi_1 + O(\varepsilon^{3/2}) ,$$

dove abbiamo introdotto le costanti $h_0 := H_0(J_1^*, J_2)$, $b := \partial_{J_1}^2 H_0(J_1^*, J_2)$ e $a_0 := a(J_1^*, J_2)$. Le linee di livello sono dunque quelle di un pendolo, con una forza di gravità di ordine ε . Allora la variazione di \mathcal{J} durante il moto si valuta facilmente usando la conservazione dell'energia. Infatti il massimo di \mathcal{J}^2 si ottiene per $\psi_1 = \pm \pi/2$ da cui segue

$$\mathcal{J}^2 = \frac{2}{b} (H - h_0) .$$

Ora, per $\mathcal{J} = 0$, si ha $H - h_0 = \varepsilon a_0 \cos \bar{\psi}_1$ con un opportuno $\bar{\psi}_1$, per cui trovo

$$\Delta \mathcal{J} = 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{2a_0}{b} \cos \bar{\psi}_1} .$$

Poiché $\Delta \mathcal{J} = \Delta J_1$, troviamo che, nel sistema mediato, la variazione dell'azione è di ordine $\varepsilon^{1/2}$, come avevamo preannunciato all'inizio della sezione.

§10. Le coordinate azione–angolo per sistemi integrabili bidimensionali: il Teorema di Arnold–Liouville. Consideriamo ora il problema di introdurre delle variabili lente e le corrispondenti variabili angolari. Ammettiamo che il sistema sia integrabile, cioè che esistano almeno due integrali primi; ad esempio,

per fissare le idee, pensiamo al caso familiare di un moto piano con potenziale a simmetria sferica, in cui i due integrali sono l'energia ed la componente del momento angolare perpendicolare al piano dell'orbita. Consideriamo quindi come integrali

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x^2 + y^2) = E$$

$$M_z = p_y x - p_x y = l ,$$

per i quali si ha $\{H, M_z\} = 0$. In questo caso è evidente che p_x e p_y si possono esprimere come funzione di (x, y, E, l) : infatti si può ricavare dalla seconda p_y in funzione di p_x , sostituirla nella prima, e si ottiene un'equazione di secondo grado in p_x , che ammette quindi due soluzioni: si verifica ancora l'analogo del caso monodimensionale, ovvero che le funzioni p_x e p_y presentano due rami come funzioni delle altre variabili (x, y, E, l) . Se vogliamo effettuare una trasformazione canonica alle variabili E, l possiamo cercare di determinare la funzione generatrice $F(x, y, E, l)$, tale che valga

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p_x(x, y, E, l) , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = p_y(x, y, E, l) .$$

Questo è un sistema di due equazioni differenziali nella sola incognita F , per cui in generale non avrà soluzione. L'esistenza di una soluzione è equivalente a richiedere che la forma differenziale $p_x(x, y, E, l) dx + p_y(x, y, E, l) dy$ sia esatta, cioè sia appunto il differenziale della funzione F . Sappiamo che questo è garantito se

$$\frac{\partial p_y}{\partial x} = \frac{\partial p_x}{\partial y} . \quad (28)$$

In tal caso localmente la soluzione esiste, e sarà data da

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} p_x dx + p_y dy , \quad (29)$$

dove l'integrale curvilineo è esteso ad una curva γ che unisce il punto di base (x_0, y_0) con il punto (x, y) .

Notiamo che se la funzione F esiste, allora deve valere $\{E, l\} = 0$, perché i nuovi momenti commutano. In realtà vale anche il viceversa, cioè se E ed l commutano allora la condizione (28) è soddisfatta. Questo si può verificare con un calcolo diretto (come faremo in appendice), ma il motivo profondo di questo fatto può essere compreso solo da un punto di vista geometrico (vedi Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*).

