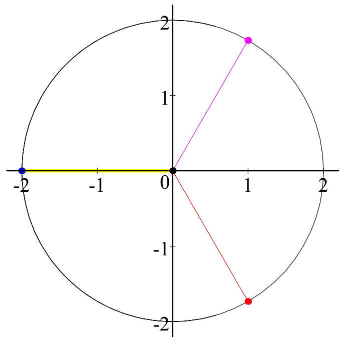
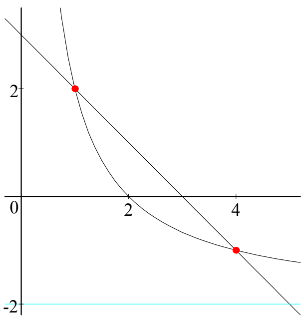
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematica per Chimica (9/9/03)

1. $w^4 + 8w = 0 \iff (w^3 + 8)\, w = 0 \iff w = 0$ oppure $w^3 = -8$.
La seconda equazione corrisponde a trovare le radici terze del numero complesso $z = -8$: visto che z ha modulo 8 ed argomento (principale) π, tali radici hanno modulo $\sqrt[3]{8} = 2$ ed argomento $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$. Quindi sono i tre numeri complessi: $z_0 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = -2$, $z_2 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1 - \sqrt{3}i$. Dunque l'equazione ha due soluzioni reali: $w = 0$ e $w = -2$ e due complesse coniugate $w = 1 + \sqrt{3}i$ e $w = 1 - \sqrt{3}i$ che hanno la seguente rappresentazione nel piano di Argand-Gauss:



2. Le due funzioni $f(x) = \dfrac{4}{x} - 2$ e $g(x) = 3 - x$ hanno per grafico rispettivamente un'iperbole equilatera (avente per asintoti le rette $y = -2$ e $x = 0$) e una retta. Si ha $f(x) \geq g(x)$ se e solo se $\dfrac{4}{x} - 2 - 3 + x \geq 0$, cioè $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x} \geq 0$: quindi $f(x) \geq g(x)$ negli intervalli $(0, 1]$ e $[4, +\infty)$. Si vede facilmente (ad esempio tracciando il grafico) che in nessuno di questi due intervalli (così come in $(-\infty, 0)$) le due curve delimitano una regione limitata.



L'unico l'intervallo in cui le due curve delimitano una regione limitata è $[1, 4]$; poiché in esso vale la disuguaglianza $f(x) \leq g(x)$, l'area di tale regione è $\displaystyle\int_1^4 (g(x) - f(x))\, dx = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{1}{2}x^2 - 4\ln|x|\right]_1^4 = 20 - 5 - 8 + \frac{1}{2} - 4\ln 4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2.$

3. La funzione $f(x) = xe^{1-2x^2}$

(a) è definita su tutto l'asse reale (poiché lo sono le due funzioni x e e^{1-2x^2} di cui è prodotto). Inoltre $f(x) > 0$ in $(0, +\infty)$ e l'unico zero è in $x = 0$. È una funzione dispari, in quanto prodotto di una funzione dispari e di una pari: è quindi simmetrica rispetto all'origine.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ex}{e^{2x^2}} = 0^-$ (infatti $e^{2x^2} = \left(e^{x^2}\right)^2$ è un infinito di ordine superiore a x e $x < 0$); l'asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ è $y = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-2x^2} = 0^+$ e l'asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ è $y = 0$ (per simmetria rispetto all'origine);

(c) $f'(x) = e^{1-2x^2}\left[1 + x(-4x)\right] = e^{1-2x^2}\left(1 - 4x^2\right)$
$f''(x) = e^{1-2x^2}\left[-4x\left(1-4x^2\right) - 8x\right] = 4xe^{1-2x^2}\left(4x^2 - 3\right)$

(d) $f'(x) > 0 \iff 1 - 4x^2 > 0$, cioè in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: quindi f cresce in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e decresce in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ e in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, mentre presenta un minimo relativo ed assoluto in $x = -\frac{1}{2}$ e un massimo relativo ed assoluto in $x = \frac{1}{2}$. Dunque il valore del minimo è $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{e} \backsimeq -0.82436$ e, simmetricamente, il valore del massimo è $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

(e) $f''(x) > 0 \iff x\left(4x^2 - 3\right) > 0$ cioè in $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e in $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$, intervalli sui quali la f risulta convessa. Invece in $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e in $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ la f è concava, visto che $f''(x) < 0$. In $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ la f ha tre punti di flesso e $f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

(f) Poiché $f(0) = 0$ e $f'(0) = e$, l'equazione della tangente al grafico in tale punto è $y = ex$.

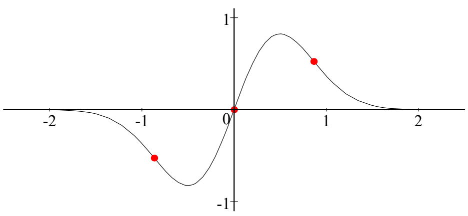
(g) 

Grafico di $f(x) = xe^{1-2x^2}$: punti di flesso in rosso.

