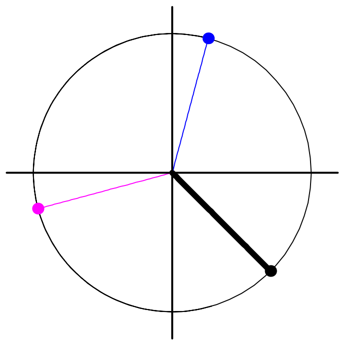
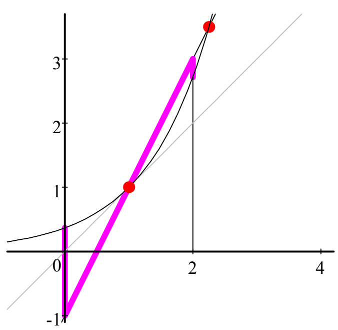
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematica per Chimica (22/7/03)

1. $w = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ ha modulo $\sqrt{2+2} = 2$ e argomento principale $-\frac{3}{4}\pi$ come si vede facilmente osservando che $\operatorname{Re} w = \operatorname{Im} w$ ed entrambe sono negative.
Dunque le 3 radici terze di w hanno modulo $\sqrt[3]{2}$ e argomenti della forma $\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) = -\frac{1}{4}\pi + k\frac{2}{3}\pi$ ove k assume tre valori interi consecutivi. Prima di calcolare le radici in forma algebrica conviene osservare che per $k = \pm 1$ le radici sono rappresentate nel piano di Argand-Gauss da punti simmetrici rispetto alla bisettrice del secondo-quarto quadrante, come si vede dal disegno.



Quindi, tenuto conto che
$\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
e
$\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,
le radici sono $z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} - \frac{1}{\sqrt[6]{2}}i$, $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[6]{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[6]{2}}i$,
$z_{-1} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[6]{2}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[6]{2}}i$.

2. Le due funzioni $f(x) = e^{x-1}$ e $g(x) = 2x - 1$ hanno per grafico rispettivamente
un'esponenziale traslata di 1 unità nella direzione positiva dell'asse x, quindi passante per $A = (1,1)$ e avente ivi tangente $y = x$
e una retta, pure passante per A, di coefficiente angolare 2, che interseca nuovamente l'esponenziale in un punto di ascissa > 2, visto che $f(2) = e < g(2) = 3$.



Nell'intervallo $[0,2]$ si ha allora $f(x) \geq g(x)$ se $x \in [0,1]$ e $f(x) \leq g(x)$ nell'intervallo $[1,2]$. La regione limitata delimitata dai due grafici e dalle rette $x = 0$ e $x = 2$ è indicata in figura evidenziando la spezzata rettilinea che la delimita (bisogna poi aggiungere il corrispondente tratto di esponenziale). Dunque l'area di tale regione è

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_2^1 (f(x) - g(x))\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(e^{x-1} - 2x + 1\right) dx + \int_2^1 \left(e^{x-1} - 2x + 1\right) dx = \left[e^{x-1} - x^2 + x\right]_0^1 + \left[e^{x-1} - x^2 + x\right]_2^1 =$$
$$= 1 - e^{-1} + 1 - e + 2 = 4 - \left(e + e^{-1}\right).$$

(a) La funzione $g(x) = \dfrac{2\pi x}{x^2+1}$ è definita su tutto l'asse reale, dispari e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0\pm$: quindi presenta asintoto orizzontale $y = 0$. Ovviamente la funzione è positiva per $x > 0$ e ha un solo zero (in $x = 0$); visto che $g'(x) = 2\pi \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ è positiva per $x \in (-1, 1)$, $g(x)$ risulta crescente in questo intervallo, decrescente in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$, ha minimo in -1 e massimo in 1 di valore rispettivamente $-\pi$ e π. Essi sono minimo e massimo assoluti (oltre che relativi) proprio per l'andamento della funzione. Dunque l'immagine di $g(x)$ è data dall'intervallo $[-\pi, \pi]$.

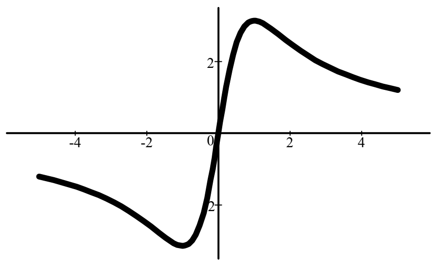


Grafico di $g(x) = \dfrac{2\pi x}{x^2+1}$

(b) La funzione $f(x) = \sin \dfrac{2\pi x}{x^2+1}$ è definita su tutto l'asse reale (poiché lo sono le due funzioni $z = \dfrac{2\pi x}{x^2+1}$ e $\sin z$ di cui è composta). Inoltre è una funzione dispari (in quanto composta di funzioni dispari) e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\pm$: quindi presenta asintoto orizzontale $y = 0$.

(c) $f(x) = 0$ per $\dfrac{2\pi x}{x^2+1} = k\pi$, con k intero: visto che l'immagine di $g(x)$ è $[-\pi, \pi]$, k può assumere solo i valori 0, 1 o -1: corrispondentemente le soluzioni dell'equazione sono $x = 0$, 1 oppure -1. D'altra parte, come si vede dal grafico, per $x > 0$ la funzione $g(x)$ varia in $(0, \pi]$ e quindi $\sin g(x)$ varia in $[0, 1]$ cioè $f(x) \geq 0$. Simmetricamente $f(x) \leq 0$ allorché $x < 0$.