Dunque la formula (29) fornisce la funzione generatrice cercata. Notiamo però che (vedi Figura 2.2)) il dominio dove effettuare l'integrale è una corona circolare di raggi r_m, r_M , corrispondenti alla soluzione dell'equazione

$$E = \frac{l^2}{2r^2} + V(r) := V_{eff}(r, l) .$$

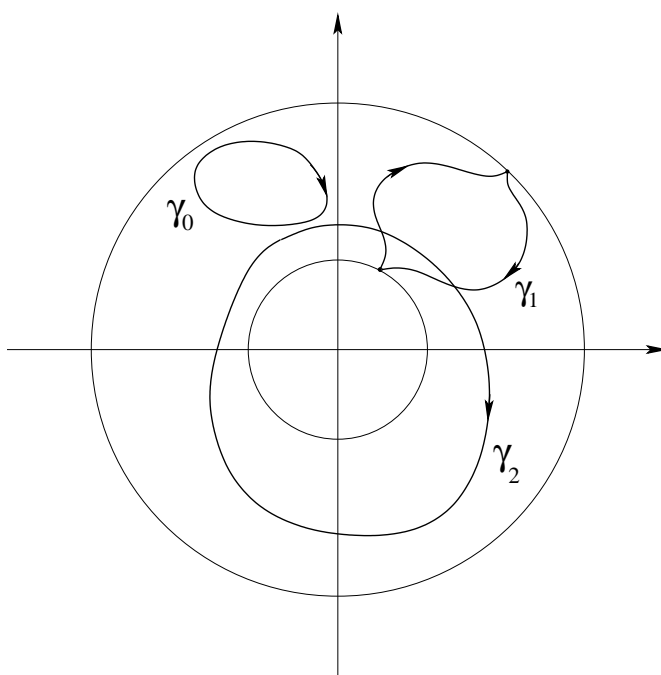


Figura 2.2: Cicli non omotopi nel calcolo della funzione generatrice.

Il dominio quindi non è semplicemente connesso, perché esistono delle curve che non possono essere deformate ad un punto con continuità. Uno di questi cicli γ_1 è ad esempio una qualunque circonferenza di raggio $r_m < r < r_M$; però ne esiste un altro, γ_2 diciamo, che corrisponde a seguire la curva di energia costante

$$E = \frac{1}{2} p_r^2 + V_{eff}(r, l) ;$$

ci si muove su di un segmento radiale (con $\theta = cost$) fino ad arrivare ad $r = r_M$, sul bordo si cambia il ramo delle funzioni p_x, p_y (che in quel punto hanno egual valore), si ripercorre in senso opposto il cammino radiale fino ad arrivare ad $r = r_m$ dove si ritorna al ramo originale di p_x, p_y e si ritorna poi al punto di partenza.

La funzione F presenterà allora due incrementi indipendenti

$$\begin{aligned} \Delta_1 F &= \oint_{\gamma_1} p_x dx + p_y dy = \oint_{\gamma_1} p_\theta d\theta \\ \Delta_2 F &= \oint_{\gamma_2} p_x dx + p_y dy = \oint_{\gamma_2} p_r dr , \end{aligned}$$

lungo i due cicli indicati prima. Si potrebbe mostrare che l'integrale lungo ogni altra curva si esprime mediante una combinazione lineare a coefficienti interi di $\Delta_1 F$ e $\Delta_2 F$.

Come nel caso monodimensionale, le variabili coniugate ad E e ad I non sono in generale angoli, poiché non verificano (in generale) $\partial_E \Delta F = 2\pi$ lungo alcun ciclo. Bisogna definire allora due nuove variabili, *le azioni*, funzioni degli integrali primi, in modo che le variabili coniugate siano angoli; la scelta, analogamente al caso monodimensionale, è quella di porre

$$I_1 := \frac{1}{2\pi} \Delta_1 F = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_1} p_x dx + p_y dy$$

$$I_2 := \frac{1}{2\pi} \Delta_2 F = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_2} p_x dx + p_y dy ,$$

dove γ_1 e γ_2 sono i cicli definiti prima. Naturalmente c'è una grande libertà di scelta dei cicli su cui effettuare l'integrazione: questo corrisponde al fatto che gli angoli sono definiti a meno di una trasformazione lineare a coefficienti interi di determinante uno.

