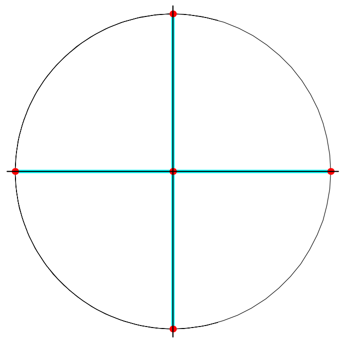
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (20/2/04)

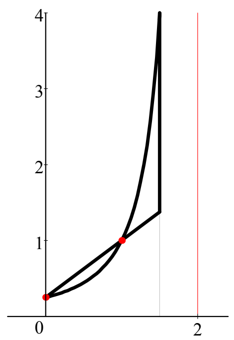
1. L'equazione $z^5 - 16z = 0$ equivale alla $z^5 = 16z$. Una delle sue soluzioni è $z = 0$ mentre le altre sono le soluzioni di $z^4 = 16$: si tratta quindi di trovare le radici quarte $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ di 16. Visto che 16 ha modulo 16 e argomento principale 0, le quattro soluzioni si hanno in corrispondenza a



$$\begin{cases} |z| = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \theta = \dfrac{k\pi}{2}, \text{ con } k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

Quindi l'equazione ammette altre 4 soluzioni:
$z = 2\left[\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)\right]$, con $k = 0, 1, 2, 3$
Le soluzioni dell'equazione assegnata sono quindi
$z_0 = 2$, $z_1 = 2i$, $z_2 = -2$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 0$.
Esse si trovano al centro e ai vertici di un quadrato avente i vertici sugli assi.

2. La funzione $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ ha asintoto orizzontale $y = 0$ e asintoto verticale $x = 2$; è sempre positiva e nell'intervallo $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$ in esame è crescente. La funzione $h(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}x$ ha per grafico una retta passante per $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e con coefficiente angolare $\dfrac{3}{4}$.




Esse intersecano la retta $x = \dfrac{3}{2}$ rispettivamente in $\left(\dfrac{3}{2}, 4\right)$ e in $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{11}{8}\right)$ e si intersecano tra loro quando $\dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}x$, cioè per $(x-2)^2(1+3x) - 4 = 0$, cioè quando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{8}{3}$. La prima e la seconda soluzione cadono nell'intervallo in esame; inoltre $g(x) > h(x) \Longleftrightarrow (x-2)^2(1+3x) - 4 < 0$, cioè per $x \in (-\infty, x_1)$ e per $x \in (x_2, x_3)$: dunque nell'intervallo considerato i grafici delle due funzioni e la retta $x = \dfrac{3}{2}$ delimitano la regione limitata $R$ indicata in figura.

L'area della regione $R$ è data dalla somma dell'area dello spicchio che ha vertici in $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e $(1, 1)$ e dell'area del triangoloide delimitato dalla retta $x = \dfrac{3}{2}$ da $g(x)$ sopra e da $h(x)$ sotto.

Dunque $\mathcal{A}(R) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{(x-2)^2}\right)dx + \int_1^{3/2}\left(\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x\right)dx =$

$$= \left[\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{x-2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{x-2}\right]_1^{3/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{8} + \frac{27}{32} - 2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + 1\right) = \frac{1}{8} + \frac{13}{32} = \frac{17}{32}$$

3. La funzione $f(x) = \ln\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}\right)$

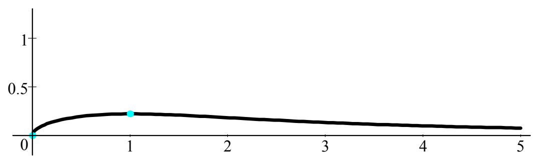
(a) è definita su $[0, +\infty)$ (poiché in questo intervallo la radice è definita, la frazione risulta definita e non negativa e quindi l'argomento del logaritmo è addirittura $> 1$, per cui è definito e non negativo anch'esso). Inoltre $f(x) \geq 0$ in tutto l'insieme di definizione e l'unico zero è in $x = 0$.

(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^{3/2}}\right) = 0^+$: per $x \to +\infty$ c'è un asintoto orizzontale: $y = 0$

(c) $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{x}}{x^2+3}} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x^2+3) - 2x\cdot\sqrt{x}}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-4x^2}{2\sqrt{x}\,(x^2+3+\sqrt{x})\,(x^2+3)} > 0 \iff$ $x^2 < 1$ cioè, nell'insieme di definizione della funzione, per $x \in [0, 1)$: su questo intervallo la funzione cresce, mentre sull'intervallo $(1, +\infty)$ decresce. Dunque $f(x)$ ha un massimo relativo in $x = 1$. Il valore del massimo è $\ln\frac{5}{4}$. Da notare che la funzione ha poi un minimo assoluto in $x = 0$.

(d) Poiché $f(4) = \ln\left(\frac{21}{19}\right)$ e $f'(4) = \frac{3(1-16)}{4(21)(19)} = -\frac{15}{532}$, l'equazione della tangente al grafico in tale punto è $y - \ln\left(\frac{21}{19}\right) = -\frac{15}{532}(x-4)$. Invece quando $x \to 0^+$ la tangente tende a disporsi verticalmente, poiché $\lim_{x\to0^+} \frac{3(1-x^2)}{2\sqrt{x}\,(x^2+3+\sqrt{x})\,(x^2+3)} = +\infty$ per cui

(e) il grafico avrà un andamento come quello indicato in figura.