(d) Visto che per $x > 0$ la funzione $f(x)$ non è negativa è, ad esempio, ragionevole aspettarsi che lo zero $x = 1$ sia un punto di minimo relativo (simmetricamente per $x = -1$).
Dettagliatamente: $f'(x) = \cos \dfrac{2\pi x}{x^2+1} \cdot g'(x) = 2\pi \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \cos \dfrac{2\pi x}{x^2+1}$:

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, immagine di $g(x)$, si ha $\cos \dfrac{2\pi x}{x^2+1} \geq 0 \iff -\dfrac{\pi}{2} \leq \dfrac{2\pi x}{x^2+1} \leq \dfrac{\pi}{2}$
$$\iff \begin{cases} x^2 - 4x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 2 - \sqrt{3} \text{ oppure } x \geq 2 + \sqrt{3} \\ x \leq -2 - \sqrt{3} \text{ oppure } x \geq -2 + \sqrt{3} \end{cases} \iff$$
$-2 - \sqrt{3} \leq x \leq -1$ oppure $-2 + \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$ oppure $x \geq 2 + \sqrt{3}$. Tenuto conto anche del segno del fattore $1 - x^2$, si vede che $f'(x) \geq 0 \iff x \leq -2 - \sqrt{3}$ oppure $-2 + \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$ oppure $1 \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$ e si individuano quindi 3 massimi e corrispondentemente 3 minimi. I corrispondenti valori sono ovviamente 1 e -1.

(e) Poiché $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2\pi$, l'equazione della tangente al grafico in tale punto è $y = 2\pi x$.

(f)

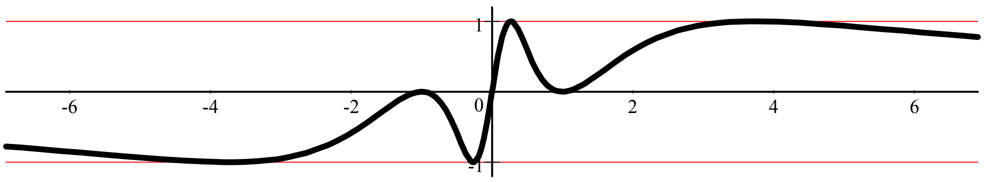
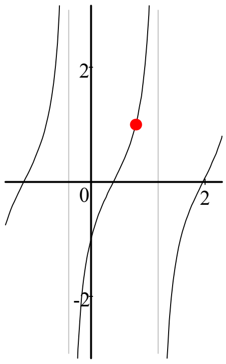


Grafico di $f(x) = \sin \dfrac{2\pi x}{x^2+1}$

3. $$\int 2x \ln(x-1)\, dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per parti}\\ \text{f.f. } \ln(x-1)\\ \text{f. diff. } x\end{array}} = x^2 \ln(x-1) - \int \frac{x^2}{x-1} dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{porre nell'integrale}\\ x^2 = (x^2-1)+1\\ \text{e dividere per } x-1\end{array}}$$
$$= x^2 \ln(x-1) - \int x + 1 + \frac{1}{x-1} dx = (x^2-1)\ln(x-1) - \tfrac{x^2}{2} - x + c$$

4. $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} dx$ è integrale improprio di I e di II specie, poiché l'intervallo di integrazione è illimitato e la funzione integranda diverge per $x \to 2+$.
Poiché $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} dx = \int_{2+}^{4} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} dx + \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} dx$, l'integrale converge se convergono i due integrali di cui è somma. Osserviamo che la funzione integranda, è positiva in $(2, +\infty)$ e quindi si può applicare il criterio del confronto asintotico.
Ora, per $x \to 2+$ la funzione $\dfrac{1}{x\sqrt{x-2}}$ è asintotica a $\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$: poiché $\displaystyle\int_{2+}^{4} \frac{1}{2(x-2)^{1/2}} dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\displaystyle\int_{2+}^{4} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} dx$ converge. Inoltre per $x \to +\infty$ la funzione $\dfrac{1}{x\sqrt{x-2}}$ è asintotica a $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$: poiché $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} dx$ converge.

5. $y' = 2y^2 + 2$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili in cui tanto $a(x) = 1$ che $b(y) = y^2 + 1$ sono funzioni continue su tutto l'asse reale e $b(y)$ non si annulla mai. Quindi l'integrale generale può essere trovato separando le variabili ed integrando: $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+1} = \int 2dx$, cioè $\arctan y = 2x + c$, cioè $y = \tan(2x + c)$. Se deve risultare $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, si deve avere $\tan\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = 1$ e quindi ad esempio $c = -\frac{\pi}{4}$.
Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \begin{cases} \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\ x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \end{cases}$ poiché la soluzione deve essere definita (e derivabile) in un intorno del punto $x = \frac{\pi}{4}$ in cui viene posto il problema (quindi nella figura sottostante, la soluzione è solo il pezzo continuo di grafico contenente il punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$).



6. La matrice completa associata al sistema è $(A\,|b) = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 \\ k & -1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 2k & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A è invertibile quando ha determinante $2k(k^2 - 1) \neq 0$. Quindi per $k \neq 0, 1, -1$ il rango di A è 3 e coincide necessariamente con il rango di $(A\,|b)$, per cui il sistema è risolubile.
Per $k = 1$, il rango di A è 2 mentre $(A\,|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 (due righe sono uguali): quindi il sistema è risolubile.
Per $k = -1$, il rango di A è 2 mentre $(A\,|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 (due righe sono proporzionali): quindi il sistema è risolubile.
Per $k = 0$, il rango di A è 2 mentre $(A\,|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 3: quindi il sistema non è risolubile: e questo è il solo valore di k per cui il sistema non è risolubile.