Come ulteriore risultato si ottiene che il sistema di equazioni differenziali è integrabile *per quadrature*, cioè ricorrendo solamente al calcolo di integrali definiti, e di inversione di questi ultimi. Infatti ricorrendo alle variabili azione–angolo il sistema è integrabile esplicitamente. Infatti, in queste coordinate l'hamiltoniana diventa

$$H = H(I_1, I_2) ,$$

e le equazioni del moto sono quindi

$$\dot{I}_1 = 0.$$

$$\dot{I}_2 = 0.$$

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1}$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} ,$$

che hanno come soluzione

$$I_1 = cost$$

$$I_2 = cost$$

$$\phi_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} t + \phi_1^0$$

$$\phi_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} t + \phi_2^0 .$$

Ora, per sapere come evolvano le variabili originali p_x , p_y , x e y , si devono calcolare la funzione generatrice F , e le due azioni I_1 e I_2 , calcolo che richiede la valutazione di tre integrali definiti, e poi effettuare il passaggio dalle variabili azione–angolo alle variabili originali, che richiede appunto l'inversione di due funzioni.

Questa discussione si può generalizzare al caso di sistemi hamiltoniani n -dimensionali che ammettano n integrali primi indipendenti ed involuzione: si tratta del cosiddetto Teorema di Arnold-Liouville, che assicura l'esistenza di coordinate azione-angolo e l'integrabilità per quadrature.

§11. Le coordinate azione-angolo per il moto Kepleriano.

Come una applicazione concreta di quanto detto nella sezione precedente, consideriamo il caso di un punto P soggetto ad una forza centrale di tipo newtoniano, consideriamo cioè l'hamiltoniana

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{K}{r},$$

dove (r, θ) sono le coordinate polari piane del punto P con polo nel centro di forza S , mentre (p_r, p_θ) sono i relativi momenti coniugati. Vi sono dunque due integrali del moto

$$\begin{aligned} E &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m} - \frac{K}{r} \\ l &= p_\theta, \end{aligned} \tag{30}$$

ed inoltre la traiettoria del punto è data dall'ellisse

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\theta - \theta_0)}, \tag{31}$$

essendo la costanti e l'eccentricità dell'ellisse, θ_0 l'angolo che forma l'asse maggiore dell'ellisse con un asse fissato, mentre p è detto parametro dell'ellisse ed è legato al semiasse maggiore di questi nel modo che vedremo più sotto.

Il modo più semplice ricavare la traiettoria dalle equazioni del moto, consiste nell'utilizzare il teorema di Binet, secondo cui l'accelerazione radiale a_r in un moto centrale è data da

$$a_r = -\frac{l^2}{m^2 r^2} \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right),$$

essendo l il valore del momento angolare. Dunque, poiché nel caso newtoniano la forza vale $F_r = cost/r^2$, si ottiene per $1/r$ l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = cost$$

la cui soluzione è

$$\frac{1}{r} = cost + A \cos(\theta - \theta_0),$$

cioè la (31).

I valori della costanti p ed e si possono esprimere in termini di E ed l nel modo seguente

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{l^2}{mK} \\
 e^2 &= 1 + \frac{2El^2}{mK^2}.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Per mostrare ciò denotiamo con r_M la massima distanza del punto P dal centro di forza S (corrispondente all'apocentro dell'orbita), mentre con r_m la minima distanza di P da S (pericentro), allora poiché in tali punti $p_r = m\dot{r} = 0$ dalla prima di (30) segue che tali valori sono soluzioni dell'equazione

$$2mEr^2 + 2mKr - l^2 = 0,$$

e pertanto valgono le note relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
 \frac{r_M + r_m}{2} &= -\frac{K}{2E} \\
 r_M r_m &= -\frac{l^2}{2mE}.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Ora, usando l'equazione dell'orbita si ha evidentemente

$$\begin{aligned}
 r_M &= \frac{p}{1-e} \\
 r_m &= \frac{p}{1+e},
 \end{aligned}$$

e quindi le (33) diventano

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{1-e^2} &= -\frac{K}{2E} \\
 \frac{p^2}{1-e^2} &= -\frac{l^2}{2mE},
 \end{aligned}$$

da cui le relazioni (32) seguono semplicemente, la prima facendo il rapporto membro a membro delle due equazioni, la seconda sostituendo nella prima il valore di p così determinato.

§12. Le variabili d'azione.