Il grafico fa intuire che, ci deve essere un flesso nell'intervallo $(1, +\infty)$ visto che la funzione ha un massimo in 1 e per $x \to +\infty$ tende a 0, mantenendosi sempre positiva.

4. $$\int \frac{\sqrt{x}}{4x+1}dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione:}\\ \sqrt{x} = t,\ x = t^2\\ dx = 2tdt\end{array}} = \int \frac{2t^2}{4t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{4t^2+1-1}{4t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{4t^2+1}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left[t - \int\left(\frac{1}{4t^2+1}\right)dt\right] = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione:}\\ 2t = s,\ 2dt = ds\end{array}} = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{s^2+1}\right)ds\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\arctan 2t\right] + c = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{x} - \arctan 2\sqrt{x}\right] + c$$

5. $\displaystyle\int_{0+}^{3} \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+2t)} dt$ è integrale improprio di II specie, poiché la funzione integranda è definita e continua in $(0,+\infty)$, ma non è definita in $t=0$ e risulta illimitata in $(0,3]$.

Per $t \to 0^+$ la funzione è asintotica a $\dfrac{\sqrt{t}}{2t} = \dfrac{1}{2t^{1/2}}$.

Ora $\displaystyle\int_{0+}^{3} \frac{1}{2t^{1/2}} dt = \lim_{x\to 0+} \int_{x}^{3} \frac{1}{2t^{1/2}} dt = \lim_{x\to 0+} \left[t^{1/2}\right]_x^3 = \sqrt{3}$ converge e quindi anche $\displaystyle\int_{0+}^{3} \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+2t)} dt$ converge, per il criterio del confronto asintotico.

6. $y' - \dfrac{\cos x}{1+\sin x} \cdot y = (\cos x)^2$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare completa: coefficiente del termine in $y$ e termine noto sono definiti e continui purché non si annulli il denominatore del coefficiente del termine in $y$ e quindi su ogni intervallo della forma $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ con $k$ intero qualunque.

L'equazione omogenea associata $z' = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} \cdot z$, oltre alla soluzione $z=0$, ha le soluzioni $\displaystyle\int \frac{dz}{z} = \int \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot dx$ cioè, poiché $(1+\sin)' = \cos x$, $\ln|z| = \ln|1+\sin x| + k$ ovvero[(1)], tenuto conto anche della soluzione nulla, $z = c \cdot (1+\sin x)$ (con $c \in \mathbb{R}$).

Applicando il metodo di variazione delle costanti, si trova che una soluzione particolare deve avere la forma $\overline{y}(x) = c(x) \cdot (1+\sin x)$ ove $c(x)$ deve essere tale che

$[c'(x) \cdot (1+\sin x) + c(x) \cdot \cos x] - \dfrac{\cos x}{1+\sin x} \cdot c(x) \cdot (1+\sin x) = (\cos x)^2$, cioè

$$c(x) = \int \frac{(\cos x)^2}{1+\sin x} \cdot dx = \int \frac{1-(\sin x)^2}{1+\sin x} \cdot dx = \int (1-\sin x)\, dx = x + \cos x + c$$

e quindi una soluzione particolare è $\overline{y}(x) = (x+\cos x) \cdot (1+\sin x)$

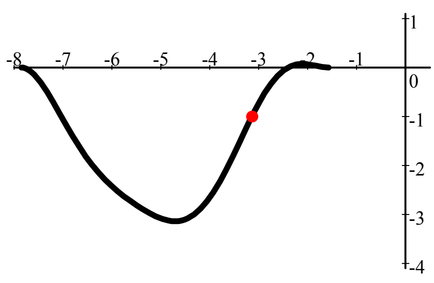
e l'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$y(x) = (x + \cos x + c) \cdot (1+\sin x):$$

le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) in ciascuno degli intervalli $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ presi separatamente.

Perché sia soddisfatta la condizione iniziale $y(-\pi) = -1$, si deve avere $-1 = (-\pi - 1 + c) \cdot 1$, cioè $c = \pi$.

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x) = (x + \cos x + \pi) \cdot (1+\sin x)$, con dominio ristretto all'intervallo $\left(-\dfrac{5\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$, in cui è contenuto $x = -\pi$.




---

1) $\ln|z| = \ln|1+\sin x| + k \iff \ln|z| - \ln|1+\sin x| = k \iff \ln\left|\dfrac{z}{1+\sin}\right| = k \iff \dfrac{z}{1+\sin} = \pm e^k$

7. La matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & k & 2 \\ -k & 3-k & -3 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo.
   Sviluppando il determinante di $A$ lungo la prima riga si ha:
   $|A| = 3\,[(3-k)\,k+9]-k\,(-k^2+12)+2\,[-3k-4\,(3-k)] = k^3-3k^2-k+3 = (k^2-1)\,(k-3)$: esso è nullo per $k=-1$, $k=1$ e $k=3$.
   Dunque la matrice $A$ è invertibile $\boxed{\text{se e solo se } k \neq \pm 1 \text{ e } k \neq 3}$.