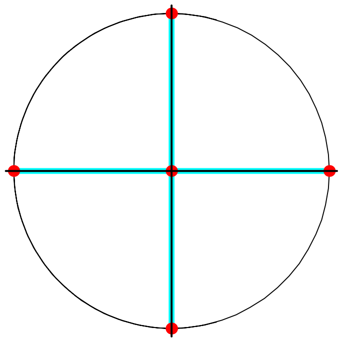
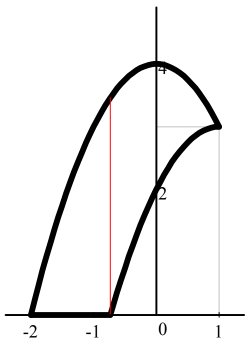
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (23/1/04)

1. L'equazione $z^3 = 4\overline{z}$ equivale alla $z^4 = 4z\overline{z}$, cioè alla $z^4 = 4|z|^2$ che ha sicuramente tra le sue soluzioni $z = 0$. Se è diverso da 0, z si può riscrivere in forma trigonometrica: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \Longrightarrow z^4 = |z|^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$ e quindi l'equazione proposta diventa $|z|^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 4|z|^2 \Longrightarrow |z|^2(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 4$.



Di conseguenza $\begin{cases} |z|^2 = 4 \\ 4\theta = 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ il che implica $|z| = 2$ e $\theta = \dfrac{k\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Quindi l'equazione ammette altre 4 soluzioni:
$z = 2\left(\cos\dfrac{k\pi}{2} + i\sin\dfrac{k\pi}{2}\right)$, con $k = 0, 1, 2, 3$ (per gli altri valori interi di k danno luogo ad argomenti che differiscono dai precedenti per multipli di 2π e quindi danno lo stesso coseno e seno). Le soluzioni sono quindi $z_0 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -2i$. Esse si trovano al centro e ai vertici di un quadrato avente le diagonali coincidenti con gli assi reale ed immaginario.

2. Le due parabole $y_1 = 4 - x^2$ e $y_2 = 2 + 2x - x^2$ hanno entrambe concavità volta verso il basso. Inoltre la prima ha per asse l'asse y e vertice nel punto $(0, 4)$ e taglia l'asse x in $(-2, 0)$ e $(2, 0)$, la seconda ha asse $x = 1$, vertice $(1, 3)$ e taglia l'asse x in $\left(1 - \sqrt{3}, 0\right)$ e $\left(1 + \sqrt{3}, 0\right)$. Si ha $y_1 \geq y_2$ se e solo se $2x - 2 \leq 0$, quindi lo è sicuramente in $[-2, 1]$: dunque due parabole e l'asse x delimitano la regione limitata R indicata in figura.



L'area della regione R è data dalla somma dell'area del triangoloide delimitato dalla prima parabola dall'asse x e dalla parallela all'asse y passante per il punto $\left(1 - \sqrt{3}, 0\right)$ e del trapezoide compreso tra le due parabole, cioè

$$\mathcal{A}(R) = \int_{-2}^{1-\sqrt{3}} (4 - x^2)\, dx + \int_{1-\sqrt{3}}^{1} (2 - 2x)\, dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1-\sqrt{3}} + \left[2x - x^2\right]_{1-\sqrt{3}}^{1} =$$

$$= 2 - 2\sqrt{3} - \frac{\left(1 - \sqrt{3}\right)^3}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 2 - 1 + 4 - 2\sqrt{3} = 9 - 2\sqrt{3}$$

3. La funzione $f(x) = (2x^2 + 2x - 1)\, e^{3+2x-x^2}$

   (a) è definita su tutto l'asse reale (poiché lo sono le due funzioni di cui è prodotto). Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $2x^2 + 2x - 1 > 0$ cioè per $x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e $x > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ e ci sono due zeri in $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e in $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x^2 e^{-x^2} = 0^+$; per $x \to \pm\infty$ c'è un solo asintoto orizzontale: $y = 0$

   (c) $f'(x) = \left[(2x^2 + 2x - 1)(2 - 2x) + 4x + 2\right] e^{3+2x-x^2} = (-4x^3 + 10x)\, e^{3+2x-x^2} \geq 0$ per $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$ e per $x \in \left[0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right]$: su questi intervalli la funzione cresce, mentre sugli intervalli complementari decresce. Essa ha due massimi relativi in $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ e un minimo relativo in $x = 0$. Il valore dei massimi è $\left(4 \pm \sqrt{10}\right) e^{0.5 \pm \sqrt{10}}$ cioè all'incirca 279 e 0.06 rispettivamente. Il valore del minimo è $-e^3$ cioè all'incirca -20.