Come detto nella Sezione 10, per determinare le azioni bisogna innanzitutto esprimere i momenti come funzione delle coordinate e delle costanti del moto. Nel nostro caso si ha subito

$$\begin{aligned}
 p_\theta &= l \\
 p_r &= \sqrt{2mE + \frac{2mK}{r} - \frac{l^2}{r^2}};
 \end{aligned}$$

quindi, con riferimento alla Figura 2.2, le azioni sono determinate come

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} p_r dr + p_\theta d\theta$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} p_r dr + p_\theta d\theta .$$

Ma il primo integrale si calcola immediatamente, in quanto su γ_1 $dr = 0$, per cui otteniamo

$$I_1 = l ;$$

invece il secondo integrale diventa

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{r_m}^{r_M} \sqrt{2mE + \frac{2mK}{r} - \frac{l^2}{r^2}} dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_m}^{r_M} \sqrt{2mEr^2 + 2mKr - l^2} \frac{dr}{r} . \quad (34)$$

Eseguendo l'integrale otteniamo (come mostrato più sotto)

$$I_2 = \frac{\sqrt{mK}}{\sqrt{-2E}} - l , \quad (35)$$

da cui si ottiene (ricordando che $I_1 = l$ ed $E = H$)

$$H(I_1, I_2) = -\frac{mK^2}{2(I_1 + I_2)^2} .$$

Notiamo subito che siamo in un caso *degenere*, perché l'hamiltoniana dipende in realtà dalla sola variabile $I_1 + I_2$, e non da due variabili indipendenti come accade in generale. Questo ha come conseguenza che le due frequenze $\omega_1 = \partial_{I_1} H$ ed $\omega_2 = \partial_{I_2} H$ sono eguali, e quindi tutti i moti sono periodici, cioè tutte le orbite sono chiuse. Se prendo come seconda azione I la quantità $I_1 + I_2$ al posto di I_2 e detti α ed ψ gli angoli coniugati ad I_1 ed ad I rispettivamente avrò¹¹

$$H(I_1, I, \alpha, \psi) = -\frac{mK^2}{2I^2} . \quad (36)$$

L'azione I ha un immediato significato in termini di geometria dell'orbita: infatti notando che il semiasse a dell'orbita è dato a $a = (r_M + r_m)/2$, e ricordando la prima di (33) si ottiene

$$E = -K/2a ,$$

cioè I^2 non è altro che il semiasse dell'orbita, più precisamente si ha

¹¹Questa formula ricorda molta la formula quantistica per i livelli energetici dell'atomo di idrogeno, che si ritrovano quantizzando l'azione I ponendola pari ad $n\hbar$. E' questa la cosiddetta regola di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld, che in questo caso dà il risultato corretto, invece di fornire solamente una approssimazione valida in un limite opportuno.

$$a = \frac{2I^2}{mK}. \quad (37)$$

L'eccentricità e dell'orbita risulta anch'essa espressa semplicemente in termini delle azioni, poiché sostituendo nella seconda di (32) il valore di E dato dalla 36 si ottiene

$$e = \sqrt{1 - \frac{I_1^2}{I^2}}.$$

Il calcolo dell'integrale (34) si effettua nel modo seguente. Si effettua la sostituzione di variabile definita da

$$x^2 = \frac{r_M - r}{r - r_m},$$

che razionalizza l'integrale. Si ottiene infatti

$$I_2 = \frac{\sqrt{2mE}(r_M - r_m)^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2(r_mx + r_M)}.$$

Ora si può controllare abbastanza semplicemente che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2(r_mx + r_M)} = \frac{\pi}{(r_M - r_m)^2} \left(\frac{r_M + r_m}{2} - \sqrt{r_M r_m} \right), \quad (38)$$

che sostituito nell'espressione precedente fornisce la (35) una volta che si usino le relazioni (33) per esprimere r_M ed r_m in funzione di E ed l . Ora l'integrale precedente si calcola notando che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2(r_mx + r_M)} = \frac{1}{(r_M - r_m)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{r_M x^2 + r_m}{(1+x^2)^2} dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{r_M r_m}{r_m x^2 + r_M} dx \right),$$

e che vale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{r_m x^2 + r_M} &= \frac{\pi}{\sqrt{r_M r_m}} \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{r_M x^2 + r_m}{(1+x^2)^2} dx &= (r_M - r_m) \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} + r_m \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{\pi}{2}(r_M - r_m) + \pi r_m = \frac{\pi}{2}(r_M + r_m), \end{aligned}$$

che fornisce appunto la (38). Da ultimo, rimane solo da ricordare che l'integrale $\int x^2 dx / (1+x^2)$ si valuta agevolmente mediante la

