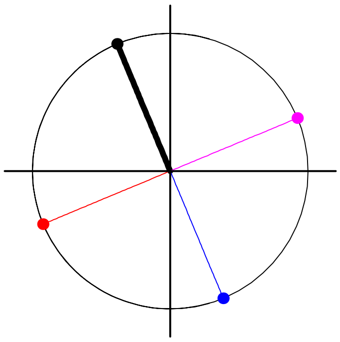
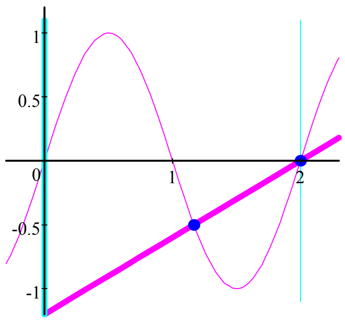
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematica per Chimica (24/6/03)

1. Se $w = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$ è una radice quarta di un numero complesso $z$, le altre si trovano tutte sulla circonferenza di raggio $= |w| = \sqrt{\left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = 1$. Inoltre, trovandosi ai vertici di un quadrato che ha centro nell'origine, saranno quella ad essa diametralmente opposta e le due che stanno sul diametro ortogonale al precedente (in figura $w$ è rappresentata in nero, con il raggio più spesso, mentre le altre radici sono in colore).



Di conseguenza esse sono le radici $w_2 = \frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$, $w_1 = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$, $w_3 = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$.

2. I grafici delle due funzioni $f(x) = \sin \pi x$ e $g(x) = \frac{3}{5}(x-2)$ sono rappresentati in figura rispettivamente con tratto sottile e spesso.




Notiamo che nell'intervallo $[0,2]$ hanno due punti di intersezione: uno sull'asse $x$ in $(2,0)$, l'altro in un punto di ascissa intermedia tra 1 e $\frac{3}{2}$: per tentativi si può stabilire che si ha $f(x) = g(x) = -\frac{1}{2}$ per $x = \frac{7}{6}$.
Dunque nell'intervallo $[0,2]$ si ha $f(x) > g(x)$ se $x \in \left[0, \frac{7}{6}\right)$ e $f(x) < g(x)$ se $x \in \left(\frac{7}{6}, 2\right)$ per cui l'area della regione limitata delimitata dai due grafici e dalle rette $x = 0$ e $x = 2$ è $\int_0^{\frac{7}{6}} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{\frac{7}{6}}^2 (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^{\frac{7}{6}} (f(x) - g(x))\, dx + \int_2^{\frac{7}{6}} (f(x) - g(x))\, dx$.
Poiché $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int \left[\sin \pi x - \frac{3}{5}(x-2)\right] dx = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x - \frac{3}{10}x^2 + \frac{6}{5}x + c$, l'area è $\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x - \frac{3}{10}x^2 + \frac{6}{5}x\right]_0^{\frac{7}{6}} + \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x - \frac{3}{10}x^2 + \frac{6}{5}x\right]_2^{\frac{7}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{49}{120} + \frac{7}{5}\right) + \frac{2}{\pi} + \frac{6}{5} - \frac{12}{5} = \frac{\sqrt{3}+2}{\pi} - \frac{49}{60} + \frac{8}{5} = \frac{47}{60} + \frac{\sqrt{3}+2}{\pi}$.

3. La funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{2x}$

(a) è definita per $x \neq 0$ (poiché la radice è sempre definita essendo $2x^2 - 2x + 1 = x^2 + (x-1)^2 > 0$ per ogni valore di $x$). Inoltre $f(x) > 0$ in $(0, +\infty)$, $f(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e non ci sono zeri.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2}\,|x|}{2x} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; per $x \to -\infty$ $f(x)$ ha asintoto orizzontale $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2}\,|x|}{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; per $x \to +\infty$ $f(x)$ ha asintoto orizzontale $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

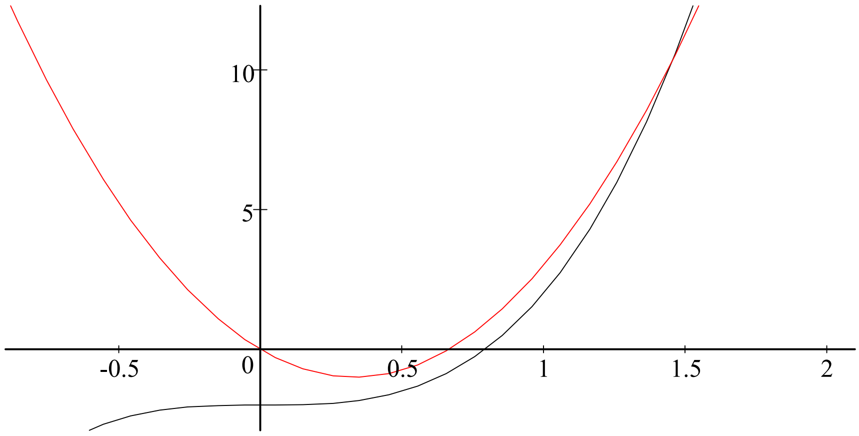
$\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) = \pm\infty$; per $x \to 0\pm$ $f(x)$ ha asintoto verticale $x = 0$.

(c) $$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x+1}} - \sqrt{2x^2-2x+1}}{2x^2} = \frac{2x^2 - x - 2x^2 + 2x - 1}{2x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} = \frac{x-1}{2x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$$

(d) $f'(x) > 0$ in $(1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 1)$: quindi $f$ cresce in $(1, +\infty)$ e decresce in in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 1)$, mentre presenta un minimo relativo ed assoluto in $x = 1$. Il valore del minimo è $f(1) = \frac{1}{2}$.