(d) Poiché $f(1) = 3e^4$ e $f'(1) = 6e^4$, l'equazione della tangente al grafico in tale punto è $y - 3e^4 = 6e^4(x-1)$, cioè $y = 6e^4 x - 3e^4$.

(e)

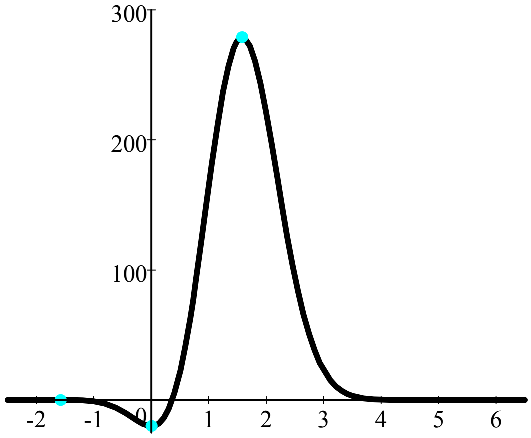


Grafico di $f(x) = (2x^2 + 2x - 1)\, e^{3+2x-x^2}$

Il grafico fa intuire che, visto che la funzione tende a 0 per $x \to \pm\infty$, e ci sono 3 punti estremanti, devono esistere almeno 4 punti di flesso: uno nell'intervallo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, uno in $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$, uno in $\left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ e infine uno in $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty\right)$.

4. $\displaystyle\int (4x + e^{2x})^5 (2 + e^{2x})\, dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione:}\\ 4x + e^{2x} = t\\ (4 + 2e^{2x})\, dx = dt\end{array}} = \int t^5 \frac{dt}{2} = \frac{t^6}{12} + c = \frac{(4x + e^{2x})^6}{12} + c$

5. $\displaystyle\int_{0+}^{e} \frac{\ln t}{\sqrt{2t}} dt$ è integrale improprio di II specie, poiché la funzione integranda è definita per $t > 0$ ma non in $t = 0$ e risulta illimitata in $(0, e]$.

Poiché $\displaystyle\int_{0+}^{e} \frac{\ln t}{\sqrt{2t}} dt = \lim_{x \to 0+} \int_{x}^{e} \frac{\ln t}{\sqrt{2t}} dt$, calcoliamo l'integrale indefinito: $\displaystyle\int \frac{\ln t}{\sqrt{2t}} dt =$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{per parti con fattor finito } \ln t;\\ \dfrac{1}{\sqrt{2t}} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \left(\sqrt{2t}\right)'\end{array}} = \sqrt{2t} \ln t - \int \frac{\sqrt{2t}}{t} dt = \sqrt{2t} \ln t - \int \frac{2}{\sqrt{2t}} dt = \sqrt{2t}\, (\ln t - 2) + c$$

Ne segue che $\displaystyle\int_{x}^{e} \frac{\ln t}{\sqrt{2t}} dt = \sqrt{2e}\,(\ln e - 2) - \sqrt{2x}\,(\ln x - 2) = -\sqrt{2e} - \sqrt{2x}\,(\ln x - 2)$ e quindi

$$\int_{0+}^{e} \frac{\ln t}{\sqrt{2t}} dt = \lim_{x \to 0+} \left[-\sqrt{2e} - \sqrt{2x}\,(\ln x - 2)\right] = -\sqrt{2e} - \lim_{x \to 0+} \sqrt{2x}\,(\ln x) =$$

$$= -\sqrt{2e} - \lim_{z \to +\infty} \sqrt{\frac{2}{z}}\,(-\ln z) = -\sqrt{2e}$$