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{d}{d\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+\alpha x^2)} \Big|_{\alpha=1} = -\frac{d}{d\alpha} \frac{\pi}{\alpha^{1/2}} \Big|_{\alpha=1} = \frac{\pi}{2}.$$

§13. Le variabili angolari. Mostriamo ora che l'angolo α coniugato ad I_1 non è altro che l'angolo che l'asse maggiore dell'ellisse fa con un asse fisso, mentre l'angolo ψ coniugato ad I risulta proporzionale al tempo ed è detto "anomalia media" dagli astronomi. In particolare, poiché l'hamiltoniana non dipende da I_1 , l'angolo α è costante nel tempo, cioè la posizione del perielio (ad esempio) è fissa nel tempo. La reciproca influenza dei pianeti si manifesta nel modo più immediato, facendo sì che α non sia più costante del moto, ma evolva con una

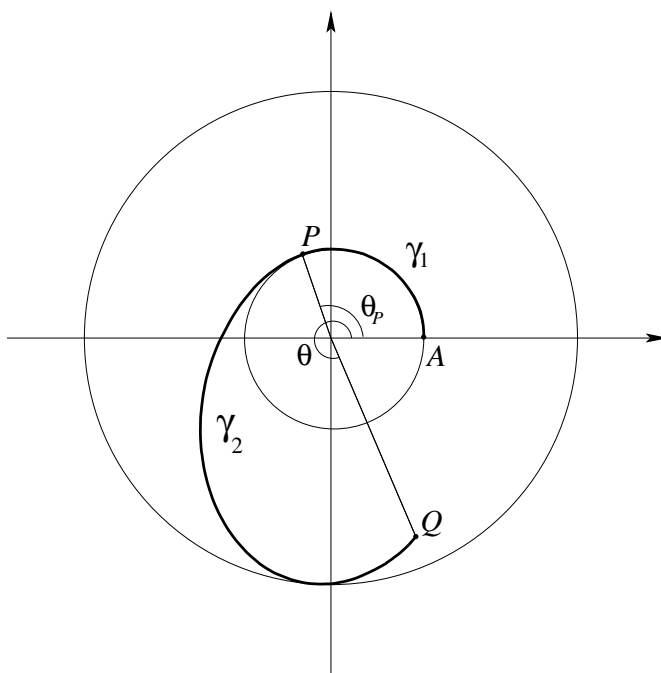


Figura 2.3: Curva γ per il calcolo della funzione generatrice nel caso Kepleriano.

piccola velocità, di modo che la descrizione dell'orbita diventa quella di un'ellisse che precede.

Per determinare gli angoli, incominciamo con il ricordare che la funzione generatrice $S(r, \theta, I, I_1)$ è data da

$$S = \int_{\gamma} p_r dr + p_{\theta} d\theta$$

dove γ è una curva che congiunge un punto di base fisso (il punto A della figura 2.3) con il punto $Q \stackrel{\text{def}}{=} (r, \theta)$. Ricordiamo anche che p_r e p_{θ} si esprimono in termini delle azioni nel modo seguente

$$p_{\theta} = I_1$$

$$p_r = \sqrt{2m \left(-\frac{mK^2}{2I^2} + \frac{K}{r} - \frac{I_1^2}{2r^2} \right)},$$

dove nella seconda si è usata la (36) del paragrafo precedente.

Infine, ricordiamo che l'integrale non dipende dalla curva scelta, per cui cerchiamo di scegliere γ in modo da semplificare il calcolo dell'integrale. La curva che scegliamo, mostrata in figura 2.3, è formata dall'unione del tratto di orbita¹²

¹²Ricordiamo che, essendo fissati i valori di r , θ , p_r e p_{θ} , l'orbita risulta determinata.