(e) Il fatto che $f(1) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ mentre $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ suggerisce la presenza di un'intersezione con l'asintoto $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Infatti $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sqrt{2}x = \sqrt{2x^2-2x+1} \iff \begin{cases} -2x+1=0 \\ x>0 \end{cases} \iff x = \frac{1}{2}$. Poiché $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = -\sqrt{2}$, l'equazione della tangente al grafico in tale punto è $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, cioè $y = -\sqrt{2}(x-1)$. È invece evidente che non ci sono intersezioni con l'asintoto $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Infatti $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ porta al sistema $\begin{cases} -2x+1=0 \\ x<0 \end{cases}$ che è impossibile.

(f) Il minimo relativo si trova nell'intervallo $(0, +\infty)$: per $x \to +\infty$ l'asintoto è $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi il punto $(1, f(1))$ si trova al di sotto dell'asintoto. Ciò suggerisce che ci sia un flesso nell'intervallo $(1, +\infty)$. Senza ulteriori conti non si può escludere la presenza di altri flessi. Anche se non richiesto dal compito osserviamo che la derivata seconda
$$f''(x) = \frac{x^2\sqrt{2x^2-2x+1} - \left[\frac{(2x-1)x^2}{\sqrt{2x^2-2x+1}} + 2x\sqrt{2x^2-2x+1}\right](x-1)}{2x^4(2x^2-2x+1)} =$$
$$= \frac{(2-x)(2x^2-2x+1) - (2x-1)x(x-1)}{2x^3(2x^2+2x+1)^{3/2}} = \frac{-4x^3+9x^2-6x+2}{2x^3(2x^2+2x+1)^{3/2}}$$
si annulla se e solo se $4x^3 - 2 = 9x^2 - 6x$ e l'andamento del grafico di queste due funzioni (la seconda è una parabola con concavità verso l'alto e valore minimo, assunto in $x = \frac{1}{2}$, pari a $-\frac{3}{4}$ ; invece la prima è sempre crescente e in $x = \frac{1}{2}$ vale $-\frac{3}{2}$) conferma che esse hanno una sola intersezione in un punto di ascissa $\alpha$ compreso tra 1 e 2: quindi c'è un solo flesso in $x = \alpha$; per $x < 0$ la funzione è concava mentre per $x \in (0, \alpha)$ la funzione è convessa e per $x \in (\alpha, +\infty)$ è concava.




Intersezioni dei grafici di $4x^3 - 2$ e $9x^2 - 6x$

(g)

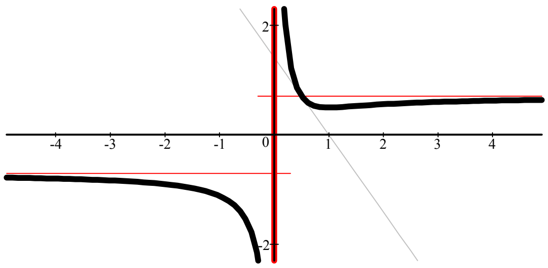



Grafico di $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{2x}$

4. $\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x dx = \boxed{\text{per parti con fattor finito } \cos 2x} = -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x dx =$
$\displaystyle = \boxed{\text{per parti con fattor finito } \sin 2x} = -e^{-x}\cos 2x - 2\left(-e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x dx\right) =$
$\displaystyle = e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) - 4\int e^{-x}\cos 2x dx$ cioè portando questo integrale al primo membro $\displaystyle 5\int e^{-x}\cos 2x dx = e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x)$ e quindi $\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x dx = \frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) + c$.

5. $\displaystyle\int_{0+}^{2} \frac{\ln x}{(x+1)^{3/2}} dx$ è integrale improprio di II specie. Osserviamo che per $x \to 0+$ la funzione $\displaystyle\frac{\ln x}{(x+1)^{3/2}}$ è asintotica a $\ln x$: poiché $\displaystyle\int_{0+}^{2} \ln x dx = \lim_{z\to 0+}\int_{z}^{2} \ln x dx = \lim_{z\to 0+}[x\ln x - x]_z^2 =$ $2\ln 2 - 2$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\displaystyle\int_{0+}^{2} \frac{\ln x}{(x+1)^{3/2}} dx$ converge.

6. $y' + 2y = 4x$ è un'equazione differenziale lineare del I ordine.
Le soluzioni dell'equazione omogenea associata $y' + 2y = 0$ diverse dalla soluzione $y = 0$ sono del tipo $\int \frac{dy}{y} = \int -2dx$ cioè $\ln|y| = -2x + c$ ovvero $y = \pm e^{-2x+c}$.
Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono $y = ke^{-2x}$ con $k$ reale qualunque.

Per variazione delle costanti si trova che l'integrale generale ha la forma $y(x) = k(x)e^{-2x}$ con $k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x} + 2k(x)e^{-2x} = 4x$, cioè $k(x) = \int 4xe^{2x}dx = 2xe^{2x} - \int 2e^{2x}dx = e^{2x}(2x-1) + c$, cioè l'integrale generale è $y(x) = 2x - 1 + ce^{-2x}$.
Ora $y(1) = 2 - 1 + ce^{-2} = -1$ se e solo se $c = -2e^2$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 2x - 1 - 2e^{2-2x}$.

7. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3k & -1 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo. Ora $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3k & -1 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3k & -1 \\ k-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (k-2)(-2-3k) = 0$ se e solo se $k$ vale 2 o $-\frac{2}{3}$. Per tutti gli altri valori la matrice è invertibile.