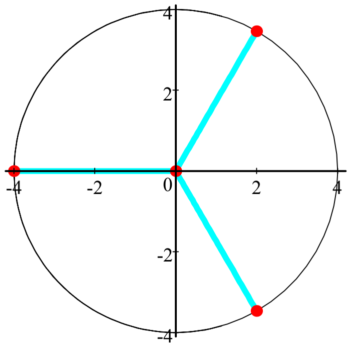
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (20/7/04)

1. L'equazione $z^4+64z=0$ equivale alla $z^4=-64z$. Una delle sue soluzioni è $z=0$ mentre le altre sono le soluzioni di $z^3=-64$: si tratta quindi di trovare le radici terze $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ di -64. Visto che -64 ha modulo 64 e argomento principale π, le tre soluzioni si hanno in corrispondenza a



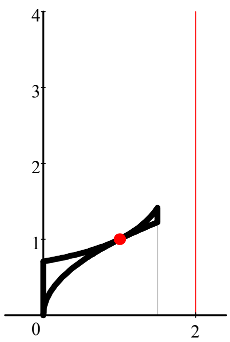
$$\begin{cases} |z|=\sqrt[3]{64}=4 \\ \theta=\dfrac{\pi+2k\pi}{3}, \text{ con } k=-1,0,1 \end{cases}$$

Quindi l'equazione ammette altre 3 soluzioni:

$$z=4\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right], \text{ con } k=-1,0,1$$

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono quindi
$z_0=2+2\sqrt{3}i$, $z_1=-4$, $z_2=2-2\sqrt{3}i$, $z_3=0$.
Esse si trovano ai vertici e al centro di un triangolo equilatero simmetrico rispetto all'asse x.
Le soluzioni reali sono solo due.

2. La funzione $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ ha asintoto orizzontale $y=0$ e asintoto verticale $x=2$; è sempre positiva e nell'intervallo $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ in esame è crescente. La funzione $h(x)=\sqrt{x}$ ha per grafico un arco di parabola avente vertice in $(0,0)$ e asse $y=0$, crescente.



Esse intersecano la retta $x=\dfrac{3}{2}$ rispettivamente in $\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{2}\right)$ e in $\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ e si intersecano tra loro quando $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{x}$, cioè per $\begin{cases}(x-2)x+1=0\\ 0\le x<2\end{cases}$, cioè per $x=1$.
La soluzione cade nell'intervallo in esame; inoltre $g(x)>h(x)\iff(x-2)x+1=0>0$, cioè per $x\neq1$: dunque nell'intervallo considerato i grafici delle due funzioni, l'asse y e la retta $x=\dfrac{3}{2}$ delimitano la regione limitata R indicata in figura.

L'area della regione R è data dalla somma dell'area dei due triangoloidi con vertice in $(1,1)$ delimitati dalle rette $x=0$ e $x=\dfrac{3}{2}$ e dai grafici di $g(x)$ sopra e di $h(x)$ sotto. Dunque

$$\mathcal{A}(R)=\int_0^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{x}\right)dx=\left[-2\sqrt{2-x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{3/2}=\left(-\sqrt{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}+2\sqrt{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

3. La funzione $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2x\right)$

   (a) è definita su tutto l'asse reale, poiché $e^{2x}>2x$ per tutti gli x reali, visto che e^{2x}, essendo convessa, sta sempre non al di sotto della sua tangente in $(0,1)$ che ha equazione $y=2x+1$. Inoltre $f(x)\ge0$ se e solo se $e^{2x}-2x\ge1$ cioè, per quanto appena detto, sempre e l'unico zero è in $x=0$.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(-2x) = +\infty$ (infatti e^{2x} è un infinitesimo per $x \to -\infty$); non vi è asintoto per $x \to -\infty$ proprio perché la funzione ha l'andamento di $\ln(-2x)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln e^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ (infatti, per $x \to +\infty$, e^{2x} è un infinito di ordine superiore a x); si ha inoltre $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \dfrac{e^{2x} - x}{e^{2x}} = 0$ e quindi per $x \to +\infty$ c'è asintoto obliquo: $y = 2x$.