γ_2 che passa per (r, θ) fino al perielio P e dall'arco di cerchio γ_1 che congiunge P con il punto di base $(r_{min}, 0)$. In questo modo, la funzione generatrice diventa

$$S = \int_{\gamma_1} \sqrt{2m \left(-\frac{mK^2}{2I^2} + \frac{K}{r} - \frac{I_1^2}{2mr^2} \right)} dr + I_1 \theta .$$

Cominciamo con il calcolo dell'angolo coniugato ad α . Derivando S rispetto a I_1 si ottiene

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial I_1} = \int_{\gamma_1} \frac{-mI_1}{r^2 \sqrt{2m \left(-\frac{mK^2}{2I^2} + \frac{K}{r} - \frac{I_1^2}{2r^2} \right)}} dr + \theta ,$$

e ricordando che vale

$$\dot{\theta} = \frac{mI_1}{r^2 \sqrt{2m \left(-\frac{mK^2}{2I^2} + \frac{K}{r} - \frac{I_1^2}{2r^2} \right)}} ,$$

si ha, indicando con θ_P l'angolo corrispondente al perielio P , la relazione seguente

$$\alpha = - \int_{\gamma_1} \dot{\theta} dt + \theta = -(\theta - \theta_P) + \theta = \theta_P ,$$

che mostra appunto come la coordinata coniugata ad I_1 sia l'angolo formato tra l'asse dell'orbita e l'asse x . Per quanto riguarda l'angolo ψ coniugato ad I si ottiene

$$\psi = \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{mK^2}{I^3} \int_{\gamma_1} \frac{m}{\sqrt{2m \left(-\frac{mK^2}{2I^2} + \frac{K}{r} - \frac{I_1^2}{2r^2} \right)}} dr ,$$

e ricordando che lungo la soluzione $r(t)$ vale

$$dt = \frac{m}{\sqrt{2m \left(-\frac{mK^2}{2I^2} + \frac{K}{r} - \frac{I_1^2}{2r^2} \right)}} dr ,$$

si ottiene

$$\psi = \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{mK^2}{I^3} \int_{\gamma_1} dt = \omega(I)(t - t_0) ,$$

dove $\omega = \frac{\partial H}{\partial I}$ e $t - t_0$ è appunto il tempo necessario al pianeta a percorrere il tratto di orbita dal perielio alla posizione attuale.

Notiamo anche che il periodo T necessario a percorrere l'intera orbita è ovviamente dato da $2\pi/\omega(I)$, cioè, ricordando l'espressione (37) per il semiasse a dell'ellisse, si trova

$$T = \frac{2\pi}{mK^2} I^3 = \sqrt{\frac{m\pi^2}{2K}} a^{3/2}$$

cioè la terza legge di Keplero.

Appendice A

A.1 Il M.C.D. di due interi

Nel capitolo sulle risonanze, avevamo avuto bisogno del risultato seguente

Proposizione 1 (M.C.D. di due interi) *Se $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ sono due interi qualsiasi, e se d è il loro Massimo Comun Divisore, allora esistono due interi m_1 , ed m_2 tali che*

$$n_1 m_2 - n_2 m_1 = d . \quad (39)$$

Nel nostro caso n_1 ed n_2 sono relativamente primi tra loro, cioè $d = 1$, per cui possiamo sempre definire una trasformazione dal toro bidimensionale in sé in cui uno degli angoli sia lento. La dimostrazione si basa sulla teoria degli *ideali* di un anello, in questo caso gli ideali dell'anello degli interi. In particolare un insieme $I \subset \mathbb{Z}$ è un ideale se

1. $a, b \in I$ implica che $a + b \in I$,
2. $a \in I$ implica che $ax \in I, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Come esempio di ideale si può considerare l'insieme dei multipli di un dato intero n . Bene, l'anello degli interi appartiene ad una classe particolari di anelli, quelli ad ideali principali, in cui tutti gli ideali sono solo ed esclusivamente i multipli di un dato intero d .¹ Costruisco dunque l'insieme

$$I_{n_1, n_2} := \{x \in \mathbb{Z} \text{ tali che } x = m_2 n_1 - m_1 n_2, \text{ con } m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} ;$$