6. $y' + \dfrac{2}{x} \cdot y = \dfrac{4 \arctan x}{x}$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare completa: coefficiente del termine in y e termine noto sono definiti e continui sui due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

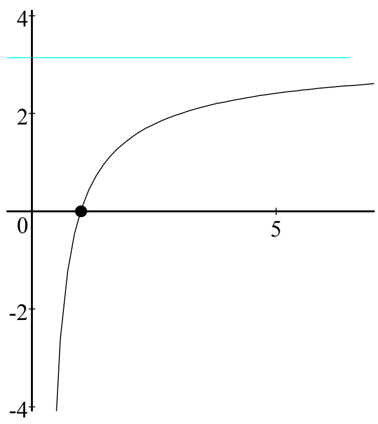
L'equazione omogenea associata $z' = -\dfrac{2}{x} \cdot z$, oltre alla soluzione $z = 0$, ha le soluzioni $\displaystyle\int \frac{dz}{z} = \int -\frac{2}{x} dx$ cioè $\ln|z| = -2\ln|x| + k$ ovvero, tenuto conto anche della soluzione nulla, $z = c \cdot \frac{1}{x^2}$ (con $c \in \mathbb{R}$). Applicando il metodo di variazione delle costanti, si trova che una soluzione particolare deve avere la forma $\overline{y}(x) = c(x) \cdot \frac{1}{x^2}$ ove $c(x)$ deve essere tale che $\left(c'(x) \cdot \frac{1}{x^2} - 2c(x) \cdot \frac{1}{x^3}\right) + \dfrac{2}{x} \cdot c(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \dfrac{4\arctan x}{x}$, cioè

$$c(x) = \int x^2 \cdot \frac{4\arctan x}{x} dx = 2\int 2x \arctan x dx = 2\left(x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx\right) =$$

$$= 2\left[x^2 \arctan x - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx\right] = 2\left[x^2 \arctan x - x + \arctan x + c\right]$$

e quindi una soluzione particolare è $\overline{y}(x) = 2\left[x^2 \arctan x - x + \arctan x\right] \cdot \dfrac{1}{x^2}$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$y(x) = 2\left[\arctan x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\arctan x + c}{x^2}\right]$: le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ presi separatamente.
Perché sia soddisfatta la condizione iniziale $y(1) = 0$, si deve avere $0 = 2[2\arctan 1 - 1 + c]$, cioè $c = 1 - \dfrac{\pi}{2}$.
Quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x) = 2\arctan x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2\arctan x + 2 - \pi}{x^2}$, con dominio ristretto all'intervallo $(0, +\infty)$, in cui è contenuto $x = 1$.



7. La matrice dei coefficienti del sistema lineare proposto $A = \begin{pmatrix} 2+k & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ k & k+1 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango ≥ 2 comunque si scelga k poiché $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Inoltre, sviluppando il determinante di A lungo l'ultima colonna si ha $|A| = 2(-5k-2) - (k^2+4k+2) + 3(4+3k) = -k^2 - 5k + 6 = 0$ per $k = 1$ e $k = -6$: dunque i rango di A è 3 (e quindi è uguale al rango della matrice orlata con la colonna dei coefficienti) $\boxed{\text{se } k \neq 1 \text{ e } k \neq -6}$: per questi valori il sistema è risolubile in maniera unica (infatti la matrice A è invertibile). Negli altri due casi, per vedere se il sistema è risolubile (comunque con infinite soluzioni, dipendenti da $3 - rg(A) = 3 - 2 = 1$ parametro) si deve studiare il rango della matrice ottenuta orlando A con la colonna dei coefficienti: $(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2+k & -1 & 2 & k \\ -2 & 3 & 1 & -1 \\ k & k+1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{Se } k = 1}$ essa è $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2, poiché l'ultima riga è somma delle altre due: dunque la matrice orlata ha rango 2, uguale a quello di A e quindi il sistema è risolubile.

$\boxed{\text{Se } k = -6}$ essa è $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e il determinante della matrice ottenuta accostando le ultime tre colonne vale $-6(9+5) + (-3+10) \neq 0$: dunque la matrice orlata ha rango 3, maggiore di quello di A e quindi il sistema non è risolubile.