(c) $f'(x) = \dfrac{2}{e^{2x} - 2x}\left(e^{2x} - 1\right)$: è definita per $x \neq 0$

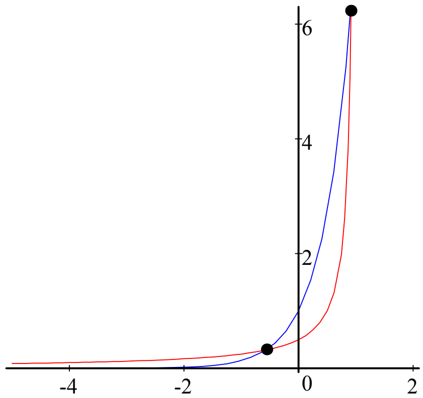
$$f''(x) = 2 \cdot \frac{2e^{2x}\left(e^{2x} - 2x\right) - 2\left(e^{2x} - 1\right)^2}{\left(e^{2x} - 2x\right)^2} = 4 \cdot \frac{-2xe^{2x} + 2e^{2x} - 1}{\left(e^{2x} - 2x\right)^2} = 4 \cdot \frac{2(1-x)e^{2x} - 1}{\left(e^{2x} - 2x\right)^2}$$

è definita per $x \neq 0$

(d) $f'(x) > 0 \iff e^{2x} - 1 > 0$, cioè in $(0, +\infty)$: quindi f cresce in $(0, +\infty)$ e decresce in $(-\infty, 0)$ e presenta un minimo relativo ed assoluto in $x = 0$; il valore del minimo è 0.

(e) $f''(x) > 0 \iff 2(1-x)e^{2x} - 1 > 0$, cioè mai se $x \geq 1$ e per $e^{2x} > \dfrac{1}{2(1-x)}$ se $x < 1$. In questo intervallo entrambe le funzioni sono crescenti e hanno l'asse x come asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$), ma i loro grafici hanno sicuramente due punti di intersezione, uno nell'intervallo $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, poiché $\frac{1}{e^2} < \frac{1}{4}$ mentre $\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$, l'altro nell'intervallo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

poiché $e > 1$, ma per $x \to 1-$ la funzione $\dfrac{1}{2(1-x)}$ tende a $+\infty$ mentre $e^2 < 8$ (il tutto è illustrato dalla figura qui a lato).
Quindi ci sono due punti di flesso negli intervalli sopra indicati.
Nell'intervallo tra i due flessi la funzione $f(x)$ è convessa, altrove è concava.



Confronto tra e^{2x} (in blu) e $\frac{1}{2(1-x)}$ (in rosso)

(f) Poiché $f(1) = \ln\left(e^2 - 2\right)$ e $f'(1) = \dfrac{2\left(e^2 - 1\right)}{e^2 - 2}$, l'equazione della tangente al grafico in tale punto è $y = \dfrac{2\left(e^2 - 1\right)}{e^2 - 2}(x - 1) + \ln\left(e^2 - 2\right)$.

(g)

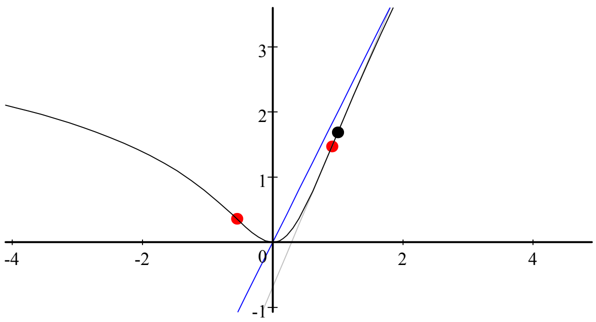


Grafico di $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$ (punti di flesso in rosso)