4. $\displaystyle\int \left[\sin^3(3x) - \sin(3x)\right] dx = \int -\sin(3x)\left[1 - \sin^2(3x)\right] dx = \int -\sin(3x)\cos^2(3x)\, dx =$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{porre}\\ \cos(3x) = t,\\ -3\sin(3x)\,dx = dt\end{array}} = \int \frac{t^2}{3} dt = \frac{t^3}{9} + c = \frac{[\cos(3x)]^3}{9} + c$$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + 2x^2} dx$ è integrale improprio di I specie, poiché l'intervallo di integrazione è illimitato, ma su ogni sottointervallo limitato $[0, b]$ su cui è definita, la funzione è anche limitata in quanto continua.
Osserviamo che la funzione integranda è positiva in $(0, +\infty)$ e quindi si può applicare il criterio del confronto asintotico.

Ora, per $x \to +\infty$ la funzione $\dfrac{\sqrt{x}}{1+2x^2}$ è asintotica a $\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2} = \dfrac{1}{2x^{3/2}}$: poiché $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+2x^2}dx$ converge e poiché $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+2x^2}dx = \int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+2x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+2x^2}dx$ e il primo è un integrale definito (cioè un numero) si vede che l'integrale dato converge.

N.B. Visto che non si chiede il valore dell'integrale è inutile applicare la definizione: il calcolo diretto dell'integrale indefinito per sostituzione ($\sqrt{x} = t, x = t^2, dx = 2tdt$) porta tra l'altro al calcolo dell'integrale abbastanza laborioso $\displaystyle\int \frac{2t^2dt}{1+2t^4}$.

6. $y' + \dfrac{1}{2}y = x^3$ è un'equazione differenziale lineare del I ordine.

Risolvendo l'equazione omogenea associata ($y' + \dfrac{1}{2}y = 0$) come equazione differenziale a variabili separabili si trova $\ln|y| = \displaystyle\int -\frac{1}{2}dx = -\frac{x}{2} + c$, oltre alla soluzione $y = 0$: quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = ke^{-\frac{x}{2}}$.

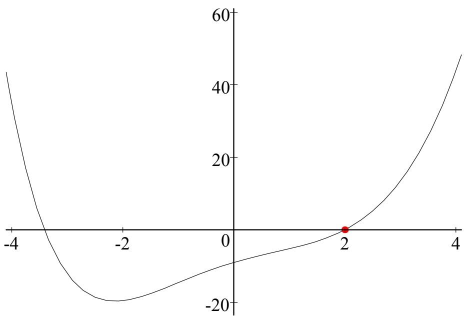
Una soluzione particolare è $\overline{y} = e^{-\frac{x}{2}} \displaystyle\int x^3 e^{\frac{x}{2}} dx$ e poiché

$$\int x^3 e^{\frac{x}{2}} dx = 2x^3 e^{\frac{x}{2}} - 6\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx = 2x^3 e^{\frac{x}{2}} - 6\left[2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4\int x e^{\frac{x}{2}} dx\right] =$$

$$= 2x^3 e^{\frac{x}{2}} - 6\left[2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4\left(2x e^{\frac{x}{2}} - 2\int e^{\frac{x}{2}} dx\right)\right] = 2e^{\frac{x}{2}}\left(x^3 - 6x^2 + 24x - 48\right) + c,$$

la soluzione generale dell'equazione completa è $y = ke^{-\frac{x}{2}} + 2\left(x^3 - 6x^2 + 24x - 48\right)$, con k reale qualunque. Perché risulti $y(2) = 0$ si deve avere: $y(2) = ke^{-1} + 2(8 - 24 + 48 - 48) = ke^{-1} - 32 = 0$ il che implica $k = 32e$.

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 32e^{1-\frac{x}{2}} + 2\left(x^3 - 6x^2 + 24x - 48\right)$.



.

7. La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ k & 7 & 1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$ è invertibile se ha determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ k & 7 & 1 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} = -(5k+3) - (35+3k) \neq 0, \text{ cioè per } k \neq -\frac{19}{4}.$$

Per il vecchio ordinamento:

1bis. La serie $\sum_{2}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)(2k+1)}$ converge poiché il termine generale $\frac{4}{(2k-1)(2k+1)}$ è asintotico a $\frac{1}{k^2}$ e per il criterio del confronto integrale la serie $\sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. Inoltre si tratta di una serie telescopica. La somma parziale n-esima è

$s_n = \sum_{2}^{n} \frac{4}{(2k+1)(2k-1)} = 2\sum_{2}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = 2\sum_{2}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$

$=2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{2n+1}$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{3}$: questa è la somma della serie.

7bis. Un vettore ortogonale tanto a $\mathbf{u} = (0,2,1)$ che a $\mathbf{v} = (-3,0,-1)$, è $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2,-3,6)$. In generale si può scegliere qualunque altro vettore della forma $(-2t,-3t,6t)$ con t reale non nullo.