si dimostra poi facilmente che questo insieme è un ideale. Ovviamente n_1 ed n_2 appartengono a I_{n_1, n_2} , perché basta considerare $m_1 = 0$, ed $m_2 = 1$ in un caso ed il viceversa nell'altro. Ora, essendo un ideale, esso sarà costituito da tutti i multipli di un certo elemento d ; non solo, poiché d appartiene all'ideale stesso, abbiamo la rappresentazione

$$n_1 m_2 - n_2 m_1 = d .$$

¹L'intero d è semplicemente il più piccolo degli elementi positivi dell'ideale. Se l'ideale contenesse i multipli anche di un altro intero d' allora dovrebbe contenere anche il resto $r (< d)$ della divisione di d' per d , contro l'ipotesi che d sia il più piccolo elemento positivo dell'ideale.

con opportuni m_1 ed m_2 . Come caratterizzare questo d ? Ricordiamo che sia n_1 , che n_2 appartengono all'ideale I_{n_1, n_2} , per cui essi sono multipli di d , che risulta dunque un loro divisore comune. Allora, poiché il M.C.D. è un multiplo di d , potrà essere rappresentato nella forma (39). Un minimo di riflessione mostra poi, anche se non è contenuto nella tesi del teorema, che d è **proprio** il M.C.D. dei due numeri.

A.2 Dimostrazione dell'integrabilità della forma $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$

La dimostrazione, come enunciato nel testo, si basa su manipolazioni formali di derivate, quindi non è molto istruttiva, tranne che come esercizio di calcolo differenziale in più variabili. Supponiamo quindi di ricavare le funzioni $p_i = p_i(x_j, F_j)$, $i, j = 1, \dots, N$, mediante la soluzione di un sistema di N equazioni

$$F_j(x_i, p_i) = F_j, \quad (40)$$

dove ho indicato con F_j sia la funzione, che il valore (assegnato) che essa assume. Vale allora la proprietà seguente: se $\forall i, j$ si ha che le funzioni F_i sono in involuzione tra loro (cioè se si annullano le loro parentesi di Poisson $\{F_i, F_j\} = 0$), allora $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$ è localmente integrabile, nel senso che

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j.$$

Per dimostrare ciò, cominciamo notando che, derivando le relazioni (40) rispetto ad x_l ed ad F_k , si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j}{\partial x_l} + \sum_h \frac{\partial F_j}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial x_l} &= 0 \\ \sum_h \frac{\partial F_j}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial F_l} &= \delta_{j,l}, \end{aligned} \quad (41)$$

che permetterebbe (in linea di principio) di esprimere le derivate di p_j rispetto alle x_i , mediante le derivate di F_l . La seconda in particolare mostra che la matrice $\frac{\partial p_j}{\partial F_l}$ è la matrice inversa della jacobiana $\frac{\partial F_j}{\partial p_h}$, fatto peraltro ben noto, per cui vale pure la relazione

$$\sum_j \frac{\partial p_h}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial p_l} = \delta_{h,l}, \quad (42)$$

che useremo tra breve.

Scriviamo adesso la condizione che le F_j siano involuzione tra loro, cioè

valga:

$$\sum_l \frac{\partial F_i}{\partial p_l} \frac{\partial F_j}{\partial x_l} - \frac{\partial F_i}{\partial x_l} \frac{\partial F_j}{\partial p_l} = 0 \quad \forall i, j.$$

Se in questa espressione sostituiamo le derivate $\frac{\partial F_j}{\partial x_l}$ usando la prima di (41), si ottiene

$$\sum_{l,h} \frac{\partial F_i}{\partial p_l} \frac{\partial F_j}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial x_l} - \frac{\partial F_j}{\partial p_l} \frac{\partial F_i}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial x_l} = 0 \quad \forall i, j.$$

Moltiplichiamo ora ogni equazione per $\frac{\partial p_n}{\partial F_i} \frac{\partial p_m}{\partial F_j}$ e sommiamo sugli indici i e j : sfruttando la (42), si trova

$$\sum_{l,h} \delta_{n,i} \delta_{m,h} \frac{\partial p_h}{\partial x_l} - \delta_{m,i} \delta_{n,h} \frac{\partial p_h}{\partial x_l} = 0$$

cioè la tesi.