4. $\displaystyle\int x^2 \cos \tfrac{x}{2} dx = \boxed{\text{per parti con fattor finito } x^2} = 2x^2 \sin \tfrac{x}{2} - 4 \int x \sin \tfrac{x}{2} dx =$

$= \boxed{\text{per parti con fattor finito } x} = 2x^2 \sin \tfrac{x}{2} + 8x \cos \tfrac{x}{2} - 8 \displaystyle\int \cos \tfrac{x}{2} dx =$

$= 2\left(x^2 - 8\right) \sin \tfrac{x}{2} + 8x \cos \tfrac{x}{2} + c.$

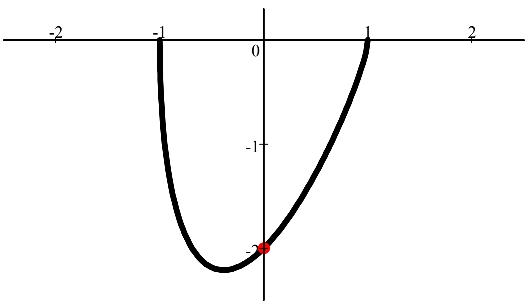
5. $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{1 - e^{-t}}{t^{3/2}} dt$ è integrale improprio di I e di II specie, poiché la funzione integranda è definita e continua in $(0, +\infty)$, ma non è definita in $t = 0$ e risulta illimitata in un intorno destro di 0.

Per $t \to 0^+$ la funzione è asintotica a $\dfrac{t}{t^{3/2}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$, mentre per $t \to +\infty$ asintotica a $\dfrac{1}{t^{3/2}}$.

Ora $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{t^{1/2}} dt = \lim_{x \to 0+} \int_{x}^{1} \frac{1}{t^{1/2}} dt = \lim_{x \to 0+} \left[2t^{1/2}\right]_x^1 = 2$ converge e quindi anche $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1 - e^{-t}}{t^{3/2}} dt$ converge, per il criterio del confronto asintotico. Analogamente $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \frac{1}{t^{3/2}} dt =$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{2}{t^{1/2}}\right]_1^x = 2$ converge e quindi anche $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1 - e^{-t}}{t^{3/2}} dt$ converge, per il criterio del confronto asintotico. Dunque l'integrale assegnato converge, in quanto somma di due integrali impropri convergenti

6. $y' + \dfrac{x}{1 - x^2} y = 1$ è un'equazione differenziale lineare del I ordine completa i cui coefficienti sono definiti e continui negli intervalli $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, +\infty)$.
Risolvendo l'equazione omogenea $(y' + \dfrac{x}{1 - x^2} y = 0)$ come equazione differenziale a variabili separabili si trova, oltre alla soluzione $y = 0$: $\ln|y| = \displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \tfrac{1}{2} \ln\left|x^2 - 1\right| + c =$ $\ln\sqrt{|x^2 - 1|} + c$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = k\sqrt{|x^2 - 1|}$.
La soluzione del problema di Cauchy è definita in $(-1, 1)$. Ora, una soluzione particolare nell'intervallo $(-1, 1)$ è $\overline{y} = \sqrt{1 - x^2} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x$: quindi nell'intervallo $(-1, 1)$ la soluzione generale dell'equazione completa è $y = (k + \arcsin x)\sqrt{1 - x^2}$, con k reale qualunque.
Perché risulti $y(0) = -2$ si deve avere: $y(0) = (k + \arcsin 0)\sqrt{1 - 0} = k = -2$.
Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = [(\arcsin x) - 2]\sqrt{1 - x^2}$



7. La matrice $A = \begin{pmatrix} k & 9 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo.
Sviluppando secondo l'ultima colonna si ha:
$\begin{vmatrix} k & 9 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} = (5k+3) - (-3k-45) \neq 0$, cioè per $k \neq -6$. Dunque la matrice A è invertibile $\boxed{\text{se e solo se } k \neq -6}$.